

## К ПОСТАНОВКЕ ОБРАТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТУРБОМАШИНАХ

Я. А. СИРОТКИН

(Ленинград)

Задача о построении лопасти рабочего колеса (крылатки) гидравлической турбомашин в рамках гипотезы бесконечно большого числа лопастей в крылатке сводится к решению некоторой обратной осесимметричной задачи. Эта задача в постановке Бауэрсфельда — Вознесенского [1-3] может быть сформулирована следующим образом: при заданном меридиональном потоке и угловой скорости вращения крылатки построить поверхность лопасти  $S_2'$  (фиг. 1), проходящую через заданные входную  $ab$  (или выходную  $cd$ ) кромку и линию пересечения лопасти  $ad$  с одной осесимметричной поверхностью тока заданного меридионального потока. В дальнейшем через  $S_2'$  будет обозначаться средняя (или вогнутая) поверхность лопасти, совпадающая при определенных условиях со средней межлопастной поверхностью тока  $abcd$ .

В работах [1-4] при решении этой задачи используется условие компланарности расположенного на поверхности лопасти  $S_2'$  элемента линии тока  $dr = \{dr, r d\varphi, dz\}$  и векторов относительной скорости  $w$  и абсолютного вихря  $\nabla \times c$

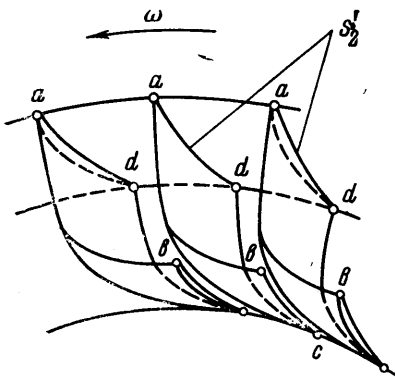
$$dr \cdot [w \times (\nabla \times c)] = \begin{vmatrix} dr & r d\varphi & dz \\ w_r & w_u & w_z \\ (\nabla \times c)_r & (\nabla \times c)_u & (\nabla \times c)_z \end{vmatrix} = 0 \quad (0.1)$$

В работах [5, 6] показано, что это условие справедливо только при безвихревом набегающем на рабочее колесо потоке; следовательно, использование его в работах [1, 2] вполне закономерно, в то время как применение его в работах [3, 4] принципиально недопустимо, так как задаваемый в них равновесной меридиональный поток<sup>1</sup> в криволинейном до рабочего колеса канале существенно вихревой  $[\eta = (\nabla \times c)_u \neq 0]$ .

В работе [7] приводятся постановка и метод решения обратной осесимметричной задачи для произвольного вихревого меридионального (а не только равновесного) потока, но в ней не учитывается стеснение потока лопастями крылатки, не отмечены специальные случаи вырождения порядка и типа уравнений на границах и внутри области, а применяемый в ней метод решения предполагает приведение квазилинейного гиперболического уравнения к нормальному виду с целью его решения при помощи метода последовательных приближений Пикара.

Ниже дается математическая формулировка обратной осесимметричной задачи для произвольного вихревого меридионального потока, в которой учитывается стеснение, рассматриваются случаи вырождения порядка и типа уравнений, с образованием линии параболического вырождения, и исследованы интересные для приложения случаи постановки краевых и начальных условий (задача Гурса и смешанные задачи), определяющих возможные формы входных и выходных кромок. Поставленные для квазилинейного гиперболического уравнения задачи можно решать при помощи метода характеристик, метода конечных разностей, метода прямых и других численных методов.

<sup>1</sup> Т. е. такой поток, в котором вдоль каждой нормали  $n$  к меридиональным линиям тока  $s$  меридиональная составляющая скорости  $w_s$  постоянна ( $\partial w_s / \partial n = 0$ ).



Фиг. 1

Изложение ведется применительно к радиально-осевым гидротурбинам, однако оно без существенных изменений пригодно для рабочих колес насосов, гидротрансформаторов, а также для неподвижных направляющих аппаратов ( $\omega = 0$ ).

**1. Основные уравнения.** Установившееся в среднем осесимметричное вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости во вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около оси  $z$  рабочем колесе турбомашин при направленной вертикально вниз оси симметрии  $z$  описывается следующей системой уравнений [5, 6]:

$$\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{c}) = \nabla H^* - \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot (\chi \mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (1.1)$$

где

$$(\nabla \times \mathbf{c})_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial z}, \quad (\nabla \times \mathbf{c})_u = \frac{\partial c_r}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial r}, \quad (\nabla \times \mathbf{c})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} \quad (1.2)$$

$$H^* = \frac{p_1}{\rho} + \frac{w^2 - u^2}{2} + g(H - z) = \frac{p_1^*}{\rho} - u c_u + g(H - z) \quad (1.3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $\mathbf{F}$  — вектор массовой силы воздействия лопастей на поток,  $\chi = 1 - (s'N / 2\pi r)$  — коэффициент стеснения,  $s'$  — толщина лопасти в окружном направлении,  $N$  — число лопастей в крылатке,  $p_1$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $H$  — расстояние между нижним и верхним бьефами,  $u = \omega r$  — окружная скорость вращения ротора,  $\mathbf{c}$  ( $c_r, c_u, c_z$ ),  $\mathbf{w}$  ( $w_r, w_u, w_z$ ) — векторы абсолютной и относительной скорости и их составляющие в цилиндрической системе координат ( $r, \varphi, z$ ), причем

$$c_r = w_r, \quad c_z = w_z, \quad c_u = w_u + u \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор единичной внешней нормали к средней поверхности лопасти  $S_2'$ . В системе (1.1) опущены квадратичные пульсационные члены, учет которых необходим при малом числе лопастей.

