

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СТРУЙНОЙ ЗАВЕСЫ

Д. С. ЦЕЛЬНИК

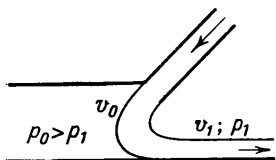
(Москва)

В работе Г. Ю. Степанова [1] рассмотрена модель струйной завесы аппарата на воздушной подушке (фиг. 1). Ниже изучается несколько более общая картина течения (фиг. 2). В точке z_0 помещен изолированный равновесный вихрь, модуль скорости на BHC постоянен, скорости на HM непрерывны. Жидкость идеальна, несжимаема, невесома. Угол наклона сопла к стенке CE для простоты положен равным 90° .

Автору представляется, что рассматриваемая модель является идеализированной схемой течения, фотография которого приведена в [2] на фиг. 10.

§ 1. Пусть в плоскости параметрического переменного u области течения соответствует прямоугольник $CBAE$ (фиг. 3). Безразмерная комплексная скорость как функция от u может быть записана в виде ¹

$$\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = e^{\alpha u + \beta} \frac{\sigma(u-m) \sigma(u+u_0) \sigma(u+\bar{u}_0)}{\sigma(u+m) \sigma(u-u_0) \sigma(u-\bar{u}_0)} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Из условий в точках C, B, E, D, A получаем

$$\beta = 0, \quad \alpha = \frac{i}{\omega_2} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\eta_2}{i} \{m - (u_0 + \bar{u}_0)\} \right]$$

$$\frac{v_1}{v_0} = \exp [\omega_1 - 2 \{m - (u_0 + \bar{u}_0)\}] \quad (1.2)$$

$$\frac{v_\infty}{v_0} = e^{\alpha d} \left| \frac{\sigma(\omega_2 + d - m) \sigma(\omega_2 + d + u_0) \sigma(\omega_2 + d + \bar{u}_0)}{\sigma(\omega_2 + d + m) \sigma(\omega_2 + d - u_0) \sigma(\omega_2 + d - \bar{u}_0)} \right|$$

Производная комплексного потенциала dw/du есть комплексная скорость течения в прямоугольнике от источника мощностью $q = bv_\infty$, стока той же мощности и вихря с циркуляцией Γ , помещенных в точках D, E, u_0 соответственно. Записывая отдельно выражения для скоростей течений в прямоугольнике от источника-стока и от вихря

$$\left(\frac{dw}{du} \right)_1 = A_1 \frac{\sigma(u) \sigma(u - \omega_2) \sigma(u - \omega_1 - \omega_2)}{\sigma(u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2 - d) \sigma(u - \omega_2 + d)}$$

$$\left(\frac{dw}{du} \right)_2 = A_2 \frac{\sigma(u) \sigma(u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2) \sigma(u + \omega_1 + \omega_2)}{\sigma(u - u_0) \sigma(u - \bar{u}_0) \sigma(u + u_0) \sigma(u + \bar{u}_0)}$$

и складывая их, получим

$$\frac{dw}{du} = A_1 \sigma(u) \sigma(u - \omega_2) \sigma(u - \omega_1 - \omega_2) \times \left(\gamma = \frac{A_2}{A_1} \right)$$

$$\times \frac{\left[-\gamma \sigma^2(u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2 - d) \sigma(u - \omega_2 + d) \exp[2u(\eta_1 + \eta_2)] \right]}{\sigma(u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2 + d) \sigma(u - \omega_2 - d) \sigma(u - u_0) \sigma(u - \bar{u}_0) \sigma(u + u_0) \sigma(u + \bar{u}_0)} \quad (1.3)$$

