

О ФОРМЕ ЛИНЗЫ ПРЕСНЫХ ВОД ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ КАНАЛА

В. Н. ЭМИХ (Новосибирск)

1. **Возникновение и постановка задачи.** Транспортировка оросительными каналами вод сопровождается их частичными потерями на фильтрацию через дно и откосы каналов. Фильтруясь из канала вглубь, воды, как правило, встречают подпор либо в форме водоупора, либо в виде грунтовых вод, минерализация и плотность которых обычно выше минерализации и плотности вод из канала. Вследствие этого фильтрующиеся воды растекаются вширь, вытесняя соленые грунтовые воды из зоны канала и образуя так называемую линзу. Расходным фактором, компенсирующим поступление вод из канала, чаще всего является их испарение со свободной поверхности линзы. В этих условиях возникает вопрос о возможных размерах линзы.

При решении этой задачи в гидродинамической постановке наиболее сложным оказывается выбор такого закона испарения, который, обеспечивая возможность решения, был бы достаточно обоснован с физической точки зрения. Главным критерием его обоснованности следует, по-видимому, считать правильный учет уменьшения интенсивности испарения с увеличением глубины от поверхности земли (см. [1], стр. 143).

Ввиду симметрии области фильтрации ограничимся рассмотрением правой ее половины, схематично изображенной на фиг. 1. Дно канала предполагается горизонтальным, глубина воды в канале — бесконечно малой: в случае конечной глубины пришлось бы рассматривать фильтрацию не только через дно канала, но и через его откосы, что внесло бы в задачу дополнительную особую точку. Решив задачу при терпешных предположениях, можно принять некоторую эквипотенциаль за дно канала; при этом уровень воды в канале должен быть таким, чтобы потенциал на эквипотенциали, взятой в качестве дна, оставался прежним. При указанном на фиг. 1 выборе системы координат и при совмещении плоскости сравнения напоров с плоскостью $y=0$ вдоль дна AD канала выполняются условия $y=0$, $\varphi=0$. Линия симметрии AB является линией тока. Положим вдоль нее $\psi=0$. Кроме того, $x=0$ на AB .

Как известно, между пресной и соленой водой существует переходная зона. Толщина ее тем меньше, чем стабильнее линза. При математической схематизации толщиной переходной зоны приходится пренебрегать и считать, что между пресными и солеными водами существует резко выраженная граница раздела, в данном случае — линия BC . Условия на ней таковы (см. [2], гл. VIII, § 9):

$$\varphi - cy = (c + k)T, \quad \psi = 0 \quad \left(c = k\Delta\rho = k \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \right)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, ρ_1 и ρ_2 — плотности пресных и соленых вод, T — глубина залегания (от поверхности земли) грунтовых вод вне линзы. Первое условие — следствие предпосылок о непрерывности изменения давления при переходе через линию раздела и об отсутствии движения в зоне соленых вод. Второе условие означает, что BC является линией тока — продолжением линии тока AB . Правая часть первого условия получена в результате уточнения постоянной с использованием соответствия $y = -T \leftrightarrow \varphi = kT$ в точке C .

Потенциал в точке C находится из условия на свободной поверхности

$$\varphi + ky = 0$$

В свою очередь, для уточнения постоянной в этом условии использовано то обстоятельство, что в точке D , находящейся на «стыке» два канала и свободной поверхности, $y=0$, $\varphi=0$.