В сущности система (1.1) описывает установившееся в среднем вихревое течение на поверхности тока со слоем переменной толщины  $2\pi r \chi / N$ . Пусть

$$\varphi = \varphi(r, z), \quad \varphi \in C^{(1)} \quad (1.5)$$

— уравнение этой поверхности тока, тогда

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{i} - \frac{1}{r} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right), \quad \Delta = \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}$$

$$\cos(r\mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \cos(\varphi\mathbf{v}) = -\frac{1}{r\Delta}, \quad \cos(z\mathbf{v}) = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.6)$$

Всюду  $\varphi$  измеряется в направлении вращения крылатки. Скалярное умножение первого уравнения системы (1.1) на  $\mathbf{w}$  с учетом того, что  $\mathbf{v} \times \mathbf{F} = 0$  (или  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{F} = 0$ ), приводит к уравнению Бернулли

$$\frac{dH^*}{dt} = 0, \quad \frac{d}{dt} = w_r \frac{\partial}{\partial r} + w_z \frac{\partial}{\partial z}$$

которое заменяет одно из трех уравнений движения (1.1). В связи с этим и при помощи (1.2) и (1.6) система (1.1), которая содержит семь скалярных уравнений, после несложных преобразований принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial z} = r\chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta, \quad \eta = (\nabla \times \mathbf{c})_u$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c_u r - w r^2}{r^2}, \quad \frac{\partial(r\chi w_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\chi w_z)}{\partial z} = 0, \quad \frac{dH^*}{dt} = 0 \quad (1.7)$$

где  $\psi = Q / 2\pi$  — функция тока,  $Q$  — объемный расход; распределение  $H^*$  ( $\psi$ ) на входе в колесо считается заданным.

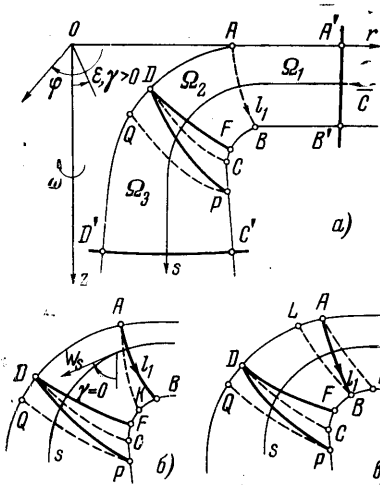
Полагая в системе (1.1) величины  $\nu = F = \omega = 0$  и  $\chi = 1$ , получим систему, описывающую осесимметричное течение в кольцевом канале, свободном от лопастей

$$\frac{\partial c_z}{\partial r} - \frac{\partial c_r}{\partial z} = r \left( \frac{dh^*}{d\psi} - \frac{1}{2r^2} \frac{d(c_u r)^2}{d\psi} \right), \quad h^* = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c^2}{2} + g(H - z)$$

$$\frac{d(c_u r)}{dt} = 0, \quad \frac{\partial(r c_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r c_z)}{\partial z} = 0, \quad \frac{dh^*}{dt} = 0 \quad (1.8)$$

Учитывая (1.2) и (1.6), уравнение (1.7) можно записать иначе

$$\nu \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = \frac{\chi}{\Delta} \frac{dH^*}{d\psi} \quad (1.9)$$



Фиг. 2

Это уравнение при  $dH^* / d\psi = 0$ , т. е. при безвихревом набегающем на крылатку потоке (но вообще — при вихревом меридиональном потоке в пределах крылатки), совместно с уравнениями  $\nu \cdot d\mathbf{r} = 0$  и  $\nu \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  обеспечивает выполнение условия (0.1), иначе говоря, в этом случае поверхность тока является одновременно и вихревой поверхностью. Если же еще и  $\eta = 0$ , т. е. меридиональный поток и в пределах крылатки безвихревой, то из (1.7) при  $dH^* / d\psi = 0$  имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

Отсюда

$$c_u r = f(\varphi), \quad \varphi = \varphi(r, z) \quad (1.11)$$

Из уравнений (1.5), (1.10) и (1.11) очевидно, что при  $dH^* / d\psi = \eta = 0$  меридиональные сечения поверхности  $S_2'$  и вихревые линии, лежащие на  $S_2'$ , совпадают, и вдоль них  $c_u r = \text{const}$ ; вихревые линии при этом лежат, конечно, в меридиональной плоскости ( $\eta = 0$ ). Отсюда видно, что метод Бауэрсфельда решения обратной осесимметричной задачи [1, 2], который сводится к интегрированию (1.7) при условии (1.11) и заданном безвихревом меридиональном потоке без учета стеснения ( $\chi = 1$ ), обеспечивает выполнение всех уравнений системы (1.7) при  $\chi = 1$  и в этом смысле он правильный. Отметим еще, что в этом методе уравнение (1.7) обычно записывается в естественной системе координат

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{c_u r - \omega r^2}{w_s r^2}, \quad w_s^2 = w_r^2 + w_z^2 \quad (1.12)$$

Учет конечной толщины лопасти ( $\chi \neq 1$ ) в методе Бауэрсфельда приводит к необходимости для построения безвихревого меридионального потока в пределах крылатки  $^1 ABCD$  ( $\Omega_2$  на фиг. 2, а) решать задачу Дирихле или смешанную ( $\psi = 0$  на  $A'D'$ ,  $\psi = \text{const} > 0$  на  $B'C'$ ,  $\partial\psi / \partial s = 0$  на  $A'B'$  и  $D'C'$ ) во всей области  $A'B'C'D'$  ( $\Omega$  на фиг. 2, а) для уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \ln(r\chi)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \ln(r\chi)}{\partial z} = 0$$

<sup>1</sup>  $ABCD$  — меридиональная проекция поверхности  $abcd$  (или  $S_2'$ ).

которое в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  при  $\chi = 1$  принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

выполняя при этом условия склейки решения и его первых производных на границах этих подобластей, т. е. на  $AB$  и  $CD$ .

