НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О СФЕРИЧЕСКОМ ПОДВЕСЕ

А. К. НИКИТИН, В. С. ХАПИЛОВА

(Ростов-на-Дону)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся движение несжимаемой вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами, в зазор между которыми через одно отверстие жидкость подается, а через другое — отводится.

Отверстия заменяются источником и стоком, после чего граничные условия записываются через дельта-функцию. Дельта-функция приближенно разлагается в конечный ряд по полиномам Лежандра. В зависимости от числа членов этот ряд представляет отверстия различных размеров. Решение задачи ищется разложением искомой функции в ряд по степеням числа Рейнольдса, коэффициенты которого разлагаются в ряды по присоединенным функциям Лежандра первого рода. Находятся поле скоростей, а также сила воздействия на внутреннюю сферу. Проводятся численные расчеты для отверстий, половина угла раствора которых равна 6°.

§ 1. Постановка задачи и ее решение. В нелинейной постановке рассматривается установившееся движение несжимаемой вязкой жидкости между двумя концентрическими сферами A_1 и A_2 радиусов r_1 и r_2 $(r_1 < r_2)$.

В сфере A_2 находятся два диаметрально расположенных отверстия: отверстие S_1, через которое подводится жидкость, и отверстие S_2, через которое она отводится.

Предполагая движение жидкости осесимметричным и пренебрегая массовыми силами, запишем уравнения движения в сферической системе координат [1]

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r^2+v_\theta^2}{2}\right)-\frac{D\psi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\nu}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial\theta}\\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_r^2+v_\theta^2}{2}\right)-\frac{D\psi}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\theta}=-\frac{\nu}{\sin\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial r}\end{gathered}\qquad(1.1)$$

$$\left(D=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),\quad v_r=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

Здесь D — оператор Стокса; ψ — функция тока; $v_r v_\theta$ — компоненты скорости.

Введем новое независимое переменное, полагая $\cos\theta=\tau$.

Отверстия конечных размеров, через которые жидкость поступает в пространство между сферами, заменяем источником и стоком. После этого граничные условия запишутся так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\tau}=0\quad\text{при } r=r_1\\ \frac{\partial\psi}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\tau}=-v_r r_2^2=r_2^2 v_0\,[\delta(\theta)-\delta(\theta-\pi)]\quad\text{при } r=r_2\end{gathered}\qquad(1.2)$$

где v_0 — постоянная, имеющая размерность скорости, которую можно определить из условия постоянства расхода через горизонтальное сечение при $\theta={}^1/_2\pi$; δ — дельта-функция.

Воспользуемся приближенным тригонометрическим представлением дельта-функции, данным в работе [2],

$$\delta\approx\delta_m=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}\sigma_k\cos k\theta\right]\qquad\left(\sigma_k=\frac{1}{\pi k/m}\sin\frac{\pi k}{m}\right)$$

Принимая во внимание это представление и заменяя $\cos n\theta$ рядами полиномов Лежандра по формуле

$$\cos n\theta = \frac{2^{n-1}n!}{(2n-1)!!} P_n(\cos\theta) - n\sum_{k=1}^{\infty}(2n-4k+1) \times$$
$$\times \frac{2^{n-2k-1}(n-k-1)!(2k-3)!!}{(2n-2k+1)!!k!} P_{n-2k}(\cos\theta)$$

последнее равенство из условий (1.2) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = r_2^2 v_0 \sum_{k=1}^{1/_2 m} \sigma_{2k-1} \sum_{n=1}^{k} \frac{(4n-1)}{\pi}\left[\frac{(2k-2n+2)(2k-2n+4)\ldots(2k+2n-2)}{(2k-2n+1)(2k-2n+3)\ldots(2k+2n-1)} -\right.$$
$$\left. - \frac{(2k-2n)(2k-2n+2)\ldots(2k+2n-4)}{(2k-2n-1)(2k-2n+1)\ldots(2k+2n-3)}\right] P_{2n-1}(\tau) = r_2^2 v_0 \sum_{n=1}^{1/_2 m} C_{2n-1}P_{2n-1}(\tau)$$

Вводим безразмерные величины (1.3)

$$r^\circ = \frac{r}{r_1}, \quad R = \frac{r_1 v_0}{\nu}, \quad v_r = v_0 v(r^\circ, \tau); \quad v_\theta = v_0 w(r^\circ, \tau)$$
$$p = \rho v_0^2 P(r^\circ, \tau), \qquad \psi = r_1^2 v_0 \Phi(r^\circ, \tau)$$