Второе условие на свободной поверхности должно определять режим испарения с нее. В статье [3] описано решение задачи при следующем законе испарения:

$$\psi + \varepsilon x = 1/2 Q + \varepsilon l \quad (1.1)$$

Здесь l — половина ширины канала, Q — расход через его дно. Для выяснения физического смысла параметра ε удобно написать условие (1.1) для некоторых двух точек M_1 и M_2 свободной поверхности и вычесть одно равенство из другого:

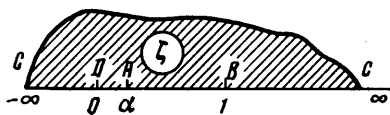
$$\psi_{M_1} - \psi_{M_2} = \varepsilon (x_2 - x_1) \quad (1.2)$$

Отсюда видно, что закон (1.1) выражает пропорциональность величины испарения с некоторого участка M_1M_2 свободной поверхности длине горизонтальной проекции этого участка и, следовательно, аналогичен закону инфильтрации ([2], гл. II,

§ 2). Однако, если для инфильтрации такая зависимость является естественной, то в случае испарения она имеет недостатки, о которых говорилось в статье [4]. Важнейшим из них является то обстоятельство, что, согласно (1.1), интенсивность испарения (величина испарения с элемента свободной поверхности, отнесенная к длине элемента) не убывает с глубиной, а наоборот, возрастает. В самом деле, горизонтальная проекция подвижного элемента свободной поверхности фиксированной длины ds растет по мере удаления элемента от канала, при выполаживании свободной поверхности; но тогда, согласно (2.2), увеличивается испарение с этого элемента.

С учетом указанного несоответствия было решено рассмотреть задачу для закона

$$\psi - \varepsilon y = 1/2 Q + \varepsilon l \quad (1.3)$$



Фиг. 2

2. Решение задачи с использованием зависимости (1.3). Как показано в [4], в случае задания испарения по закону (1.3) линии свободной поверхности CD соответствует в плоскости годографа скорости w дуга окружности, проходящей через начало

$$(u - 1/2\varepsilon)^2 + (v + 1/2k)^2 = 1/4(\varepsilon^2 + k^2)$$

Через начало проходят также окружность и прямая, отрезками которых являются остальные участки границ годографа. Поэтому задачу удается решить путем конформных отображений на полуплоскость двух областей с прямолинейными границами при помощи формулы Кристоффеля — Шварца. Одной из таких областей является область комплексного потенциала ω , другой — область $1/w$ инверсии годографа в окружности единичного радиуса с центром в начале координат [4]. Приведем выражения для комплексной координаты z области фильтрации и комплексного потенциала ω применительно к свободной поверхности CD ; вдоль нее $-\infty < \zeta \leq 0$ (фиг. 2)

$$z = l + M \int_0^{\zeta} \Phi(\xi) (-\xi)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \xi)^{-1/2} d\xi + i \frac{N}{k} e^{-i\pi\gamma} \int_0^{\zeta} (-\xi)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \xi)^{1/2} d\xi \quad (2.1)$$

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} (-\xi)^{\gamma-1/2} (1 - \xi)^{-3/2} d\xi \quad \left(\gamma = \frac{1}{\pi} \arctg \frac{\varepsilon}{k} \right)$$

$$\omega = -N e^{-i\pi\gamma} \int_0^{\zeta} (-\xi)^{-\gamma-1/2} (\alpha - \xi)^{-1/2} d\xi + i\varepsilon T \quad (2.2)$$

Здесь α — неизвестная заранее координата точки A на плоскости ζ , постоянные M и N определяются выражениями

$$M = \frac{c+k}{2\pi c} T \alpha^\gamma, \quad N = k T \alpha^\gamma \frac{\Gamma(1/2 + \gamma)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma)} \quad \left(\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \right)$$

Решение задачи в форме (2.1), (2.2) получено С. В. Мевлюдовым в дипломной работе¹. В дальнейшем по найденным формулам был произведен расчет координат свободной поверхности и линии раздела для ряда комбинаций исходных параметров, в качестве которых взяты следующие безразмерные величины:

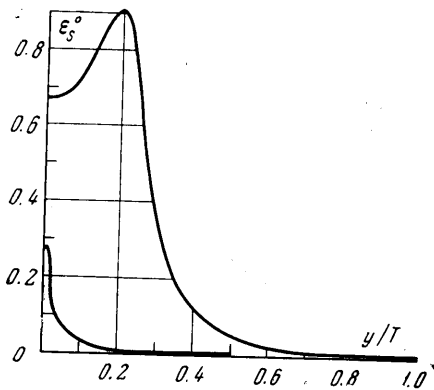
$$\varepsilon^0 = \frac{\varepsilon}{k}, \quad \Delta p = \frac{c}{k} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1}, \quad l^0 = \frac{l}{T}$$

Предварительно по заданному отношению l/T подсчитывался параметр α как корень уравнения, левая часть которого содержала выражения для l и T , полученных интегрированием соответствующих уравнений. Перед программированием все выражения несколько преобразовывались: для каждого участка границы производилась такая замена независимой переменной, при которой в новой переменной полным промежутком интегрирования становился промежуток $[0, 1]$. Ввиду того что подынтегральные функции имеют на концах этого промежутка особенности, численное интегрирование выполнялось в несколько меньшем отрезке, а для остаточных промежутков, содержащих концы отрезка $[0, 1]$, интегралы вычислялись по приближенным формулам. Правильность вычислений проверялась соотношениями (фиг. 1)

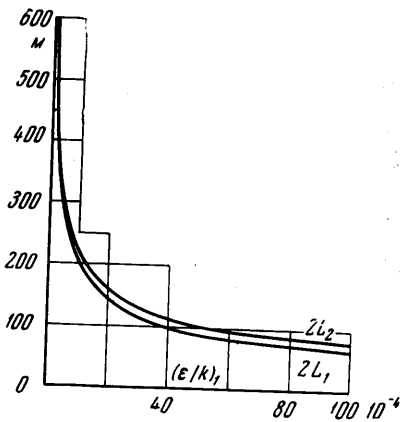
$$L = l + L', \quad H = T + H'$$

¹ Выполнена в 1963 г. в Ташкентском государственном университете.

Аналогичные вычисления были проведены ранее по формулам, полученным на основе зависимости (1.1). В этой постановке после определения размеров линзы становились известными и величины приведенных (отнесенных к коэффициенту фильтрации k) фильтрационных потерь из канала: в условиях установившегося движения они равны $2\epsilon^{\circ}L'$ —приведенной величине испарения со свободной поверхности. При решении же задачи с использованием зависимости (1.3) величина приведенных потерь



Фиг. 3



Фиг. 4

по аналогичным соображениям равна $2\epsilon^{\circ}l$, и, поскольку l известно, задание параметра ϵ° в данной постановке предопределяет расход из канала на фильтрацию. Так как при расчетах имелось в виду сравнить результаты, к которым приводят обе постановки, то параметр ϵ° для второй постановки (с использованием зависимости 1.3)) принимался таким, чтобы расход из канала был равен расходу для сравниваемого варианта в первой постановке. Параметры l и $\Delta\rho$ брались одинаковыми в обоих сравниваемых вариантах; кроме того, было принято $l = 1$ м (при другом l все координаты изменятся пропорционально). Полученные таким образом значения ϵ° для второй постановки оказываются очень большими, если учесть, что, согласно сказанному выше, они характеризуют приведенную интенсивность испарения вблизи поверхности земли. Однако оказывается, что это преувеличение компенсируется резким убыванием интенсивности испарения с глубиной. Выражение для приведенной интенсивности испарения ϵ_s° можно получить из соотношения $\epsilon_s^{\circ}ds = \epsilon^{\circ}dy$, обе части которого выражают приведенную величину испарения с элемента ds свободной поверхности; получим

$$\epsilon_s^{\circ} = \epsilon^{\circ} \frac{dy}{ds} = \frac{\epsilon^{\circ}}{\sqrt{1 + (dx/dy)^2}}$$