Если же набегающий на крылатку поток — вихревой (из (1.11) видно, что  $\eta \neq 0$  даже при  $h^* = \text{const}$ ) или, в частном случае, — равнораспределенной меридиональный поток в криволинейном канале, то при этом  $dH^* / d\psi \neq 0$  справедливо уравнение (1.9), и, стало быть, условие (0.1) уже не выполняется, иначе говоря, поверхность тока  $S_2'$  уже не является вихревой. В самом деле, пусть

$$\nabla \times \mathbf{c} = (\nabla \times \mathbf{c})_\tau + (\nabla \times \mathbf{c})_\nu,$$

где индексами  $\tau$  и  $\nu$  обозначены касательная и нормальная к поверхности  $S_2'$  составляющие абсолютного вихря; тогда из (1.9) следует, что  $(\nabla \times \mathbf{c})_\nu = (\chi / \Delta) (dH^* / d\psi)$ , а поэтому вектор  $\nabla \times \mathbf{c}$  образует с поверхностью  $S_2'$  угол

$$\delta = \arcsin \left\{ \frac{r\chi}{\Delta} \frac{dH^*}{d\psi} \left[ \left( \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial(c_u r)}{\partial z} \right)^2 + (r\eta)^2 \right]^{-1/2} \right\}$$

Отсюда видно, что при вихревом набегающем на рабочее колесо потоке ( $dH^* / d\psi \neq 0$ ) предложенный И. Н. Вознесенским метод решения обратной осесимметричной задачи [3,4], основанный на условии (0.1) и равнораспределенном меридиональном потоке в криволинейном до крылатки канале, не обеспечивает выполнения всех уравнений системы (1.7) и тем самым исходит из наложения несовместных течений.

Применение операции вихря к первому уравнению системы (1.1) приводит к уравнению Фридмана

$$\text{helm}(\nabla \times \mathbf{c}) = [d(\nabla \times \mathbf{c}) / dt] - [(\nabla \times \mathbf{c}) \cdot \nabla] \mathbf{w} + (\nabla \times \mathbf{c})(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \nabla \times \mathbf{F}$$

из которого видно, что при неконсервативном поле массовых сил ( $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$ ) даже безвихревой набегающий на крылатку осесимметричный поток может стать в ней вихревым; из этого же уравнения следует, что существует специальный класс течений при консервативном поле массовых сил ( $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ), подробно исследованный в работе [7], для которого даже при  $dH^* / d\psi \neq 0$  и  $\eta \neq 0$  величина  $rF_u = d(c_u r) / dt = \text{const} \neq 0$  во всей области  $ABCD$  (фиг. 2, а), занимаемой крылаткой.

Состоящая из четырех уравнений система (1.7) при решении обратной задачи незамкнута, так как, помимо функции  $\psi(r, z)$ , определяющей форму поверхности  $S_2'$ , она содержит еще четыре неизвестных  $w_r, w_z, c_u r, p_1$ . В связи с этим при решении обратной задачи в постановке Бауэрсфельда — Вознесенского обычно задается меридиональный поток в области  $\Omega_2$  (фиг. 2, а), занимаемой крылаткой, и определяется соответствующая этому потоку форма поверхности  $S_2'$ . Задание этого потока означает задание функции тока  $\psi(r, z)$  в  $\Omega_2$ , а тем самым и

$$w_z = \frac{1}{r\chi} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w_r = -\frac{1}{r\chi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (1.13)$$

если еще задать распределение  $\chi(r, z)$  в  $\Omega_2$ . В результате задания  $\psi(r, z)$  и  $\chi(r, z)$  в  $\Omega_2$  и определения  $w_z$  и  $w_r$  из (1.13) выполняются уравнения неразрывности и Бернулли и можно построить меридиональные линии тока  $\psi(r, z) = \text{const}$ . В силу сказанного система (1.7) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial(c_u r)}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial(c_u r)}{\partial z} = r\chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r^2} (c_u r - \omega r^2) \quad (1.14)$$

Эта система уже замкнутая и содержит две неизвестные:  $\varphi$  и  $c_u r$ , так как давление  $p_1$  при заданном меридиональном потоке  $\psi(r, z)$  легко находится из (1.3) после определения  $\varphi(r, z)$

$$p_1 = \rho \{H^* - g(H - z) + [u^2 - (w_r^2 + w_z^2) - r^2 (d\varphi / dt)^2] / 2\}$$

Система (1.14) — существенно нелинейная, однако второе уравнение в ней линейное, и поэтому она может быть сведена к одному квазилинейному уравнению относительно  $\varphi$

$$w_r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left( w_z \frac{\partial \varphi}{\partial r} - w_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - w_z \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2} \left\{ r\chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta - 2\omega r \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial (w_z r^2)}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial (w_z r^2)}{\partial r} - \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right\} = G \left( r, z, \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (1.15)$$

В естественной системе координат это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{1}{w_s r^2} \left\{ r\chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta + 2\omega r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sin \gamma - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \cos \gamma \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial (w_s r^2)}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial (w_s r^2)}{\partial n} \right) \right\} \quad (1.16)$$

В уравнении (1.15) переменная  $r > 0$  и является ограниченной величиной, величины  $\partial \varphi / \partial r$  и  $\partial \varphi / \partial z$  — также ограниченные, так что (см. [6])

$$-\infty < r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \operatorname{tg} \delta' < +\infty, \quad -\infty < r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \operatorname{ctg} \beta' < +\infty \quad (1.17)$$

и, стало быть,  $-1/2\pi < \delta' < 1/2\pi$ ,  $0 < \beta' < \pi$ ; аналогичное справедливо, конечно, и для (1.16). Введя обычным путем функцию тока в (1.15), получаем

$$\begin{aligned} & r^2 \left[ -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + \\ & + \left[ 1 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \left[ 1 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \\ & = (r\chi)^2 \frac{dH^*}{d\psi} - 2r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( \omega r\chi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \left\{ \left[ 1 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi}{\partial r} - \right. \\ & \left. - r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} \frac{\partial \ln(r\chi)}{\partial r} + \left\{ \left[ 1 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] \frac{\partial \psi}{\partial z} - r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} \frac{\partial \ln(r\chi)}{\partial z} \quad (1.18) \end{aligned}$$

Это уравнение при  $\chi = 1$  совпадает с уравнением, полученным еще Мизесом [8], однако он не провел его полного исследования и рассмотрел только некоторые его решения относительно  $\varphi(r, z)$ , соответствующие методу Бауэрсфельда, задавая функцию тока в виде гармонических многочленов по  $r$  и  $z$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа.

