

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

И. А. ШВАРЦ

(Ленинград)

При высоких температурах в качестве смазочного материала может применяться жидкий металл, который является проводником электрического тока. В последние годы в литературе уделяется значительное внимание различным задачам о движении электропроводной смазочной жидкости в магнитном и электрическом полях (магнито-гидродинамическая теория смазки). Так, например, в работах [1-3] изучается течение электропроводной смазочной жидкости между двумя плоскими стенками, находящимися в магнитном поле. Электропроводный смазочный слой в магнито-гидродинамическом подшипнике с цилиндрическими поверхностями рассмотрен в работах [4-8] и др.

В данной работе решена плоская магнито-гидродинамическая задача о распределении давления вязкой электропроводной жидкости в смазочном слое цилиндрического подшипника, вдоль оси которого направлено постоянное магнитное поле, а между шипом и подшипником приложена разность потенциалов от внешнего источника. При этом радиальный зазор в подшипнике не предполагается малым, и задача сводится к двумерной системе уравнений магнитной гидродинамики.

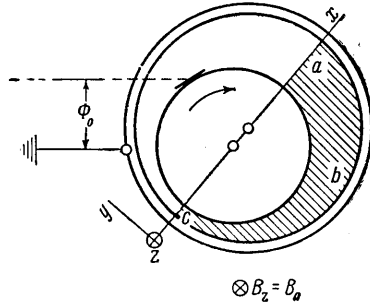
Получено выражение для дополнительного давления в смазочном слое, вызванного электромагнитными силами. В частном случае для весьма тонкого слоя получается результат, найденный в работах [4,8]. Используется система единиц СИ.

§ 1. Рассмотрим цилиндрический подшипник, смазываемый несжимаемой электропроводной жидкостью с удельной проводимостью  $\sigma$  (жидкий металл). Вдоль оси подшипника направлено внешнее однородное магнитное поле. Подшипник и шип являются идеально проводящими электродами, между которыми имеется постоянная разность потенциалов  $\Phi_0$ , созданная внешним источником э.д.с. (фиг. 1).

В условиях смазочного слоя обычное и магнитное числа Рейнольдса можно считать малыми. Тогда система уравнений, описывающих движение несжимаемой вязкой жидкости в магнито-гидродинамическом смазочном слое, запишется в виде

$$\text{grad } p = \mu \Delta v + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (-\text{grad } \varphi + v \times \mathbf{B}), \quad \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь  $p$  — магнито-гидродинамическое давление в слое,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля,  $v$  — скорость движения жидкости,  $\varphi$  — потенциал электрического поля в зазоре подшипника; (1.1) — уравнение движения смазки, учитывающее магнитную силу  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ; (1.2) — закон Ома в магнитной гидродинамике [9].

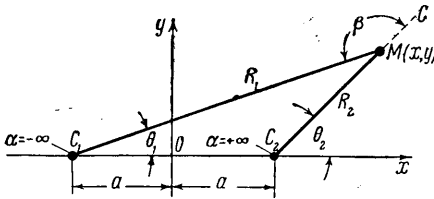
Имея в виду плоскую задачу, рассматриваем движение смазочной жидкости в плоскости  $xu$ .

Если разность радиусов подшипника и шипа немала, т. е. учитывается кривизна смазочного слоя, то удобно решать задачу в биполярных (бицилиндрических) координатах  $\alpha, \beta, z$ .

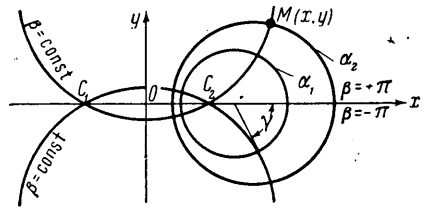
Выбрав по оси  $Ox$  две точки  $C_1$  и  $C_2$  (полюсы) на расстоянии  $2a$ , положение точки  $M(x, y)$  на плоскости (фиг. 2) определяем двумя величинами [10]

$$\alpha = \ln(R_2/R_1), \quad \beta = \angle CMC_1 = \pi + \theta_1 - \theta_2 \quad (1.3)$$

Координата  $\alpha$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Координата  $\beta$  изменяется от  $-\pi$  до  $+\pi$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Биполярные координаты образуют сетку взаимно-ортогональных окружностей (фиг. 3). Центры окружностей  $\alpha = \text{const}$  лежат на оси  $Ox$ . Их радиусы определяются формулами

$$r = \frac{a}{\text{sh } \alpha}, \quad r = \frac{a}{\text{sh } \alpha_1}, \quad r_2 = \frac{a}{\text{sh } \alpha_2} \quad (1.4)$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — параметры, соответствующие окружностям шипа и подшипника,  $r_1$  и  $r_2$  — их радиусы.

