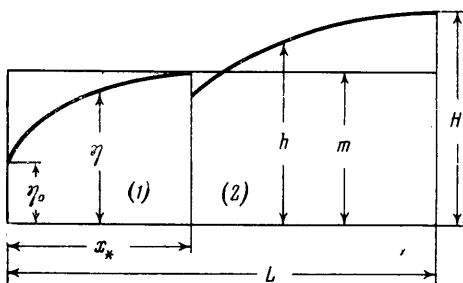


НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ЩЕЛЕВОМ ЛЮТКЕ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ (*Новосибирск*)

Если пренебречь сжимаемостью грунта, что вполне допустимо, когда рассматриваемые глубины невелики, то, как известно, неустановившееся движение грунтовых вод при стационарных граничных условиях возможно лишь при наличии участков свободной поверхности потока. Известно также [1], что при откачках из нижележащих слоев грунта могут происходить отрывы свободной поверхности потока в рабочем пласте, что приводит к образованию зон подсосывания, прилегающих к плохо проницаемой кровле. Знание размеров зоны подсосывания может оказаться полезным при решении вопросов о возможности образования верховодки и вторичного засоления почв [2]. Ниже рассматривается простейшая схема (фиг. 1) неустановившегося напорно-безнапорного движения в пласте с непроницаемыми кровлей и подошвой, смоделированном на щелевом лотке [3].

Пусть в пласте длиной L , мощностью m и с напором $H = \text{const}$ при $x = 0$ мгновенно напор снижается так, что образуются две изменяющиеся во времени области: область (1) потока со свободной поверхностью и область (2) напорного движения. Перемещающуюся точку отрыва свободной поверхности назовем критической и будем обозначать ее абсциссу x_* . Предположим, что над свободной поверхностью вплоть до точки x_* устанавливается, вообще говоря, отрицательный напор $-h_v$, причем $0 \leq h_v \leq h_a$, где h_a — атмосферное давление, выраженное в см столба жидкости. Величина h_v зависит от условий прорыва воздуха в вакуумную зону и при свободном его доступе может быть принята, по-видимому, равной величине капиллярного давления. Заметим, что применяемый здесь термин «свободная поверхность» при рассмотрении конкретного пласта грунта может иметь некоторый отвлеченный характер, поскольку в зоне разрежения может присутствовать жидкость, которая, однако, не движется и находится в «подвешенном» состоянии. Пусть $\eta(x, t)$ — ордината свободной поверхности, $h(x, t)$ — напор. Уравнение неразрывности потоков



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \frac{\sigma}{k} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (0 \leq x \leq x_*(t))$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (x_* < x \leq L)$$

в безразмерных величинах имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \quad (0 \leq \xi \leq \xi_*(\tau)) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\xi_*(\tau) < \xi < L) \quad (2)$$

$$\left(\tau = \frac{k}{m\sigma} t, \quad \xi = \frac{x}{L} \right)$$

Для функций $\eta(\xi, \tau)$ и $h(\xi, \tau)$ сохранены прежние обозначения. Уравнения (1)-(2) будем решать при условиях:

$$\begin{aligned} \eta(\xi_*(\tau), \tau) &= 1, & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= \frac{\partial h}{\partial \xi}, & \eta(0, \tau) &= \eta_0 = \text{const} \\ h(\xi_*(\tau), \tau) &= 1 - h_v, & h(L, \tau) &= H, & \xi_*(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (2), получим

$$h(\xi, \tau) = a(\tau)\xi + b(\tau) \quad (4)$$

причем из граничных условий следует, что

$$a(\tau) = \frac{\Delta H}{L - \xi_*(\tau)}, \quad b(\tau) = H - \frac{\Delta H}{L - \xi_*(\tau)} L \quad (\Delta H = H + h_v - 1)$$

Дифференцирование первого условия из (3) дает

$$\frac{d\xi_*}{d\tau} = - \frac{\partial \eta / \partial \tau}{\partial \eta / \partial \xi} = - \frac{1}{a(\tau)} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} (\xi_*, \tau)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{d\xi_*}{d\tau} \rightarrow \infty \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \quad \xi(\tau) \rightarrow \xi_*(\infty) = \text{const} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty$$