При решении прямой осесимметричной задачи течения на  $S_2'$  обычно задается форма этой поверхности, т. е.  $\varphi = \varphi(r, z)$ , и краевая задача для уравнения (1.18) поэтому решается относительно  $\varphi(r, z)$ . В этом случае из дискриминанта уравнения (1.18)

$$D_1 = - \left[ 1 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] < 0$$

видно, что это уравнение — эллиптического типа. При решении обратной задачи задается функция  $\psi(r, z)$  и задача для (1.18) или (1.15), или (1.16) решается относительно  $\varphi(r, z)$ , при этом из дискриминантов уравнения

(1.18) или (1.15)

$$D = \frac{1}{4} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{(c_u r - \omega r^2)^2}{4r^4} = \frac{w_u^2}{4r^2} \geq 0 \quad (1.19)$$

и уравнения (1.23)

$$D' = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 = \left( \frac{c_u r - \omega r^2}{2w_s r^2} \right)^2 = \frac{1}{4r^2} \left( \frac{w_u}{w_s} \right)^2 \geq 0 \quad (1.20)$$

видно, что эти уравнения — гиперболического типа при  $w_u \neq 0$ .

Итак, уравнение прямой задачи — эллиптического типа (формулировка краевых задач для него дана в работе [6]), а обратной — гиперболического. Рассмотрим подробно последний случай.

С учетом уравнений наклона характеристик

$$\lambda_1 = \frac{dr}{dz} \Big|_1 = \frac{w_r}{w_z} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \lambda_2 = \frac{dr}{dz} \Big|_2 = - \frac{\partial \varphi / \partial z}{\partial \varphi / \partial r}$$

уравнения характеристик для уравнения обратной задачи (1.15) принимают вид ( $p = \partial \varphi / \partial z$ ,  $q = \partial \varphi / \partial r$ )

первое семейство	второе семейство	
$w_z dr - w_r dz = 0$	$p dz + q dr = 0$	
$w_z (pdq - qdp) = Gdz$	$q (w_z dp + w_r dq) = -Gdz$	(1.21)
$d\varphi = pdz + qdr$	$d\varphi = pdz + qdr = 0$	

Отсюда видно, что вдоль характеристик первого семейства  $d\psi = 0$ , т. е. они являются меридиональными линиями тока, и что вдоль характеристик второго семейства  $d\varphi = 0$ , т. е. характеристики этого семейства — суть сечения поверхности  $S_2'$  меридиональными плоскостями  $\varphi = \text{const}$ .

Итак, поверхность лопасти  $\varphi = \varphi(r, z)$  будет интегральной поверхностью уравнения (1.15), расположенной в кольцевом канале и покрытой характеристиками двух разных семейств: характеристики первого семейства образуются в результате пересечения поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$  с поверхностями вращения, образующие которых являются меридиональными линиями тока  $\psi(r, z) = \text{const}$ ; характеристики второго семейства — в результате пересечения поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$  меридиональными плоскостями  $\varphi = \text{const}$ . Очевидно, что вместо характеристик, расположенных на интегральной поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$ , можно рассматривать их проекции  $\psi(r, z) = \text{const}$  и  $\varphi(r, z) = \text{const}$  на какую-либо фиксированную меридиональную плоскость  $r, z$ , что делает изучение их поведения более наглядным (эти проекции характеристик первого и второго семейств изображены на фиг. 2—4 соответственно сплошными и пунктирными слабыми линиями).

**2. Постановка задачи.** В области  $\Omega (A'B'C'D'$ , фиг. 2, а), состоящей из подобластей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ , надо построить решение, для которого впереди ( $\Omega_1$ ) и позади ( $\Omega_3$ ) рабочего колеса уравнения задачи равномерно эллиптически, а в пределах рабочего колеса ( $\Omega_2$ ) — гиперболически. При переходе из  $\Omega_1$  в  $\Omega_2$  и из  $\Omega_2$  в  $\Omega_3$ , и наоборот, необходимо осуществлять склейку функции тока и ее первых производных на линиях этого перехода с тем, чтобы здесь отсутствовали скачки и изломы функций тока. Рассмотрим два случая решения задачи в  $\Omega$ : в первом (а) задается входная кромка, а во втором (б) — выходная; в том и другом случаях функция тока  $\psi(r, z)$  (т. е. меридиональный поток) в  $\Omega_2$  обычно задается, а в  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  ее необходимо построить (т. е. решить соответствующие краевые задачи относительно  $\psi(r, z)$ ).