Из условий $dw/du = 0$ при $u = \pm m, \pm ih$ имеем

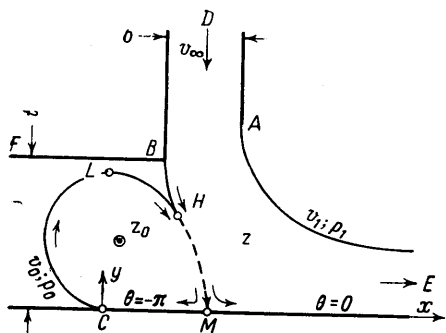
$$\gamma = \frac{\sigma(m - u_0) \sigma(m - \bar{u}_0) \sigma(m + u_0) \sigma(m + \bar{u}_0) \exp[-2m(\eta_1 + \eta_2)]}{\sigma^2(m - \omega_1) \sigma(m - \omega_2 - d) \sigma(m - \omega_2 + d)} \quad (1.4)$$

$$\frac{\sigma(m - u_0) \sigma(m - \bar{u}_0) \sigma(m + u_0) \sigma(m + \bar{u}_0) \exp[-2m(\eta_1 + \eta_2)]}{\sigma^2(m - \omega_1) \sigma(m - \omega_2 - d) \sigma(m - \omega_2 + d)} =$$

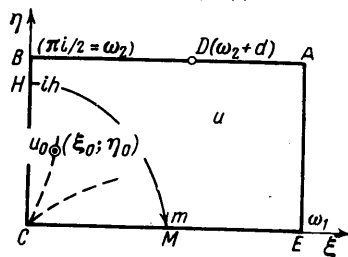
$$= \frac{\sigma(ih - u_0) \sigma(ih - \bar{u}_0) \sigma(ih + u_0) \sigma(ih + \bar{u}_0) \exp[-2ih(\eta_1 + \eta_2)]}{\sigma^2(ih - \omega_1) \sigma(ih - \omega_2 - d) \sigma(ih - \omega_2 + d)} \quad (1.5)$$

¹ Обозначения эллиптических функций соответствуют принятым в [3].

Записывая последнее уравнение через зэта-функции, можно убедиться, что (1.5) есть одно действительное соотношение, связывающее величины h, m (при фиксированных ω_1, u_0, d). Заметим, что очевидные корни $m = \pm ih$ уравнения (1.5) для рассматриваемой задачи не подходят.



Фиг. 2



Фиг. 3

Часто удобнее использовать вместо (1.5) другое уравнение, равносильное, за исключением, быть может, корней $m = \pm ih$. Чтобы получить его, заметим, что если γ найдено из (1.4) и выполнено (1.5), но $m \neq \pm ih$, то необходимо

$$\begin{aligned} & \sigma(u - u_0) \sigma(u + u_0) \sigma(u - \bar{u}_0) \sigma(u + \bar{u}_0) - \\ & - \gamma^2 (u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2 - d) \sigma(u - \omega_2 + d) \exp[2u(\eta_1 + \eta_2)] \equiv \\ & \equiv \mu \sigma(u - m) \sigma(u + m) \sigma(u - ih) \sigma(u + ih) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где постоянная μ определена однозначно. Теперь в (1.6) положим $u = \omega_1$, а затем $u = u_0$, приравнявая два получающихся различных выражения для μ , имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(\omega_1 - u_0) \sigma(\omega_1 - \bar{u}_0) \sigma(\omega_1 + u_0) \sigma(\omega_1 + \bar{u}_0)}{\sigma(\omega_1 - m) \sigma(\omega_1 + m) \sigma(\omega_1 - ih) \sigma(\omega_1 + ih)} = \\ & = -\gamma \frac{\sigma^2(u_0 - \omega_1) \sigma(u_0 - \omega_2 - d) \sigma(u_0 - \omega_2 + d) \exp[2u_0(\eta_1 + \eta_2)]}{\sigma(u_0 - m) \sigma(u_0 + m) \sigma(u_0 - ih) \sigma(u_0 + ih)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассматривая функцию

$$\psi(u) = \frac{\sigma(u - u_0) \sigma(u - \bar{u}_0) \sigma(u + u_0) \sigma(u + \bar{u}_0) - \gamma^2 (u - \omega_1) \sigma(u - \omega_2 - d) \sigma(u - \omega_2 + d) \exp[2u(\eta_1 + \eta_2)]}{\sigma(u - m) \sigma(u + m) \sigma(u - ih) \sigma(u + ih)}.$$