Центры окружностей  $\beta = \text{const}$  лежат на оси  $Oy$ . Декартовы координаты  $x$  и  $y$  связаны с переменными  $\alpha$  и  $\beta$  соотношениями

$$x = a \frac{\text{sh } \alpha}{\text{ch } \alpha + \cos \beta}, \quad y = a \frac{\sin \beta}{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \quad (1.5)$$

Коэффициенты Ляме в данном случае равны

$$H_1 = H_2 = \frac{1}{g} = \frac{a}{\text{ch } \alpha + \cos \beta}, \quad H_3 = 1 \quad (1.6)$$

Полярный угол  $\gamma$ , образуемый касательной к окружности  $\beta = \text{const}$  с осью  $x$  и отсчитываемый по часовой стрелке (фиг. 3), определяется формулой

$$\cos \gamma = -\frac{dx}{ds} = -g \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\frac{1 + \text{ch } \alpha \cos \beta}{\text{ch } \alpha + \cos \beta} \quad \left( ds = \frac{1}{g} d\alpha \right) \quad (1.7)$$

Здесь  $ds$  — элемент дуги окружности. Из (1.7) получаем  $g\Delta s = \Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ , где  $\Delta s$  — длина дуги окружности  $\beta = \text{const}$ , заключенная между контурами шипа и подшипника  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

При малом зазоре подшипника, когда толщина смазочного слоя  $h$  — малая величина, можно считать, что  $\Delta s \approx h$ , и

$$\Delta\alpha \approx gh \quad (1.8)$$

Пусть  $e$  — эксцентриситет, т. е. расстояние между центрами шипа и подшипника;  $\delta$  — радиальный зазор;  $\psi$  — относительный радиальный зазор;  $\chi$  — относительный эксцентриситет

$$\delta = r_2 - r_1, \quad \psi = \delta/r, \quad \chi = e/\delta$$

Из теории биполярных координат можно получить соотношения

$$\text{ch } \alpha_1 = \frac{2 + \psi - \psi\chi^2}{2\chi}, \quad \text{ch } \alpha_2 = \frac{2 + \psi + \psi\chi^2}{2(1 + \psi)\chi} \quad (1.9)$$

При малом радиальном зазоре величинами порядка  $\psi = \delta/r_1$  по сравнению с единицей можно пренебречь, и тогда из формул (1.7) следует:

$$\operatorname{ch} \alpha_1 \approx \operatorname{ch} \alpha_2 \approx \operatorname{ch} \alpha \approx \frac{1}{\chi}, \quad \operatorname{sh} \alpha_1 \approx \operatorname{sh} \alpha_2 \approx \operatorname{sh} \alpha \approx \frac{\sqrt{1-\chi^2}}{\chi} \quad (1.10)$$

С этой степенью приближения из (1.9) получаем

$$\cos \beta = -\frac{\chi + \cos \gamma}{1 + \chi \cos \gamma} = -\cos(\beta + \pi), \quad \beta + \pi = 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1-\chi x}{1+x} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right] \quad (1.11)$$

Внешнее магнитное поле постоянно и направлено по оси  $z$  (на фиг. 1 перпендикулярно плоскости чертежа), так что