а) При задании входной кромки для построения меридионального потока в  $\Omega$  приходится решать смешанную краевую задачу (на  $A'A$   $\psi = 0$ , на  $BB'$   $\psi = \text{const} > 0$ , на  $A'B'$   $\partial \psi / \partial s = 0$ , на  $AB$   $(\partial \psi / \partial z) / (\partial \psi / \partial r) = -\operatorname{tg} \gamma_1 = f_1(l_1)$ ) для эллиптической системы (1.8), которой эквива-

лентно одно равномерно эллиптическое уравнение с ограниченной нелинейной правой частью при заданных  $h^*(\psi)$  и  $c_u r = f_1(\psi)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r^2 \frac{dh^*}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{d(c_u r)^2}{d\psi} \quad (2.1)$$

Далее, в  $\Omega_2$  задается функция тока  $\psi(r, z)$  с учетом условия  $\text{tg } \gamma_1 = -f_1(l_1)$  вдоль  $AB$  вплоть до кривой  $CD$ , которая определяется в результате решения обратной задачи в  $\Omega_2$  для гиперболического уравнения (1.15), при этом определяются также  $\text{tg } \gamma_2 = -f_2(l_2)$ ,  $h^*(\psi)$  и  $c_u r = f_2(\psi)$  вдоль  $CD$ , после чего решается смешанная задача ( $DD'\psi = 0$ ,  $\psi = \text{const} > 0$  на  $CC'$ ,  $\text{tg } \gamma_2 = -f_2(l_2)$  на  $DC$ ,  $\partial\psi/\partial s = 0$  или  $\psi(l_3)$  на  $D'C'$ ) в  $\Omega_3$  для уравнения (2.1). Следует отметить, что задание  $\psi(r, z)$  в  $\Omega_2$  можно также осуществлять графически, плавно переходя вниз по потоку от  $AB$  к вполне определенному по каким-либо соображениям распределению линий тока вплоть до окрестности  $CD$ , и только после определения внутри  $\Omega_2$  величин  $w_r$  и  $w_z$  из (1.13) с учетом функции  $\chi(r, z)$ , которая также задается заранее, можно переходить к решению обратной задачи в подобласти  $\Omega_2$ .

б) При задании выходной кромки построение решения осуществляется в направлении вверх по потоку, а именно: вдоль  $CD$  задается  $\text{tg } \gamma_2 = -f_2(l_2)$  или  $\psi(l_2)$ , а в подобласти  $\Omega_2$  задаются функции  $\psi(r, z)$  и  $\chi(r, z)$  вплоть до кривой  $AB$ , которая определяется, исходя из определенных (заранее заданных) условий обтекания входной кромки, после решения обратной задачи для (1.15) в подобласти  $\Omega_2$ . При этом определяются также  $\text{tg } \gamma_1 = -f_1(l_1)$  и  $\psi(l_1)$  на  $AB$ , после чего решаются смешанные краевые задачи для уравнения (2.1) в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$ .

В обоих случаях решения обратной задачи (т. е. задачи построения лопасти в  $\Omega_2$ ) с учетом течения в  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  обеспечивается учет взаимного влияния подводящего и отводящего каналов и смежных решеток на рабочее колесо в рамках теории осесимметричной задачи.

Обратимся теперь к возможным вариантам постановки начальных и краевых условий для гиперболического уравнения (1.15) или (1.16). Для приложений важны задачи Гурса и первая, вторая, третья смешанные.

Во всех этих четырех задачах задаются входная кромка  $ab$  или ее проекция  $AB$  и функция  $\varphi(s)$  на одной заранее известной характеристике первого семейства, например на  $AD$ . Из условий согласования в точке  $A$  определяются  $p_0$  и  $q_0$ ;  $p' = \partial\varphi/\partial s$ , а  $q' = \partial\varphi/\partial n$  на  $AD$  при этом можно сразу найти из уравнения (1.16), считая его линейным относительно  $q'$

$$q' = (p' w_s r^2)^{-1} \exp \left( \int_{s_0}^s \frac{2\omega \sin \gamma}{p' w_s r} ds' \right) \left\{ (q' p' w_s r^2)_0 + \int_{s_0}^s \left( r \chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta - 2\omega r p' \cos \gamma - p'^2 \frac{\partial(w_s r^2)}{\partial n} \right) \exp \left( - \int_{s_0}^{s'} \frac{2\omega \sin \gamma}{p' w_s r} ds'' \right) ds' \right\}$$

После этого находим

$$p = p' \cos \gamma - q' \sin \gamma \quad \text{и} \quad q = q' \cos \gamma + p' \sin \gamma \quad \text{на} \quad AD$$

В приложениях на  $AD$  обычно задается не  $\varphi(s)$ , а  $c_u r = f(s)$ , поэтому из (1.12) сразу определяется  $p'(s)$ , а  $\varphi(s)$  — из решения задачи Коши

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{c_u r - \omega r^2}{w_s r^2} = b(s), \quad \varphi|_{s=s_0} = \varphi_0$$

где  $\varphi_0 = \text{const}$ , например нуль.

Разберем теперь возможные случаи задания входной кромки в зависимости от типа набегающего на крылатку потока.

1. Задача Гурса ставится при безвихревом набегающем на крылатку потоке, входная кромка  $ab$  при этом является лежащей в меридиональной плоскости характеристикой второго семейства  $\varphi(l_1) = \text{const}$ , которая задается в параметрическом виде:  $r(l_1)$ ,  $z(l_1)$ , здесь  $l_1$  — координата, отсчитываемая вдоль  $AB$  (фиг. 2, а). Условия согласования в точке  $A$

$$p_0 = -q_0 \operatorname{tg} \varepsilon_0, \quad p_0' = p_0 \cos \gamma_0 + q_0 \sin \gamma_0$$

Учитывая, что на характеристике второго семейства  $AB$

$$dz = \cos \varepsilon_1 dl_1, \quad p = -q \operatorname{tg} \varepsilon_1, \quad w_z \operatorname{tg} \varepsilon_1 - w_r \neq 0$$

из (1.21) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dl_1} = & \frac{1}{r^2 (w_z \operatorname{tg} \varepsilon_1 - w_r)} \left\{ \frac{\cos \varepsilon_1}{q} \left( r \chi \frac{dH^*}{d\psi} + \eta \right) + \right. \\ & + 2\omega r \sin \varepsilon_1 + q \cos \varepsilon_1 \left[ \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial z} - \left( \frac{\partial (w_z r^2)}{\partial z} - \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} \right) \operatorname{tg} \varepsilon_1 - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial (w_z r^2)}{\partial r} \operatorname{tg}^2 \varepsilon_1 \right] - q w_z r^2 \frac{d \operatorname{tg} \varepsilon_1}{dl_1} \right\} \end{aligned}$$