Здесь ρ — плотность; p — гидродинамическое давление; Φ — функция тока, через которую безразмерные компоненты скорости запишутся следующим образом:

$$v(r,\tau) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}, \qquad w(r,\tau) = -\frac{1}{r\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс $^\circ$ у безразмерной величины r° опускается. Исключая из уравнений (1.1) при помощи перекрестного дифференцирования давление и переходя к безразмерным переменным, получим дифференциальное уравнение для функции тока

$$DD\Phi = R\left\{\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial D\Phi}{\partial\tau} - \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{\partial D\Phi}{\partial r}\right) + \frac{2D\Phi}{r^3(1-\tau^2)}\left[(1-\tau^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + r\tau\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]\right\}$$
$$\left(D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\tau^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) \qquad (1.4)$$

Граничные условия (1.2) в безразмерной форме имеют вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = 0 \quad \text{при } r = 1$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = b^2\sum_{n=1}^{1/_2 m} C_{2n-1}P_{2n-1}(\tau) \quad \text{при } r = \frac{r_2}{r_1} = b \qquad (1.5)$$

Решение уравнения (1.4) при условиях (1.5) будем искать в виде

$$\Phi(r,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} R^{2k}\sum_{i=1}^{1/_2 m}\Phi_{2k,\,2i-1}(r)\sqrt{1-\tau^2}P^1_{2i-1}(\tau) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1}\sum_{i=1}^{1/_2 m}\Phi_{2k-1,\,2i}(r)\sqrt{1-\tau^2}P^1_{2i}(\tau)$$
$$\left(P_n^1(\tau) = -(1-\tau^2)^{1/2}\frac{dP_n(\tau)}{d\tau}\right) \qquad (1.6)$$

Здесь $P_n^1(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра.

Подставляя выражение для функции $\Phi(r,\tau)$ по формуле (1.6) в уравнение (1.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числа

Рейнольдса R и P_i^1, получим систему уравнений для функций $\Phi_{q,n}(r)$:

$$L_{0i}L_{0i}\Phi_{2k,\,2i-1}(r)=\sum_{\varkappa=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{j=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{\beta=1}^{k}\left\{\left[\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}}{dr}L_{1j}\Phi_{2\beta-1,\,2j}2j(2j-1)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}L_{0\varkappa}\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}\right)\Phi_{2\beta-1,\,2j}2j(2j+1)\right]\eta_1+$$
$$+\left[\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi_{2\beta-1,\,2\varkappa}}{dr}L_{0j}\Phi_{2k-2\beta,\,2j-1}(2j-1)(2j-2)-\right.$$
$$\left.-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}L_{1\varkappa}\Phi_{2\beta-1,\,2\varkappa}\right)\Phi_{2k-2\beta,\,2j-1}2j(2j-1)\right]\eta_2-$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}L_{0j}\Phi_{2k-2\beta,\,2j-1}\frac{d\Phi_{2\beta-1,\,2\varkappa}}{dr}\eta_3-\frac{2}{r_2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}}{dr}L_{1j}\Phi_{2\beta-1,\,2j}\eta_4\right\}\qquad(1.7)$$

$$L_{1i}L_{1i}\Phi_{2k-1,\,2i}(r)=\sum_{\varkappa=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{j=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{\beta=1}^{k}\left\{\left[\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}}{dr}L_{0j}\Phi_{2\beta-2,\,2j-1}(2j-1)(2j-2)-\right.\right.$$
$$\left.-\Phi_{2\beta-2,\,2j-1}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}L_{0\varkappa}\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}\right)2j(2j-1)\right]\eta_5-$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta,\,2\varkappa-1}}{dr}L_{0j}\Phi_{2\beta-2,\,2j-1}\eta_6\right\}+\sum_{\varkappa=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{j=1}^{{}^1\!/_2 m}\sum_{\beta=1}^{k-1}\left\{\left[\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta-1,\,2\varkappa}}{dr}\times\right.\right.$$
$$\left.\times L_{1j}\Phi_{2\beta-1,\,2j}2j(2j-1)-\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}L_{1\varkappa}\Phi_{2k-2\beta-1,\,2\varkappa}\right)\Phi_{2\beta-1,\,2j}2j(2j+1)\right]\eta_7-$$
$$\left.-\frac{2}{r^2}\frac{d\Phi_{2k-2\beta-1,\,2\varkappa}}{dr}L_{1j}\Phi_{2\beta-1,\,2j}\eta_8\right\}\qquad(i=1,2,\ldots,{}^1\!/_2 m)$$
$$L_{0i}=\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2i(2i-1)}{r^2}(\ldots),\qquad L_{1i}=\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2i(2i+1)}{r^2}(\ldots)$$