Таким образом, при малых τ

$$\xi(\tau) = c_0 \tau^\alpha + c_1 \tau + \dots \quad (0 < \alpha < 1) \quad (5)$$

Введем новую независимую переменную

$$y = \frac{\xi}{\xi_*(\tau)} \in [0, 1]$$

и запишем рассматриваемую задачу в виде ¹

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \xi_*^2(\tau) \frac{\partial \eta}{\partial \tau}$$

$$\eta(1, \tau) = 1, \quad \eta(0, \tau) = \eta_0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}(1, \tau) = \frac{\Delta H \xi_*(\tau)}{L - \xi_*(\tau)}, \quad \xi_*(0) = 0 \quad (6)$$

Для упрощения проведем линеаризацию уравнения для η по первому способу [4], вынося из-под знака дифференцирования среднюю в промежутке $[0, 1]$ величину $\eta_m = 1/2(1 + \eta_0)$ и делая замену $u = \eta - \eta_0 - (1 - \eta_0)y$. Для u получим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\xi_*^2(\tau)}{\eta_m} \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad u(0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = 0, \quad \xi_*(0) = 0 \quad (7)$$

$$\xi_*(\tau) = \frac{L[1 - \eta_0 + \partial u / \partial y]}{\Delta H + 1 - \eta_0 + (\partial u / \partial y)} \text{ при } y = 1 \quad (8)$$

Будем искать решение (7), (8) методом последовательных приближений: зададимся некоторым $\xi_*^{(0)}$; подставляя его в (7), найдем решение уравнения теплопроводности $u^{(0)}(y, \tau)$, удовлетворяющее начальному условию $u^{(0)}(y, 0) = (1 - \eta_0)(1 - y)$. Подставляя $u^{(0)}$ в (8), получим первое приближение $\xi_*^{(1)}$ и т. д.

Очевидно, сходимость (предположим, что она имеется) будет зависеть от более или менее удачного нулевого приближения. Для его получения представим u в виде

$$u = F(y) T(\tau) \quad (9)$$

Ограничиваясь первой гармоникой, получим

$$F(y) = A_1 \sin \pi y, \quad T(\tau) = \exp \left\{ - \int_0^\tau \frac{\pi^2 \eta_m d\tau}{\xi_*^2(\tau)} \right\}$$

Принимая во внимание (5) с точностью до величины порядка τ^α , из (8) получим:

$$c_0 \tau^\alpha \left[\Delta H + 1 - \eta_0 - A_1 \pi \exp \left\{ - \frac{\pi^2 \eta_m}{c_0^2} \frac{1}{1 - 2\alpha} \tau^{1-2\alpha} \right\} \right] =$$

$$= L \left[1 - \eta_0 - A_1 \pi \exp \left\{ - \frac{\pi^2 \eta_m}{c_0^2} \frac{1}{1 - 2\alpha} \tau^{1-2\alpha} \right\} \right]$$

Полагая $A_1 = (1 - \eta_0) / \pi$ и сравнивая порядки малых величин и коэффициенты при них, найдем

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad c_0^3 = \frac{3\pi^2 \eta_m L (1 - \eta_0)}{\Delta H}$$

Следовательно, при малых τ

$$\xi_*(\tau) = \left[\frac{3\pi^2 \eta_m L (1 - \eta_0)}{\Delta H} \tau \right]^{1/3}$$

¹ В этом уравнении для η будем считать, что можно пренебречь членом

$$y \xi_*^2(\tau) \frac{d\xi_*}{d\tau} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

который допускает при $\tau \geq \tau_0 > 0$, где τ_0 — некоторая положительная величина, очевидную оценку

$$y \xi_*^2(\tau) \frac{d\xi_*}{d\tau} \frac{\partial \eta}{\partial y} = y \xi_*^2(\tau) \frac{d\xi_*}{d\tau} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \leq C \frac{d\xi_*}{d\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \leq C_1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 \quad (C, C_1 = \text{const})$$

что имеет порядок куба скорости фильтрации, а при малых τ можно ожидать, что

$$y \xi_*^2(\tau) \frac{d\xi_*}{d\tau} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \ll \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right|$$

поскольку возрастание $d\xi_*/d\tau$ при $\tau \rightarrow 0$ несколько компенсируется стремлением к нулю множителя $\xi_*^2(\tau)$.