Решение задачи Коши для этого нелинейного уравнения позволяет найти  $q(l_1)$  и  $p(l_1) = -q(l_1) \operatorname{tg} \varepsilon_1$  на  $AB$  ( $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  — углы наклона  $AB$  к оси  $z$ ). Задача Гурса решается в области  $ABCD$ , и при этом на  $CD$  получается некоторое распределение  $c_{ur} = \bar{f}_2(\psi)$ , которое может быть, например, больше заданной позади крылатки величины  $c_{ur} = f_2(\psi)$ . В связи с этим необходимо продолжить решение вниз по потоку за  $CD$ , для этого полученное на  $BC$  значение  $c_{ur}$  непрерывно уменьшают до некоторой точки  $P$ , в которой  $c_{ur} = f_2(\psi)$ , и решается опять задача Гурса в области  $DPCQ$ , после чего проводится меридиональная проекция выходной кромки  $DP$ , исходя из условия получения на ней заданного значения  $c_{ur} = f_2(\psi)$ . Если же  $\bar{f}_2(\psi)$  меньше  $f_2(\psi)$ , то внутри  $ABCD$  проводится проекция выходной кромки  $DF$  также по заданному значению  $f_2(\psi)$ . Очевидно, что подобное построение выходной кромки следует проводить только при вихревом на выходе из крылатки потоке; при безвихревом потоке на выходе кромка  $CD$  лежит в меридиональной плоскости и на ней  $c_{ur} = f_2(\psi) = \text{const}$ .

Смешанные задачи ставятся при вихревом набегающем на крылатку потоке; входная кромка  $ab$  при этом не лежит в меридиональной плоскости, т. е. ее проекция  $AB$  является нехарактеристической кривой  $\varphi(l_1) \neq \text{const}$ .

2. Первая смешанная задача ставится при  $p_1 > -q_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1$ , т. е. когда характеристика второго семейства  $AK$  лежит внутри угла  $BAD$  (фиг. 2, б). В этом случае задаются данные Коши, т. е. параметрическое уравнение входной кромки  $r(l_1)$ ,  $z(l_1)$ ,  $\varphi(l_1)$  и какая-либо внешняя для  $ab$  производная, в качестве которой берется  $p_1' = (f_1(\psi) - \omega r^2) / w_{s1} r^2$ , так как  $c_u r = f_1(\psi)$  и  $w_{s1}$  — задаются. Условия согласования в точке  $A$

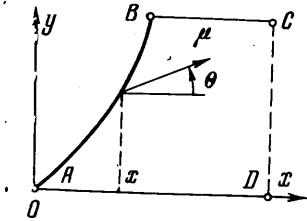
$$(d\varphi / dl_1)_0 = p_0 \cos \varepsilon_0 + q_0 \sin \varepsilon_0, \quad p_0' = p_0 \cos \gamma_0 + q_0 \sin \gamma_0$$

Из этой же системы находят  $p$  и  $q$  на  $AB$ . Задача Коши решается в области  $ABK$ , а потом в области  $AKCD$  строится решение задачи Гурса и определяется выходная кромка.

3. Вторая смешанная задача ставится при  $p_1 < -q_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1$ , т. е. когда характеристика второго семейства  $AM$  лежит вне угла  $BAD$  (фиг. 2, в). В этом случае задается только параметрическое уравнение меридиональной проекции входной кромки  $r(l_1)$ ,  $z(l_1)$  и еще внешняя для  $ab$  производная  $P(l_1) = (\partial\varphi / \partial\mu)_1$ , при этом направление  $\mu(l_1)$  ни в одной точке  $AB$  не должно совпадать с направлением характеристик первого семейства



$s(l_1)$ . В самом деле, рассмотрим уравнение  $\partial^2 v / \partial x \partial y = f(x, y)$  в четырехугольнике  $ABCD$  (фиг. 3); его характеристиками являются два семейства прямых  $y = \text{const}$  и  $x = \text{const}$ . Интегрирование этого уравнения вдоль  $y$  при фиксированном  $x$  приводит к такому значению



Фиг. 3

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{y(x)} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(x, 0)} + \int_0^{y(x)} f(x, \xi) d\xi$$

которое определяется задаваемой на  $AD$  функцией  $v(x, 0)$  и правой частью уравнения  $f(x, y)$  и поэтому не может быть на  $AB$  задано произвольно. Если же на  $AB$  задается величина  $\partial v / \partial \mu$ , не равная  $\partial v / \partial x$  ни в одной точке  $AB$ , то она позволяет из найденного только что  $(\partial v / \partial x)_{y(x)}$  однозначно определить  $(\partial v / \partial y)_{y(x)}$ , что обеспечивает однозначную разрешимость второй смешанной задачи с учетом условий согласования в точке  $A$ . Подобные соображения, конечно, справедливы и для квазилинейных уравнений гиперболического типа, в том числе и для второй смешанной задачи, рассматриваемой в сверхзвуковой газовой динамике; к сожалению, отмеченное только что ограничение там не всегда подчеркивается. Из сказанного очевидно, что в данном случае нельзя задавать определяемому через  $c_u r = f_1(\psi)$  и  $w_{s1}$  из (1.12) величину  $p'(l_1)$ , а только — любую другую внешнюю производную  $P(l_1) = (\partial \phi / \partial \mu)_1$ , не равную  $p'(l_1)$ . Условия согласования в точке  $A$  при этом примут вид

$$p_0' = p_0 \cos \gamma_0 + q_0 \sin \gamma_0, \quad P_0 = p_0 \cos \theta_0 + q_0 \sin \theta_0$$

Рассматриваемый случай является единственным, в котором задается только меридиональная проекция входной кромки при  $dH^* / d\psi \neq 0$  и  $\eta \neq 0$ . Решая вторую смешанную задачу в области  $ABL$ , находим  $\phi(l_1) \neq \text{const}$ . Если при этом входная кромка  $ab$  такова, что выполняются условия безотрывного ее обтекания, то заданное значение  $P(l_1)$  сохраняется; в сущности это означает, что  $p'(l_1)$  и  $P(l_1)$  мало отличаются друг от друга (в пределах допустимых углов атаки). Далее, в области  $LBCD$  решается задача Гурса и определяется выходная кромка.