Внося в это равенство выражение для dx/dy , которое легко находится из уравнения (2.1), получим после некоторых преобразований

$$\epsilon_s^{\circ} = \epsilon^{\circ} \left(1 + \left[\epsilon^{\circ} + \frac{(1 + \Delta\rho)\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}\Delta\rho\Gamma(\gamma + 1/2)\cos\pi\gamma} \Phi(\zeta) \right]^2 \right)^{-1/2} \quad (2.3)$$

Результаты вычислений по этой формуле для двух комбинаций параметров представлены графически на фиг. 3. Нижняя кривая соответствует случаю $l = 5$ м, $\Delta\rho = 0.1$, $\epsilon^{\circ} = 0.281$; для верхней кривой $\epsilon^{\circ} = 0.909$, остальные параметры те же. Видим, что убывание интенсивности испарения с глубиной учитывается зависимостью (1.3) в сильно утрированном виде. Как следует из формулы (2.3), максимального значения, равного ϵ° , величина ϵ_s° достигает не при $\zeta = 0$, т. е. не у самой поверхности земли, а при некотором $\zeta_0 < 0$, определяемом из равенства

$$\epsilon^{\circ} + \frac{(1 + \Delta\rho)\Gamma(\gamma)}{2\sqrt{\pi}\Delta\rho\Gamma(\gamma + 1/2)\cos\pi\gamma} \Phi(\zeta_0) = 0$$

Этому значению ζ_0 на графиках (фиг. 3) соответствуют вершины «горбов» у кривых ϵ_s° . Что касается свободной поверхности, то от точки D она как бы несколько возвращается назад, затем поворачивает и начинает удаляться от канала. Точка поворота, где касательная к свободной поверхности вертикальна, отвечает максимуму ϵ_s° и вершинам «горбов». Отмеченное явление тем значительней, чем больше ϵ° .

3. Обсуждение результатов вычислений. В таблице приведены результаты вычислений по формулам задачи в первой постановке (с принятием зависимости (1.1)) и во второй (зависимость (1.3)). Величины, значения которых различны в первой и второй постановках и сравниваются между собой, снабжены соответственно индексами 1 и 2.

	$2l, \text{ м}$	$\Delta\rho$	ε_1°	$\delta = \frac{\Delta\rho}{\varepsilon_1^\circ}$	ε_2°	$2L_1, \text{ м}$	$2L_2, \text{ м}$	$H_1, \text{ м}$	$H_2, \text{ м}$	$\eta = \frac{Q}{Q_0}$	$\frac{2L_1}{H_1}$	$\frac{2L_2}{H_2}$
1			0.01	10	0.231	66.05	78.71	9.46	9.56	0.056	6.93	8.23
2			0.005	20	0.207	92.79	105.86	9.80	9.87	0.041	9.47	10.72
3			0.002	50	0.137	146.52	159.16	10.16	10.19	0.027	14.42	15.62
4	10	0.1	0.001	100	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	0.020	19.99	21.18
5			0.0005	200	0.071	294.05	307.56	10.54	10.55	0.014	27.90	29.15
6			0.0002	500	0.046	466.11	475.34	10.70	10.70	0.0091	43.56	44.42
7			0.0001	1000	0.033	660.22	663.67	10.78	10.78	0.0065	61.24	61.56
8		0.005		5	0.260	529.70	1003.93	101.47	116.27	0.052	5.22	8.67
9		0.01		10	0.221	452.36	683.15	64.01	68.31	0.044	7.06	10.00
10		0.02		20	0.181	370.88	473.12	38.48	39.44	0.036	9.64	12.00
11	10	0.05	0.001	50	0.130	270.26	303.40	18.49	18.63	0.026	14.61	16.29
(4)		0.1		100	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	0.020	19.99	21.18
12		0.15		150	0.034	177.53	186.17	7.42	7.42	0.017	23.92	25.09
13		0.2		200	0.075	159.33	165.52	5.88	5.88	0.015	27.09	28.14
14	2				0.237	49.46	72.75	7.54	7.93	0.237	6.56	9.09
(1)	10	0.1	0.01	10	0.281	66.05	78.71	9.46	9.56	0.056	6.93	8.23
15	20				0.289	77.79	83.89	10.28	10.33	0.029	7.57	8.61
16	2				0.093	186.93	212.62	9.52	9.57	0.093	19.64	22.21
(4)	10	0.1	0.001	100	0.099	207.51	220.30	10.38	10.40	0.020	19.99	21.18
17	20				0.100	219.93	230.48	10.71	10.72	0.010	20.54	21.50
18	2				0.550	25.97	118.50	13.60	25.47	0.550	1.91	4.65
19	10	0.01	0.1	0.1	0.909	54.18	126.23	26.90	36.34	0.182	2.01	3.47
20	20				1.073	75.72	145.45	36.36	45.12	0.107	2.08	3.22