и за нулевое приближение можно принять

$$\xi_*^{(0)}(\tau) = \frac{L(1-\eta_0)}{\Delta H + 1 - \eta_0} (1 - e^{-b\tau})^{1/3} \quad \left(b = \frac{3\pi^2 \eta_m}{L^2(1-\eta_0)^2} (\Delta H + 1 - \eta_0)^3 \right)$$

Здесь первый множитель равен $\xi_*(\infty)$. Введем замену

$$\tau_1 = \eta_m \int_0^{\tau} \frac{dt}{\xi_*^2(t)}$$

для функции $u^{(0)}(y, \tau_1)$ получим уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, при этом для τ_1 найдем [5]

$$\tau_1 = \frac{1}{3\pi^2(\Delta H + 1 - \eta_0)} \left[\frac{3}{2} \ln \frac{\exp\{-1/3b\tau\}}{1 - (1 - \exp\{-b\tau\})^{1/3}} + \sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{3}(1 - \exp\{-b\tau\})^{1/3}}{2 + (1 - \exp\{-b\tau\})^{1/3}} \right]$$

Его решение запишется так [6]:

$$u^{(0)}(y, \tau_1) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\eta_0}{n} e^{-n^2\pi^2\tau_1} \sin n\pi y$$

Подставляя это в (8), получим первое приближение $\xi_*^{(1)}$. Последующие приближения можно осуществлять численно.

В целях проверки степени приближения предложенного выше подхода к реальному неустановившимся напорно-безнапорных

движений были проведены эксперименты на щелевом лотке. Длина лотка $L=69.8$ см, мощность смоделированного пласта $m=13.4$ см, толщина щели $d=0.215$ см, $\eta_0=6.5$ см, $H=17.4$ см. Величина h_v была найдена из условия равенства экспериментального и теоретического значения $\xi_*(\infty)$ и оказалась равной 2.19 см.

В качестве рабочей жидкости был использован глицерин. Перемещение критической точки наблюдалось визуально. Моменты прохождения ее через намеченные пункты фиксировались секундомером с точностью до 0.1 сек.

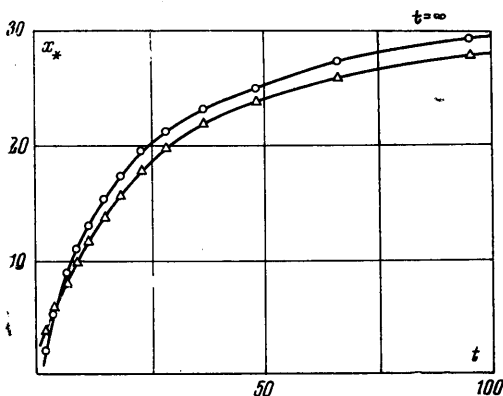
Результаты экспериментов (отмечены треугольниками) и величина $x_*^{(1)}(t)$ представлены на фиг. 2. При этом был введен поправочный коэффициент, равный 0.86, частично

учитывающий линеаризацию. Он был найден из анализа влияния линеаризации на вычисление $\xi_*(\infty)$. Как видно из фиг. 2, использование первого приближения в некоторых случаях может дать сравнительно хороший результат.

Поступило 20 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. У с е н к о В. С. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам при наличии инфильтрации с поверхности земли. Научн. зап. Моск. ин-та инж. водн. хоз-ва, 1960, т. 22.
2. Б и н д е м а н Н. Н. Прогноз повышения грунтовых вод и образования верховодки на участках промышленных предприятий. Гр. Лабор. инж. гидрологии, 1960.
3. А р а в и н В. И. Основные вопросы экспериментального исследования движения грунтовых вод в щелевом лотке. Изв. НИИГ, 1938, т. 23.
4. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
5. Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ОГИЗ — Госиздат, 1943.
6. К о ш л я к о в Н. С., Г л и н е р Э. Б., С м и р н о в М. М. Дифференциальные уравнения математической физики. Физматгиз, 1962.



Фиг. 2