Коэффициенты $\eta_1,\ldots,\eta_8$ определяются равенствами

$$\eta_1=(4l-3)\sum_{k_1=0}^{\min(2j,\,2l-2)}\frac{a_{2i-2j+k_1-2}a_{k_1}a_{2j-k_1}}{a_{2i+k_1-2}(4i+2k_1-3)}-\left(a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!}\right)$$
$$(l=i-j+k_1,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$
$$-(4l-3)\sum_{k_1=0}^{\min(2j,\,2l-2)}\frac{a_{2i-2j+k_1}a_{k_1}a_{2j-k_1}}{a_{2i+k_1}(4i+2k_1+1)}$$
$$(l=i-j+k_1+1,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$

$$\eta_2=(4l-1)\sum_{k_1=0}^{\min(2l-1,\,2j-1)}\frac{a_{2i-2j+k_1-1}a_{k_1}a_{2j-k_1-1}}{a_{2i+k_1-2}(4i+2k_1-3)}-$$
$$(l=i-j+k_1,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$
$$-(4l-1)\sum_{k_1=0}^{\min(2l-1,\,2j-1)}\frac{a_{2i-2j+k_1+1}a_{k_1}a_{2j-k_1-1}}{a_{2i+k_1}(4i+2k_1+1)}$$
$$(l=i-j+k_1+1,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$

$$\eta_3=(4l-1)\sum_{n=2}^{j}(4n-5)\sum_{k_1=0}^{\min(2l-1,\,2n-3)}\frac{a_{2i-2n+k_1+1}a_{k_1}a_{2n-k_1-3}}{a_{2i+k_1-2}(4i+2k_1-3)}-$$
$$(l=i-n+k_1+1,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$
$$-(4l-1)\sum_{n=2}^{j}(4n-5)\sum_{k_1=0}^{\min(2l-1,\,2n-3)}\frac{a_{2i-2n+k_1+3}a_{k_1}a_{2n-k_1-3}}{a_{2i+k_1}(4i+2k_1+1)}$$
$$(l=i-n+k_1+2,\quad 1\leqslant l\leqslant\varkappa)$$

$$\eta_4 = (4l-3)\sum_{n=1}^{j}(4n-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+1,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2n-2)}\frac{a_{2i-2n+k_1}a_{k_1}a_{2n-k_1-2}}{a_{2i+k_1-2}(4i+2k_1-3)} - (4l-3)\sum_{n=1}^{j}(4n-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+2,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2n-2)}\frac{a_{2i-2n+k_1+2}a_{k_1}a_{2n-k_1-2}}{a_{2i+k_1}(4i+2k_1+1)}$$

$$\eta_5 = (4l-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-j+k_1+1,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2j-1)}\frac{a_{2i-2j+k_1}a_{k_1}a_{2j-k_1-1}}{a_{2i+k_1-1}(2k_1+4i-1)} - (4l-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-j+k_1+2,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2j-1)}\frac{a_{2i-2j+k_1+2}a_{k_1}a_{2j-k_1-1}}{a_{2i+k_1+1}(4i+2k_1+3)}$$

$$\eta_6 = (4l-3)\sum_{n=2}^{j}(4n-5)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+2,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2n-3)}\frac{a_{2i-2n+k_1+2}a_{k_1}a_{2n-k_1-3}}{a_{2i+k_1-1}(4i+2k_1-1)} - (4l-3)\sum_{n=3}^{j}(4n-5)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+3,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-2,\,2n-3)}\frac{a_{2i-2n+k_1+4}a_{k_1}a_{2n-k_1-3}}{a_{2i+k_1+1}(4i+2k_1+3)}$$

$$\eta_7 = (4l-1)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-j+k_1,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-1,\,2j)}\frac{a_{2i-2j+k_1-1}a_{k_1}a_{2j-k_1}}{a_{2i+k_1-1}(4i+2k_1-1)} - (4l-1)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-j+k_1+1,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-1,\,2j)}\frac{a_{2i-2j+k_1+1}a_{k_1}a_{2j-k_1}}{a_{2i+k_1+1}(4i+2k_1+3)}$$

$$\eta_8 = (4l-1)\sum_{n=1}^{j}(4n-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+1,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-1,\,2n-2)}\frac{a_{2i-2n+k_1+1}a_{k_1}a_{2n-k_1-2}}{a_{2i+k_1-1}(4i+2k_1-1)} - (4l-1)\sum_{n=1}^{j}(4n-3)\sum_{\substack{k_1=0\\(l=i-n+k_1+2,\ 1\leqslant l\leqslant \varkappa)}}^{\min(2l-1,\,2n-2)}\frac{a_{2i-2n+k_1+3}a_{k_1}a_{2n-k_1-2}}{a_{2i+k_1+1}(4i+2k_1+3)}$$