и замечая, что $\psi(u_0) = \psi(-u_0)$, а также что (1.7) означает попросту $\psi(u_0) = \psi(\omega_1)$, можно убедиться, что из (1.4) и (1.7) необходимо следует (1.5). Приведем (1.7) для частного случая $d = \omega_1$ (стенка DA снята) в записи через зэта-функции

$$\frac{\vartheta_3(\pi m / 2\omega_1) \vartheta_3(\pi i h / 2\omega_1)}{\vartheta_2(\pi m / 2\omega_1) \vartheta_2(\pi i h / 2\omega_1)} = \frac{\vartheta_3(\pi u_0 / 2\omega_1) \vartheta_3(\pi \bar{u}_0 / 2\omega_1)}{\vartheta_2(\pi u_0 / 2\omega_1) \vartheta_2(\pi \bar{u}_0 / 2\omega_1)} \quad (1.8)$$

В (1.8) корней $m = \pm ih$ не содержится.

Условие равновесия вихря $\text{Res}[(dw/du)(dw/dz)] = 0$ в точке $u = u_0$ приводит к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} & \alpha + \zeta(u_0) + 2\zeta(u_0 - m) + \zeta(u_0 - \omega_2) + \zeta(u_0 - \omega_1 - \omega_2) + \\ & + \zeta(u_0 - ih) + \zeta(u_0 + ih) - 2\zeta(u_0 - \bar{u}_0) - \zeta(u_0 - \omega_1) - \\ & - \zeta(u_0 - \omega_2 - d) - \zeta(u_0 - \omega_2 + d) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

В частном случае $d = \omega_1$ имеем

$$\alpha + 2\xi(u_0 - m) - 2\xi(u_0 - \bar{u}_0) + \xi(u_0 - ih) + \xi(u_0 + ih) + \frac{K}{\omega_1} \left[\frac{\operatorname{sn}(Ku_0/\omega_1) \operatorname{dn}(Ku_0/\omega_1)}{\operatorname{cn}(Ku_0/\omega_1)} + \frac{\operatorname{cn}(Ku_0/\omega_1)}{\operatorname{sn}(Ku_0/\omega_1) \operatorname{dn}(Ku_0/\omega_1)} \right] = 0 \quad (1.10)$$

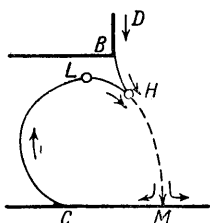
Выражение для производной dz/du таково:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{du} = & \frac{b}{\pi} e^{ad} \frac{\sigma(2d)\sigma(\omega_2 - \omega_1 + d)}{\sigma(\omega_2 + d)\sigma(d)\sigma(d - \omega_1)} \left| \frac{\sigma(\omega_2 + d - m)\sigma(\omega_2 + d + u_0)\sigma(\omega_2 + d + \bar{u}_0)}{\sigma(\omega_2 + d + m)\sigma(\omega_2 + d - u_0)\sigma(\omega_2 + d - \bar{u}_0)} \right| \times \\ & \times \frac{\sigma(\omega_1 - u_0)\sigma(\omega_1 - \bar{u}_0)\sigma(\omega_1 + u_0)\sigma(\omega_1 + \bar{u}_0)}{\sigma(\omega_1 - m)\sigma(\omega_1 + m)\sigma(\omega_1 - ih)\sigma(\omega_1 + ih)} \times \\ & \times e^{-au} \frac{\sigma(u)\sigma(u - \omega_2)\sigma(u - \omega_1 - \omega_2)\sigma^2(u + m)\sigma(u - ih)\sigma(u + ih)}{\sigma(u - \omega_1)\sigma(u - \omega_2 - d)\sigma(u - \omega_2 + d)\sigma^2(u + u_0)\sigma^2(u + \bar{u}_0)} \quad (1.11) \end{aligned}$$

При выводе для μ использовано выражение из (1.7) слева, постоянная A_1 определена из условия расхода в точке D .