Как видно из таблицы, несмотря на принципиальное различие зависимостей (1.1) и (1.3) и совершенно разную форму решений для первой и второй постановок, в ряде случаев размеры линз, определенные на основе этих различных предпосылок, весьма близки, что дает основание сделать некоторые общие заключения о влиянии тех или иных параметров на размеры линз.

1) При фиксированном значении параметра $\Delta\rho$, определяющего соотношение плотностей пресных и соленых вод, с уменьшением ε_1° происходит увеличение размеров линзы, причем главным образом — вширь (фиг. 4). Если зафиксировать k , то уменьшение ε_1° происходит за счет уменьшения коэффициента испарения ε ; при этом как бы возникает дополнительный подпор по отношению к водам, фильтрующимся из канала. Если же уменьшение ε_1° отнеси за счет увеличения k , то в этом случае растекание линзы обусловлено улучшением проницаемости грунта. Интересно проследить за изменением отношения фильтрационных потерь из канала для рассматриваемых случаев подпертой фильтрации к потерям при свободной фильтрации; последние определяются выражением $Q_0 = 2kl$.

В рассматриваемой задаче

$$Q = 2\varepsilon_1 L'_1 = 2\varepsilon_2 l$$

Таким образом, коэффициент уменьшения фильтрационных потерь определяется выражениями

$$\eta = \frac{Q}{Q_0} = \varepsilon_1^\circ \frac{L'_1}{l} = \varepsilon_2^\circ \frac{T}{l}$$

Параметр l пока фиксирован; величина же $L'_1 = L - l$, как видно из таблицы и фиг. 4, растет с уменьшением ε_1° , но значительно медленней, чем убывает ε_1° , т. е. η уменьшается, что означает усиление подпора.

2) С уменьшением $\Delta\rho$, т. е. с ослаблением подпора со стороны соленых вод, наблюдается рост линзы; теперь он в значительной степени происходит также вглубь (фиг. 5). При этом линзы для второй постановки все больше превосходят по размерам, в основном по ширине, соответствующие линзы для первой постановки². Аналогичное явление наблюдается и при увеличении ε_1° ; согласно сказанному выше (1) при этом

¹ Имеется в виду сравнение схем с различными значениями параметра ε° и одинаковыми значениями прочих параметров.

² В смысле фильтрационных расходов в обеих постановках.

происходит ослабление подпора. Таким образом, с количественной стороны подпор можно охарактеризовать параметром $\delta = \Delta\rho / \varepsilon_1$, который назовем коэффициентом подпора. Как видно из таблицы, при одновременном изменении $\Delta\rho$ и ε_1° в одинаковое число раз (при этом δ остается неизменным) отношение ширины линзы $2L$ к ее глубине H , характеризующее степень «вытянутости» линзы, меняется незначительно, особенно в первой постановке (ср. строки 1 и 9, 2 и 10, 3 и 11, 5 и 13). При указанном изменении параметры $\Delta\rho$ и ε_1° оказывают на подпор противоположные и взаимно компенсирующиеся влияния.