При преобразованиях были использованы следующие формулы:

$$\sum_{k_1=0}^{s}\frac{a_{s-k_1}a_{k_1}a_{n-k_1}}{a_{n+s-k_1}}\left(\frac{2n+2s-4k_1+1}{2n+2s-2k_1+1}\right)P_{n+s-2k_1}(\tau) = P_n(\tau)\,P_s(\tau) \qquad (s\leqslant n)$$

$$\frac{dP_{2j}}{d\tau} = \sum_{l=1}^{j}(4l-1)\,P_{2l-1}(\tau), \qquad \frac{dP_{2j-1}}{d\tau} = \sum_{l=1}^{j}(4l-3)\,P_{2l-2}(\tau)$$

$$(2j+1)\,P_j(\tau) = \frac{dP_{j+1}}{d\tau} - \frac{dP_{j-1}}{d\tau}$$

Граничные условия для функций $\Phi_{q,n}(r)$ будут иметь вид

$$\Phi_{2k,\,2i-1} = \Phi_{2k-1,\,2i} = 0, \qquad \frac{d\Phi_{2k,\,2i-1}}{dr} = \frac{d\Phi_{2k-1,\,2i}}{dr} = 0 \qquad \text{при } r=1$$

$$(k=0,1,2,\ldots) \qquad (i=1,2,\ldots,{}^1\!/_2 m)$$

$$\frac{d\Phi_{2k,\,2i-1}}{dr} = \frac{d\Phi_{2k-1,\,2i}}{dr} = 0, \quad \Phi_{2k-1,\,2i} = \Phi_{2k,\,2i-1} = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\Phi_{0,\,2i-1} = \frac{b^2}{2i(2i-1)} C_{2i-1} \quad \text{при } r = b \qquad (1.8)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, {}^1\!/_2 m)$$

Решая систему (1.7) при граничных условиях (1.8), получаем

$$\Phi_{2k,\,2i-1}(r) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} T_{2k,\,2i-1}(r) & r^{-2i+1} & r^{-2i+3} & r^{2i} & r^{2i+2} \\ T_{2k,\,2i-1}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ T'_{2k,\,2i-1}(1) & (-2i+1) & (-2i+3) & 2i & (2i+2) \\ T_{2k,\,2i-1}(b) - \Phi_{2k,\,2i-1}(b) & b^{-2i+1} & b^{-2i+3} & b^{2i} & b^{2i+2} \\ T'_{2k,\,2i-1}(b) & (-2i+1)\,b^{-2i} & (-2i+3)\,b^{-2i+2} & 2ib^{2i-1} & (2i+2)\,b^{2i+1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4b^{4i+1} + 4b^{-4i+3} - (4i-1)^2 b^4 + 2(4i+1)(4i-3)\,b^2 - (4i-1)^2$$

$$T_{2k,\,2i-1}(r) = \frac{1}{2(16i^2-1)} \left[r^{2i+2} \int_b^r x^{-2i+1} F_{2k,\,2i-1}\,dx - r^{-2i+1} \int_1^r x^{2i+2} F_{2k,\,2i-1}\,dx \right] +$$

$$+ \frac{1}{2(4i-3)(4i-1)} \left[r^{-2i+3} \int_b^r x^{2i} F_{2k,\,2i-1}\,dx - r^{2i} \int_1^r x^{-2i+3} F_{2k,\,2i-1}\,dx \right]$$

Здесь штрихи означают производную по r.

Функции $F_{2k,\,2i-1}$ представляют собой правые части первой группы уравнений системы (1.7)

$$\Phi_{2k-1,\,2i}(r) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} T_{2k-1,\,2i}(r) & r^{-2i} & r^{-2i+2} & r^{2i+1} & r^{2i+3} \\ T_{2k-1,\,2i}(1) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ T'_{2k-1,\,2i}(1) & (-2i) & (-2i+2) & (2i+1) & (2i+3) \\ T_{2k-1,\,2i}(b) & b^{-2i} & b^{-2i+2} & b^{2i+1} & b^{2i+3} \\ T'_{2k-1,\,2i}(b) & (-2i)\,b^{-2i-1} & (-2i+2)\,b^{-2i+1} & (2i+1)\,b^{2i} & (2i+3)\,b^{2i+2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = 4b^{4i+3} - (4i+1)^2 b^4 + 2(4i+3)(4i-1)\,b^2 - (4i+1)^2 + 4b^{-4i+1}$$

$$T_{2k-1,\,2i}(r) = \frac{1}{2(4i+1)(4i+3)} \left[r^{2i+3} \int_b^r x^{-2i} F_{2k-1,\,2i}(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - r^{-2i} \int_1^r x^{2i+3} F_{2k-1,\,2i}(x)\,dx \right] + \frac{1}{2(16i^2-1)} \left[r^{-2i+2} \int_1^r x^{2i+1} F_{2k-1,\,2i}(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - r^{2i+1} \int_b^r x^{-2i+2} F_{2k-1,\,2i}(x)\,dx \right]$$