Для относительного избыточного давления $\chi = (p_0 - p_1)/(p_* - p_1)$, где p_* — давление заторможенного потока, получаем

$$\chi = 1 - \exp[-2\omega_1 + 4(m - 2\xi_0)] \quad (1.12)$$



Фиг. 4

§ 2. Пусть фиксированы величины ω_1 и d , тогда в уравнениях (1.5) или (1.) и (1.9) остаются четыре неизвестных (m, h, ξ_0, η_0), что на единицу больше числа имеющихся действительных уравнений. Произвол в задании одного из неизвестных означает, что при одном и том же соотношении b/t (фиг. 2) размеры «зоны вихря» НСМ не определены однозначно. Если

«зона вихря» вырождается в точку, то предельное течение есть течение без вихря, т. е. — по модели фиг. 1. В связи с этим рассмотрим сначала случай «малого вихря».

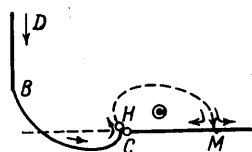
Совокупность значений $m = h = u_0 = 0$ соответствует течению без вихря, поэтому для получения «малого вихря» будем считать, что m, h, u_0 малы. Обозначим

$$u_0/m = \lambda = \rho e^{i\theta}, \quad h/m = s$$

Уравнения (1.9) и (1.7) в окрестности $h = m = u_0 = 0$ могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda - 1} + \frac{2\lambda}{\lambda^2 + s^2} - \frac{2}{\lambda - \bar{\lambda}} + m + O(m^2) = 0 \quad (2.1)$$

$$\lambda^2 + s^2 = (1 - \bar{\lambda}^2) [1 + O(m^2)] \quad (2.2)$$



Фиг. 5

Без учета членов порядка m и выше, получаем $\lambda^* = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3/5})$. Оставляя теперь в (2.1) и (2.2) члены $O(m)$, найдем

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* \pm (7/50) \sqrt{m} + \dots, \quad \cos \theta = \cos \theta^* \pm (13/40) \sqrt{m} + \dots, \\ s^2 &= (s^*)^2 \mp (7^2/25 \sqrt{10}) \sqrt{m} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого достаточно малого m ($m \neq 0$) получаем по две возможные совокупности (u_0, h) ; в прямоугольнике имеем две выходящие из начала координат ветви $u_0 = u_0(m)$ — пунктирные кривые на фиг. 3. Существование двух решений в некоторой окрестности λ^*, s^* может быть установлено при помощи [4] (стр. 41, 42).

§ 3. На фиг. 4, 5 показаны две типичные картины течения¹ для частного случая потока бесконечной ширины за стенкой DB ($d = \omega_1 = \infty$); корни системы уравнений (1.8), (1.10), соответствующие фиг. 4 и 5, лежат на разных ветвях. Качественного различия картин течения для корней, лежащих на двух различных ветвях, можно ожидать заранее, так как

$$\arg dz|_u = i(h - 0) = v = v^* \pm f\sqrt{m} + \dots, \quad \text{при } m \rightarrow 0$$

где $v^* \approx 35^\circ$, $f = \text{const}$. Расчеты подтверждают, что на одной из ветвей величина v растет с ростом m , а на другой — уменьшается, принимая значения $v < 0$, тогда получаются картины течения по типу фиг. 4 — такие, которые только и могут подойти для схемы фиг. 2.