4. Третья смешанная задача ставится также при  $p_1 < -q_1 \tan \varepsilon_1$  (фиг. 2, е). В этом случае задается только параметрическое уравнение входной кромки  $r(l_1)$ ,  $z(l_1)$ ,  $\phi(l_1)$ ; условия согласования в точке  $A$  такие же, как и в первой смешанной задаче. Сначала решается третья смешанная задача в области  $ABL$  и определяются  $p(l_1)$  и  $q(l_1)$ . Если они удовлетворяют условию безотрывного обтекания входной кромки  $ab$ , то заданная функция  $\phi(l_1)$  сохраняется, и далее в области  $LBCD$  решается задача Гурса и определяется форма выходной кромки.

Все рассмотренные задачи аналогично формулируются и при задании выходной кромки  $cd$  (или ее проекции  $CD$ ), построение решения при этом осуществляется в направлении вверх по потоку, и входная кромка  $ab$  при этом определяется точно таким же образом, как выходная, т. е. исходя из заданной впереди крылатки функции  $c_u r = f_1(\psi)$ .

Напомним, что во всех четырех рассмотренных задачах предполагается, что ни в одной точке замкнутой области  $\Omega_2$  построения решения не наблюдаются случаи вырождения типа или порядка уравнений (1.15) или (1.18).

Вернемся теперь к методам Бауэрфельда и И. Н. Вознесенского. Эти методы представляют собой в сущности графо-аналитическое решение задачи Гурса, и в них при безвихревом набегающем на крылатку меридиональном потоке входная кромка всегда должна лежать в меридиональной плоскости. Решение обратной задачи по методу Бауэрфельда фактически сводится к решению задачи Коши вдоль характери-

стик первого семейства

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{c_u r - \omega r^2}{w_g r^2} = b(s, \varphi), \quad \varphi|_{s=s_1} = \text{const}$$

при выполнении условия (1.11). Эту задачу лучше решать не графо-аналитически [1, 2], а методом Рунге — Кутты [9], обеспечивающим большую точность. Очевидно, что метод Бауэрсфельда представляет собой весьма эффективный способ правильного решения задачи Гурса для уравнения (1.16) в пределах области влияния  $\Omega_2$  (фиг. 2, а) при безвихревом меридиональном потоке; любой другой метод, в том числе, и метод характеристик, будет безусловно более сложным в этом случае.

В методе И. Н. Вознесенского меридиональный поток в пределах колеса и за ним вихревой (и, в частности, равноскоростной) несмотря на то, что впереди колеса этот поток может быть только безвихревым. В связи с этим выходная кромка не может лежать в меридиональной плоскости и должна быть построена по заданному за колесом значению  $c_u r = f_1(\varphi)$  точно таким же образом, как указано в задаче Гурса. Отсюда видно, что неточность метода И. Н. Вознесенского, в котором входная кромка задается не лежащей в меридиональной плоскости и считается вихревой линией, связана с неправильным допущением, что набегающий поток вихревой. В связи с тем, что в этом методе вихревые линии при безвихревом набегающем на крылатку потоке хотя и лежат на интегральной поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$ , но не совпадают с меридиональными сечениями этой поверхности, графо-аналитический метод [3, 4] не может обеспечить необходимой точности решения. Представляется более целесообразным решать обратную задачу в этом случае методом характеристик или каким-либо другим численным методом, ставя задачу Гурса для уравнения (1.15) или (1.16).

Методом характеристик можно решать и смешанные задачи, в том числе, и при равноскоростном меридиональном потоке до, внутри и позади крылатки, т. е. и ту задачу, которую поставил И. Н. Вознесенский. Доводы в пользу этого метода при решении соответствующих задач для уравнения (1.15) связаны прежде всего с тем, что сетка характеристик первого семейства заранее известна в силу задания меридионального потока.

Отметим, что при соответствующей гладкости коэффициентов и правой части уравнений задачи Гурса и первая смешанная задача для квазилинейного уравнения (1.15) или (1.16) в пределах области влияния  $ABCD$  однозначно разрешима в классе  $C^{(2)}$  [10], если задаваемые вдоль гладких кривых  $AB$  и  $AD$  функции  $\varphi \in C^{(2)}$ ,  $p \in C^{(1)}$ ,  $q \in C^{(1)}$  (иначе говоря, вдоль  $AB$  и  $AD$  задаваемая функция  $c_u r$  должна быть непрерывной вместе со своими первыми производными) и заданы таким образом, что в точке  $A$  они удовлетворяют условиям согласования, на нехарактеристической кривой  $AB$  — условию полосы, а вдоль характеристик  $AB$  (если кромка лежит в меридиональной плоскости) и  $AD$  — условиям совместности.

Однозначная разрешимость в классическом смысле при указанных выше условиях доказана для квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных второго порядка только для задач Гурса и Коши [10], однако очевидно, что первая смешанная задача может быть к ним сведена. Вопрос об однозначной разрешимости второй и третьей смешанных задач для таких уравнений до сих пор остается открытым [10], однако, по аналогии с линейными уравнениями, ее все же можно предполагать.

Если задаваемые на  $AB$  и  $AD$  функции  $p$  и  $q$ , а также их первые и старшие производные в отдельных точках терпят разрыв (слабый) первого рода, то аналогичным разрывом обладает и решение в пределах всей области влияния  $ABCD$  и далее до  $PQ$ , и эти разрывы распространяются вдоль характеристик (которые являются кривыми ветвления решения), исходящих из соответствующих точек на  $AB$  и  $AD$ .