$$B_\alpha = B_\beta = 0, \quad B_z = B_0 = \operatorname{const} \quad (1.12)$$

Для плоской задачи  $v_z = 0$  и  $j_z = 0$ . Если ввести удвоенную угловую скорость вихря  $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$  ( $\omega = \omega_z$ ), то уравнения (1.1) и (1.2) в компонентах билиндрических координат запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= -\mu \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{1}{g} j_\beta B_0, & \frac{\partial p}{\partial \beta} &= \mu \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{1}{g} j_\alpha B_0, & \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} \frac{v_\alpha}{g} + \frac{\partial v_\beta}{\partial \beta} \frac{v_\beta}{g} &= 0 \\ j_\alpha &= \sigma \left( -g \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + v_\beta B_0 \right); & j_\beta &= \sigma \left( -g \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - v_\alpha B_0 \right), & \frac{\partial j_\alpha}{\partial \alpha} \frac{j_\alpha}{g} + \frac{\partial j_\beta}{\partial \beta} \frac{j_\beta}{g} &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Удовлетворяя третьему уравнению (1.13), вводим функцию тока  $W$

$$v_\alpha = g \partial W / \partial \beta, \quad v_\beta = -g \partial W / \partial \alpha \quad (1.15)$$

Тогда

$$j_\alpha = -\sigma g \left( \partial \varphi / \partial \alpha + B_0 \partial W / \partial \alpha \right); \quad j_\beta = -\sigma g \left( \partial \varphi / \partial \beta + B_0 \partial W / \partial \beta \right) \quad (1.16)$$

В данном случае, как видно из приведенных уравнений, задача о распределении скоростей отделяется от задачи о распределении токов.

После несложных выкладок легко показать, что

$$\Delta \Delta W = g^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left[ g^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0 \quad (1.17)$$

Определение функции тока сводится к решению бигармонического уравнения (1.17) при соответствующих граничных условиях, т. е. к обычной гидродинамической задаче, которая была решена Жуковским и Чаплыгиным [11, 12]. Следовательно, в рассматриваемом случае функция тока и скорость жидкости не зависят от электромагнитных параметров  $B_0$  и  $j$ .

§ 2. Из (1.16) и третьего уравнения (1.14) имеем

$$-\sigma \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + B_0 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \right) \right] = 0 \quad \text{или} \quad \Delta \varphi + B_0 \Delta W = 0 \quad (2.1)$$

Таким образом, распределение потенциала в зазоре между цилиндрами определяется функцией тока  $W$  и величиной магнитного поля.

Для определения плотности электрического тока по уравнениям (1.16) удобно ввести функцию

$$u(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta) + B_0 W(\alpha, \beta) \quad (2.2)$$

Тогда

$$\Delta u = 0, \quad j_\alpha = -\sigma g \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad j_\beta = -\sigma g \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad (2.3)$$

Сформулируем граничные условия для функции  $u$ . Между цилиндрами приложена разность потенциалов  $\Phi_0$  от внешнего источника. Потенциал на контуре шипа равен  $\varphi_1$ , на контуре подшипника он равен  $\varphi_2$ . Тогда  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Phi_0$ . Если поверхность подшипника заземлена (фиг. 1), то

$$\varphi_1 = \Phi_0, \quad \varphi_2 = 0 \quad (2.4)$$

Функция тока на контурах шипа и подшипника имеет значения  $W_1$  и  $W_2$  соответственно.

Обозначим через  $Q$  расход смазочной жидкости, протекающей между шипом и подшипником, который положителен согласно первому выражению (1.15) при течении по часовой стрелке. Тогда  $W_2 - W_1 = Q$ .

Так как поверхность подшипника неподвижна, то

$$W_1 = -Q, \quad W_2 = 0 \quad (2.5)$$

На основании (2.2), (2.4) и (2.5) для функции  $u(\alpha, \beta)$  получаем граничные условия

$$u(\alpha_1, \beta) = \Phi_0 - B_0 Q = u_0, \quad u(\alpha_2, \beta) = 0 \quad (2.6)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению функции  $u$ , удовлетворяющей гармоническому уравнению (2.3) при граничных условиях (2.6), после чего вычисляются компоненты плотности электрического тока  $j_\alpha$  и  $j_\beta$  по уравнениям (2.3). Выражение для функции  $W$  известно из решения гидродинамической задачи [12, 13]. Следовательно, можно найти магнитогидродинамическое давление из уравнений (1.13).

В дальнейшем будем считать, что смазочный слой охватывает половину шипа, начинаясь в самом широком месте зазора и кончаясь в самом узком (фиг. 1). Такое распределение смазочной жидкости ближе к реальным условиям, чем предположение об охвате шипа смазкой по всей окружности [13].