В случае $d = \omega_1$, используя разложения (1.8), (1.10) и (1.11) по степеням $q' = \exp(-\pi i \omega_1 / \omega_2)$, можно найти следующее асимптотическое выражение для относительного избыточного давления χ :

$$\chi \approx 1 - C \left(\frac{t}{b} \right)^2,$$

$$C = \frac{\pi^2}{256 t^{*2}} \exp \{ 8 \{ m^* - (u_0^* + \bar{u}_0^*) \} \}$$

Звездочкой здесь помечены величины, соответствующие некоторой картине течения для $d = \omega_1 = \infty$. Для течения без вихря следует вместо C брать $C_0 = (3\pi/32)^2$; по данным расчетов для картин течения по типу фиг. 4 соотношение $C/C_0 < 1$.

§ 4. Пусть теперь $q = \exp(\pi i \omega_2 / \omega_1) \rightarrow 0$. Разделяя в (1.9) действительную и мнимую части и отбрасывая в разложениях по степеням q члены $O(q)$ и выше, получим (4.1) и (4.2); (4.3) выводится из (1.7). В (4.1) — (4.3) обозначено $X = \pi \xi_0 / \omega_1$, $Y = \pi \eta_0 / \omega_1$, $H = \pi h / \omega_1$, $M = \pi m / \omega_1$

$$1 + \frac{4X}{\pi} - \frac{2M}{\pi} + \frac{\pi}{4\omega_1} \left[\frac{4 \sin X \operatorname{ch} Y}{\sin^2 X + \operatorname{sh}^2 Y} + \frac{2 \sin(X - M)}{\sin^2(1/2 X - 1/2 M) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y)} + \right. \\ \left. + \frac{\sin X}{\sin^2(1/2 X) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y - 1/2 H)} + \frac{\sin X}{\sin^2(1/2 X) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y + 1/2 H)} \right] = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{4 \cos X \operatorname{sh} Y}{\sin^2 X + \operatorname{sh}^2 Y} + \frac{2 \operatorname{sh} Y}{\sin^2(1/2 X - 1/2 M) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y)} - 4 \operatorname{cth} Y + \\ + \frac{\operatorname{sh}(Y - H)}{\sin^2(1/2 X) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y - 1/2 H)} + \frac{\operatorname{sh}(Y + H)}{\sin^2(1/2 X) + \operatorname{sh}^2(1/2 Y + 1/2 H)} = 0 \quad (4.2)$$

$$2 \cos(1/2 M) \operatorname{ch}(1/2 H) = \cos X + \operatorname{ch} Y \quad (4.3)$$

При помощи (4.3) уравнение (4.2) может быть приведено к виду

$$\sum_{i=0}^4 B_i \tau^i = 0 \quad (\tau = \operatorname{sh}^2(1/2 Y))$$

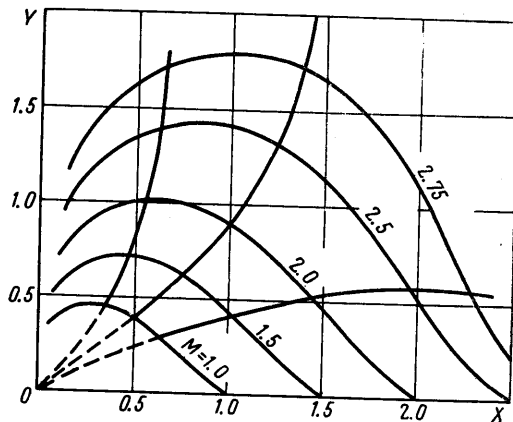
$$B_4 = 8 \sin M, \quad B_3 = 4 \sin X (1 + 2 \cos M) + 16 \sin M$$

$$B_2 = \sin X [8 \cos M - 8 \cos^2(1/2 X) + 6 + 2 \sin X \sin M + 8 \cos^2(1/2 M)] + 8 \sin M$$

$$B_1 = 2 \sin X \{ -2 \cos^2(1/2 X) [1 + \cos^2(1/2 X)] + 2 \cos^2(1/2 M) \times \\ \times [3 - \cos^2(1/2 M)] + \sin X \sin M \}$$

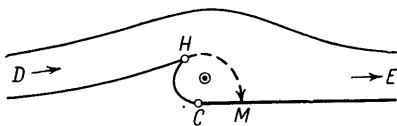
$$B_0 = -2 \sin X [\cos^2(1/2 X) - \cos^2(1/2 M)]^2 \quad (4.4)$$

¹ Линии тока ВНС в обоих случаях и положение точки M (фиг. 4) — по расчету, остальное схематично.