Функции $F_{2k-1,\,2i}$ представляют собой правые части второй группы уравнений системы (1.7).

Подставляя полученные выражения в формулу (1.6), получаем решение поставленной задачи.

§ 2. Воздействие жидкости на внутреннюю сферу. Приведем силы воздействия со стороны жидкости на сферу A_1 к центру O. В силу симметрии задачи проекции главного вектора этих сил на оси x и y будут равны нулю. Проекция главного вектора сил на ось z будет определяться по формуле в размерных величинах

$$N_z = 2\pi r_1^2 \int_0^\pi \left(-p\cos\theta - \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta\right)_{r=r_1} \sin\theta d\theta$$

Интегрируя по частям, получим

$$N_z = -2\pi r_1^2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{4}\cos 2\theta \frac{\partial p}{\partial\theta} + \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin^2\theta\right)_{r=r_1} d\theta$$

Значение $dp / d\theta$ при $r = r_1$ определим из второго уравнения (1.1)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{r=r_1} = -\left(\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial r}\right)_{r=r_1}$$

После подсчетов получим

$$N_z = -2\pi r_1 v_0 \mu \sum_{k=0}^{\infty} R^{2k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{{}^1/_2 m}\frac{d^3\Phi_{2k,\,2i-1}}{dr^3} - \frac{2}{3}\frac{d^3\Phi_{2k,\,1}}{dr^3} + \frac{4}{3} + \frac{d^2\Phi_{2k,\,1}}{dr^2}\right]_{r=1} \quad (2.1)$$

Для $m / 2 = 25$ были проведены численные расчеты. В граничных условиях (1.8) постоянные C_{2i-1} будут иметь при этом значения:

$C_1=0.02297208$,	$C_3=0.05332655$,	$C_5=0.08302343$,	$C_7=0.1116969$,	$C_9=0.1389936$
$C_{11}=0.1645775$,	$C_{13}=0.1881332$,	$C_{15}=0.2093666$,	$C_{17}=0.2280269$,	$C_{19}=0.2438708$
$C_{21}=0.2567034$,	$C_{23}=0.2663602$,	$C_{25}=0.2727114$,	$C_{27}=0.2756615$,	$C_{29}=0.2751478$
$C_{31}=0.2711362$,	$C_{33}=0.2636157$,	$C_{35}=0.2525876$,	$C_{37}=0.2380486$,	$C_{39}=0.2199605$
$C_{41}=0.1981906$,	$C_{43}=0.1723819$,	$C_{45}=0.1416064$,	$C_{47}=0.1030628$,	$C_{49}=0.04037561$

При таком выборе числа m отверстия S_1 и S_2 представляют собой уже не точечные источник и сток, а реальные отверстия, половина угла раствора которых равна 6°. Считая зазор между сферами малым и ограничиваясь вторым приближением, вычисляем функции $\Phi_{0,\,2i-1}$, $\Phi_{1,\,2i}$, $\Phi_{2,\,2i-1}$.

Тогда для подъемной силы получается следующее выражение:

$$N_z \approx \frac{b^2}{\alpha^3}\pi r_1 v_0 \mu\, [0.3590 + 0{,}0002388 R^{\circ 2}] \quad (2.2)$$

Здесь α — малая величина.

$$\alpha = \frac{r_2 - r_1}{r_1};\ R^\circ = \frac{\delta^\circ v_0}{\nu};\ \delta^\circ = r_2 - r_1$$

Из условия постоянства расхода жидкости через горизонтальное сечение при $\theta = {}^1/_2\pi$ находится постоянная v_0

$$v_0 = \frac{Q}{0.03064\pi r_2^2} \ (Q\text{—секундный объемный расход}) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем

$$N_z \approx 11.39\frac{\mu Q r_1^2}{\delta^{\circ 3}}[1 + 0.0006843 R^{\circ 2}]$$

Поступило 27 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, 1961.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Физматгиз, 1959.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Изд. иностр. лит., 1952.