Приводим значения параметра ε_2° , соответствующие (в смысле равенства фильтрационных расходов в обеих постановках) некоторым значениям $\Delta\rho$ (параметр ε_1° в этой группе вариантов фиксирован и равен 0.001)

$\Delta\rho = 0.005$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2
$\varepsilon_2^\circ = 0.26$	0.221	0.181	0.130	0.099	0.084	0.075

3) С увеличением ширины канала $2l$ увеличивается и ширина линзы, однако значительно медленней. В этом находит выражение явление, отмеченное С. Ф. Аверьяновым ([1], стр. 150): при подпертой фильтрации возрастание фильтрационных потерь далеко не пропорционально увеличению ширины канала. Это различие в темпах роста проявляется тем заметнее, чем значительней подпор. Так, при $\Delta\rho = 0.1$, $\varepsilon_1^\circ = 0.01$ увеличение $2l$ в отношении 1 : 5 : 10 ($2l = 2, 10, 20$ м) влечет возрастание расходов лишь в отношении 1 : 1.181 : 1.218 (см. таблицу), а при $\Delta\rho = 0.1$, $\varepsilon_1^\circ = 0.001$ — в отношении 1 : 1.068 : 1.081. С этой точки зрения, широкие каналы оказываются экономичнее узких.

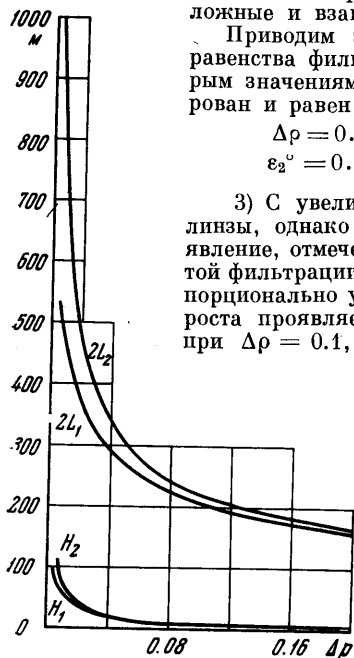
Из таблицы и графиков видно, что в случае значительных подпоров (примерно при $\delta > 10$) линзы, определенные при двух указанных постановках задачи, близки друг к другу по размерам и форме, будучи сильно вытянутыми в стороны; в этом отношении они сходны с линзами в зоне оросительных каналов, описанными Я. К. Левиным [5]. Следовательно, при больших подпорах форма и размеры линзы определяются при прочих равных параметрах, в первую очередь, величиной суммарного испарения со свободной поверхности, а не тем или иным характером изменения интен-

сивности испарения с глубиной. В таких случаях расчеты можно производить по формулам, полученным в первой постановке, с использованием зависимости (1.1); в этой зависимости коэффициент ε должен означать интенсивность испарения на глубине, где в основной своей части проходит, выходящаяся, свободная поверхность. Зависимость (1.3) в этом отношении менее удобна, так как коэффициенту ε в ней трудно дать надлежащую физическую интерпретацию. Если, например, принять за ε интенсивность испарения у поверхности земли в наиболее крутой части свободной поверхности, то определенная, согласно (1.3), интенсивность испарения на больших глубинах окажется, как отмечалось в п. 2, сильно заниженной, а размеры линзы вследствие этого будут преувеличены.

Поступило 21 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Костяков А. Н., Фаворин Н. Н., Аверьянов С. Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. Изд-во АН СССР, 1956.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гос. техиздат, 1952.
3. Эмих В. Н. Фильтрация с полосы при наличии соленых подпорных вод. ПМТФ, 1962, № 2.
4. Эмих В. Н. К задаче о линзе пресных вод при фильтрации из канала. Тр. Ташкентск. ун-та им. В. И. Ленина, 1964, вып. 265.
5. Левин Я. К. Использование фильтрационных вод в зоне оросительных каналов для водоснабжения. Гидротехника и мелиорация, 1962, № 1.



Фиг. 5