Таким образом, область заполнения смазочной жидкостью соответствует изменению координаты  $\beta$  в нижней полуплоскости от  $-\pi$  до 0 (фиг. 3). При этом полярный угол  $\gamma$  (1.7) изменяется от 0 до  $\pi$ . Решение гармонического уравнения (2.3) будем искать в виде [10]

$$u(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{ch} k\alpha + B_k \operatorname{sh} k\alpha) \sin k\beta + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \operatorname{ch} k\alpha + D_k \operatorname{sh} k\alpha) \cos k\beta$$

Используем известную формулу [14]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\beta}{2k-1} = -\frac{\pi}{4} \quad \text{при} \quad -\pi < \beta < 0 \quad (2.8)$$

Первое граничное условие (2.6) представим в виде

$$u(\alpha_1, \beta) = u_0 = -\frac{4}{\pi} u_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\beta}{2k-1} \quad (2.9)$$

Сравнивая (2.9) с (2.7), можно заключить, что выражение для функции  $u(\alpha, \beta)$  не должно содержать слагаемых с  $\cos k\beta$  ( $C_k = D_k = 0$ ), и все четные коэффициенты в первой сумме (2.7) равны нулю ( $A_{2k} = B_{2k} = 0$ ). Тогда имеем

$$u(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_{2k-1} \operatorname{ch}(2k-1)\alpha + B_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\alpha] \sin(2k-1)\beta \quad (2.10)$$

Из (2.10), второго условия (2.6) и (2.9) для определения коэффициентов  $A_{2k-1}$  и  $B_{2k-1}$  получаем уравнения

$$A_{2k-1} \operatorname{ch}(2k-1)\alpha_1 + B_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\alpha_1 = -\frac{4}{\pi} \frac{u_0}{2k-1} \quad (2.11)$$

$$A_{2k-1} \operatorname{ch}(2k-1)\alpha_2 + B_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\alpha_2 = 0$$

Из (2.11) находим (2.12)

$$A_{2k-1} = \frac{4u_0}{\pi(2k-1)} \frac{\operatorname{sh}(2k-1)\alpha_2}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_{2k-1} = -\frac{4u_0}{\pi(2k-1)} \frac{\operatorname{ch}(2k-1)\alpha_2}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

Подставляя выражения коэффициентов  $A_{2k-1}$  и  $B_{2k-1}$  в (2.10), получаем

$$u(\alpha, \beta) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \frac{\sin(2k-1)\beta}{2k-1} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.3), находим

$$\frac{j_\alpha}{g} = \sigma \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2k-1)(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \sin'(2k-1)\beta \quad (2.14)$$

$$\frac{j_\beta}{g} = -\sigma \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_2 - \alpha)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \cos(2k-1)\beta$$

Магнитогидродинамическое давление в смазочном слое можно представить в виде суммы гидродинамического давления  $p_0$  и давления, обусловленного электромагнитными силами  $p'$ , имеем

$$p = p_0 + p' \quad (2.15)$$

Гидродинамическое давление  $p_0$  удовлетворяет уравнениям

$$\partial p_0 / \partial \alpha = -\mu \partial \omega / \partial \beta, \quad \partial p_0 / \partial \beta = \mu \partial \omega / \partial \alpha \quad (2.16)$$

решение которых известно [13]. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению электромагнитного давления  $p'$ . Из (1.13), (2.15), (2.16) и (2.14) получаем

$$\frac{\partial p'}{\partial \alpha} = \frac{1}{g} j_\beta B_0 = \frac{4}{\pi} u_0 B_0 \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \cos(2k-1)\beta \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial \beta} = -\frac{1}{g} j_\alpha B_0 = -\frac{4}{\pi} u_0 B_0 \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2k-1)(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \sin(2k-1)\beta$$

Введем безразмерные параметры (2.18)

$$p^{\circ} = \frac{p' \delta^2}{\mu v_0 r_1}, \quad \Phi^{\circ} = \frac{\Phi_0}{B_0 \delta v_0}, \quad Q^{\circ} = \frac{Q}{v_0 \delta}, \quad M = B_0 \delta \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu}}, \quad G = M^2 (\Phi^{\circ} - Q^{\circ})$$

Здесь  $v_0$  — линейная скорость поверхности шипа,  $M$  — число Гартмана для магнитогидродинамического смазочного слоя. Выражения (2.17) представим в виде