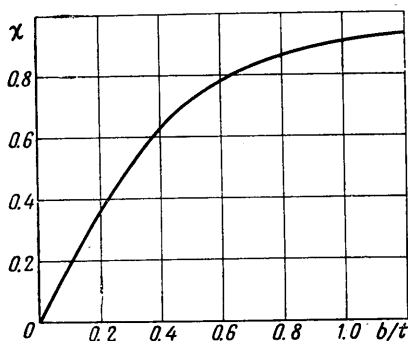
Фиг. 6

Пусть сначала $m \rightarrow 0$ ($\omega_1 \neq 0$). Переходя к переменным ξ_0/m , η_0/m , несложно построить предельную кривую



Фиг. 7

корни $\tau = \tau(M, X)$ выписанного уравнения четвертой степени; кривые $Y = Y(M, X)$ для $M = 1, 1.5, 2, 2.5, 2.75$ нанесены на фиг. 6. Теперь уже несложно получить корни системы уравнений (4.1) — (4.3) графически. На фиг. 6 нанесены найденные таким образом две ветви $X(M) + iY(M)$ для $\omega_1 = 0.645$. Кривая посередине между ветвями соответствует предельному случаю $|\omega_2| = \infty$ ($\omega_1 = 1$); в этом случае выражения для корней системы уравнений находятся в замкнутом виде, схема течения изображена на фиг. 7.



Фиг. 8

$\eta_0/m = f(\xi_0/m)$ проходящую через точку $\lambda^* = (\xi_0/m)^* + i(\eta_0/m)^*$ (см. § 2). Отправляясь от этой кривой, можно при помощи метода Ньютона вычислять

между ветвями соответствует предельному случаю $|\omega_2| = \infty$ ($\omega_1 = 1$); в этом случае выражения для корней системы уравнений находятся в замкнутом виде, схема течения изображена на фиг. 7.

§ 5. Для того чтобы выяснить влияние вихря на относительное избыточное давление χ , были проведены некоторые численные расчеты для случая $d = \omega_1$ (стенка DA снята). Корни системы уравнений (1.8) и (1.10), найденные графически (§ 4), уточнялись затем при помощи метода Ньютона [5].

Ниже приведены значения величин χ для девяти различных случаев

течения, каждый из которых определяется одновременно значениями b/t и y_l/t (фиг. 2).

$b/t = 0.300$	0.248	0.187	0.640	0.482	0.398	0.871	0.807	0.746
$y_l/t = 0.68$	0.90	1.16	0.50	0.97	1.19	0.87	0.99	1.10
$\chi = 0.507$	0.434	0.342	0.810	0.713	0.641	0.895	0.881	0.865

Приведенные данные соответствуют картине течения по типу фиг. 4.

Сравнивая значения χ для течения с вихрем с кривой $\chi_0 = f(b/t)$ для течения без вихря (фиг. 8), убеждаемся, что влияние вихря на относительное избыточное давление очень мало.

В заключение автор благодарит М. И. Гуревича и Г. Ю. Степанова за полезные обсуждения.

Поступило 3 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория аппаратов на воздушной подушке. Машгиз, 1963.
2. Ханжонков В. И. Натекание кольцевой струи на экран. Промышленная аэродинамика, Оборонгиз, 1962, вып. 23.
3. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, Физматгиз, 1963.
4. Еругин Н. П. Неявные функции. Изд. ЛГУ, 1956.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.