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial \alpha} = \frac{4}{\alpha} \Psi G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \cos(2k-1)\beta \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial \beta} = -\frac{4}{\pi} \Psi G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2k-1)(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1 - \alpha_2)} \sin(2k-1)\beta \quad (2.20)$$

Вводя обозначения  $\partial p^{\circ}/\partial\alpha = S(\alpha, \beta)$  и  $\partial p^{\circ}/\partial\beta = T(\alpha, \beta)$ , найдем  $p^{\circ}$  после вычисления криволинейного интеграла

$$p^{\circ}(\alpha, \beta) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} S(\xi, \beta_0) d\xi + \int_{\beta_0}^{\beta} T(\alpha, \eta) d\eta \quad (2.21)$$

Здесь  $(\alpha_0, \beta_0)$  — произвольная точка в области изменения  $\alpha$  и  $\beta$ . Получаем

$$p^{\circ}(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi} \psi G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2k-1)(\alpha-\alpha_2)\cos(2k-1)\beta - \operatorname{ch}(2k-1)(\alpha_0-\alpha_2)\cos(2k-1)\beta_0}{(2k-1)\operatorname{sh}(2k-1)(\alpha_1-\alpha_2)} \quad (2.22)$$

§ 3. В практически важном случае, когда зазор в подшипнике весьма мал, формулы (2.20) и (2.22) упрощаются.

Сравнивая выражения для компонент градиента электромагнитного давления (2.19) и (2.20), замечаем, что при малом зазоре  $\partial p^{\circ}/\partial\alpha \ll \partial p^{\circ}/\partial\beta$ , так как в этом случае  $(\alpha - \alpha_2 \rightarrow 0)$  числители слагаемых в (2.19) приближаются к нулю, а в (2.20) — приближаются к единице. Поэтому в тонком смазочном слое можно считать, что  $\partial p^{\circ}/\partial\alpha \approx 0$ , т. е. давление  $p^{\circ}$  практически постоянно вдоль толщины слоя. Для градиента давления  $\partial p^{\circ}/\partial\beta$  в тонком слое получаем из (2.20)

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial\beta} \approx -\frac{4}{\pi} \psi G \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\beta}{2k-1}$$

Отсюда на основании (2.8) и (1.8) имеем

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial\beta} = \frac{\psi G}{gh} = \frac{G}{r_1 g h^{\circ}} \quad (h^{\circ} = \frac{h}{\delta} = 1 + \chi \cos \gamma) \quad (3.1)$$

Здесь  $h^{\circ}$  — безразмерная толщина слоя при малом зазоре. Преобразуем градиент давления (3.1), переходя от переменной  $\beta$  к полярному углу  $\gamma$ . Получим

$$\partial p^{\circ}/\partial\beta = (\partial p^{\circ}/\partial\gamma) (\partial\gamma/\partial\beta) \quad (3.2)$$

Принимая во внимание формулы (1.7) и (1.4), при  $r \approx r_1$  получим

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = -\frac{1}{\sin\gamma} \frac{\partial(\cos\gamma)}{\partial\beta} = \frac{\operatorname{sh}\alpha_1}{ag} = \frac{1}{r_1 g} \quad (3.3)$$

Из выражений (3.1), (3.2), (3.3) и (2.18) находим

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial\gamma} = \frac{G}{h^{\circ}} = \frac{M^2(\Phi^{\circ} - Q^{\circ})}{1 + \chi \cos\gamma} \quad (3.4)$$

Используя известное выражение Рейнольдса для градиента гидродинамического давления в тонком смазочном слое [11-13]

$$\partial p_0^{\circ}/\partial\gamma = 6/h^{\circ 2} - 12Q^{\circ}/h^{\circ 3} \quad (3.5)$$

получим градиент магнетогидродинамического давления в виде

$$\frac{\partial p^{\circ}}{\partial\gamma} = \frac{\partial p_0^{\circ}}{\partial\gamma} + \frac{\partial p^{\circ}}{\partial\gamma} = \frac{6}{h^{\circ 2}} - \frac{12Q^{\circ}}{h^{\circ 3}} + \frac{M^2(\Phi^{\circ} - Q^{\circ})}{h^{\circ}} \quad (3.6)$$

Это совпадает с выражением, полученным непосредственно для тонкого слоя в работах [4, 8].

Преобразуем теперь выражение для электромагнитного давления (2.22), считая радиальный зазор малым. При весьма малых значениях разностей  $\alpha - \alpha_2$ ,  $\alpha_0 - \alpha_2$  и  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  получим

$$p^{\circ} \approx \frac{4}{\pi} \psi G \frac{1}{\Delta\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\beta - \cos(2k-1)\beta_0}{(2k-1)^2} \quad (3.7)$$

В теории тригонометрических рядов известна формула [14]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\beta}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} + \beta \right) \quad (\text{при } -\pi < \beta < 0) \quad (3.8)$$

На основании (3.7) и (3.8) имеем

$$p^{\circ} = \psi G \frac{1}{\Delta \alpha} (\beta - \beta_0) = \frac{G (\beta - \beta_0)}{g r_1 h^{\circ}} \quad (3.9)$$

При помощи соотношений (1.4), (1.6), (1.10) и (1.11) выражение (3.9) преобразуется к виду

$$p^{\circ} = \frac{G (\beta - \beta_0)}{\sqrt{1 - \chi^2}} \quad (3.10)$$

Если начало смазочного слоя (фиг. 3) соответствует координате  $\beta_0 = -\pi$ , то

$$p^{\circ} = \frac{G (\beta + \pi)}{\sqrt{1 - \chi^2}} \quad (3.11)$$

Отсюда на основании (1.11) получаем

$$p^{\circ}(\gamma) = \frac{2M^2 (\Phi^{\circ} - Q^{\circ})}{\sqrt{1 - \chi^2}} \arctg \left[ \left( \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \right] \quad (3.12)$$

Если слой оканчивается при  $\beta = 0$  ( $\gamma = \pi$ ), то имеем

$$p^{\circ} = \frac{M^2 (\Phi^{\circ} - Q^{\circ}) \pi}{\sqrt{1 - \chi^2}} \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) могло быть получено непосредственно для тонкого слоя при интегрировании уравнения (3.4).

Расчет, выполненный в данной работе, показывает, что в магнетогидродинамическом смазочном слое давление увеличивается за счет электромагнитного давления  $p^{\circ}$ , определяемого для слоя произвольной толщины уравнением (2.22). Как видно из этого уравнения, электромагнитное давление пропорционально квадрату числа Гармана. Следовательно, несущая способность подшипника может быть значительно увеличена действием магнитного поля на электропроводную смазочную жидкость.

Поступило 5 V 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Т а р а п о в И. Е. Задача смазки в магнитной гидродинамике. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Сб. докл. II совещ. по теор. и прикл. магнит. гидродинамике. Рига, 1962, стр. 147.
2. S n y d e r W. T. The influence of finite — wall conductance on load capacity of the magnetohydrodynamic slider bearing. Trans. ASME, ser. D, 1964, vol. 86.
3. T u c k s W., U h l e n b u s c h J. Magnetohydrodynamic theory of lubrication. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, p. 498.
4. H u g h e s W. F., E l s o R. A. The magnetohydrodynamic journal bearing. J. Amer. Rocket Soc., vol. 32, 1962, №. 5, p. 776.
5. K u z m a D. C. The magnetohydrodynamic journal bearing. Paper Amer. Soc. Mech. Engng, 1962, № Lub-16, p. 4.
6. K u z m a D. C. The finite magnetohydrodynamic journal bearing. Trans. ASME, ser. D, 1964, vol. 86, №. 3.
7. H u g h e s W. F. The magnetohydrodynamic finite — step slider bearing. Trans. ASME, ser. D. 1963, vol. 85, № 1.
8. Ш а р ц И. А. Магнетогидродинамический смазочный слой. Докл. XXII Науч. конф. Ленинград. строит. ин-та. Сб. «Физика», 1964.
9. К у л и к о в с к и й А. Г. и Л ю б и м о в Г. А. Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
10. У ф л я н д Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. Гостехиздат, 1950.
11. Сб. «Гидродинамическая теория смазки». Гостехиздат, 1934.
12. С л е з к и н Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
13. К о р о в ч и н с к и й М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. Машгиз, 1959.
14. Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1948.