Итак, использование общей теории квазилинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа и, в частности, теории характеристик для таких уравнений позволило исследовать условия корректной постановки обратных задач в смысле их однозначной разрешимости для ряда важных в приложениях случаях, когда не наблюдается вырождение типа и порядка уравнения (1.15) или (1.16), а также выяснить границы применимости известных ранее методов Бауэрсфельда и И. Н. Вознесенского с устранением неточностей последнего.

Следует еще отметить, что при решении обратной задачи в постановке Бауэрсфельда — Вознесенского основное уравнение задачи (1.15) можно записать не только относительно  $\varphi(r, z)$ , но также относительно  $c_u r = f(r, z)$ , как это делал Мизес [8], если из системы (1.14) исключить не  $c_u r$ , а  $p$  и  $q$ . Возможна и другая постановка обратной задачи, когда задаются входная кромка и распределение  $c_u r = f(r, z)$  во всей области  $ABCD$  и определяется (а не задается) меридиональный поток в  $ABCD$ , а по нему и  $c_u r = f(r, z)$  в  $ABCD$  находится из (1.12) поверхность лопастей  $\varphi = \varphi(r, z)$ . В первой широко распространенной постановке обычно задается меридиональный поток в  $ABCD$ ,

т. е. распределение окружной составляющей вихря, и во второй при задании  $c_u r = f(r, z)$  в  $ABCD$  — распределение осевой и радиальной составляющих вихря.

**3. Случай вырождения порядка и типа уравнений.** Из (1.19) или (1.20) видно, что возможны два случая вырождения уравнения (1.15) или (1.16).

1. Вырождение порядка уравнения, когда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

2. Вырождение типа уравнение с образованием параболической линии, когда

$$\frac{\partial \varphi / \partial z}{\partial \varphi / \partial r} = -\frac{w_r}{w_z} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad (3.2)$$

Эти случаи вырождения уравнения обратной задачи (1.15) или (1.16) возможны как на границе области  $\Omega_2$ , так и внутри нее в отдельных точках, а также вдоль отдельных отрезков кривых только в том случае, когда на них  $w_u = 0$ , т. е. когда относительный поток в рабочем колесе или абсолютный в неподвижной трехмерной решетке на этих кривых чисто осевой. Очевидно, что при  $w_u = 0$  из (1.4) получается  $c_u = \omega r$ . Иначе говоря, вдоль линии вырождения происходит вращение жидкости в крылатке по закону твердого тела. Из уравнений (1.19) или (1.20) следует, что переход через линию параболического вырождения внутри  $\Omega_2$  не приводит к изменению типа уравнения (1.15) или (1.16). Кроме того, в данном случае имеем дело с квазилинейным гиперболическим уравнением; линия параболического вырождения такого уравнения зависит от решения, т. е. не является заранее известной, как это имеет место, например, в классическом случае линейного уравнения Трикоми.

Рассмотрим геометрический смысл этих двух случаев вырождения.

В первом случае расположенные на интегральной поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$  точка или линия вырождения касаются меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$ , т. е. точка или вся эта линия лежат в одной плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Если вырождение происходит в отдельной точке, то в этой точке интегральная поверхность  $\varphi = \varphi(r, z)$  имеет экстремальную точку<sup>1</sup>, так как в ней  $\partial \varphi / \partial r = \partial \varphi / \partial z = 0$ ; если же оно имеет место вдоль отдельной линии, то вдоль нее на интегральной поверхности не только  $\partial \varphi / \partial r = \partial \varphi / \partial z = 0$ , но и  $\varphi(r, z) = \text{const}$ , а это означает, что эта линия совпадает с характеристикой второго семейства, и, стало быть, можно ставить задачу Гурса, если вдоль  $AB$  и  $CD$  (фиг. 2, а) происходит подобное вырождение. Отметим еще также, что вдоль линии вырождения, порядка, как это видно из (1.15) и (3.1), всегда должно выполняться условие

$$r\chi \frac{dH^*}{d\varphi} + \eta = 0$$

которое, в силу  $c_u = \omega r$ , приводит к уравнению (2.1), если в нем учесть стеснение  $\chi(r, z)$ . Примером образования линии вырождения порядка уравнения (1.15) является лопасть, у которой входная (или выходная) кромка лежит в меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$  и если, кроме того, поверхность лопасти касается плоскости  $\varphi = \text{const}$  вдоль этих кромок.

Во втором случае линия параболического вырождения уравнения (1.15) или (1.16), как видно из (3.2), представляет собой геометрическое место точек возврата характеристик первого и второго семейства, которые касаются друг друга на этой линии  $RS$  (фиг. 4), иначе говоря, на  $RS$  меридиональные линии тока и меридиональные сечения поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$  касаются, но линии касания образуют некоторый угол с линией вырождения  $RS$ . Так как вдоль линии параболическости  $\partial \varphi / \partial s = 0$ , то из (1.16) видно, что на ней должно выполняться условие

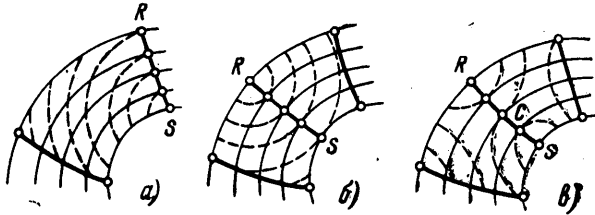
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{w_s r^2} \left( r\chi \frac{dH^*}{d\varphi} + \eta + 2\omega r \sin \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) = 0$$

Из фиг. 4 видно, что интегральная поверхность  $\varphi = \varphi(r, z)$  в окрестности линии параболическости  $RS$  представляет собой четверть (фиг. 4, а) или половину (фиг. 4, б) седлообразной поверхности. Если же эта поверхность в окрестности  $RS$  образует

<sup>1</sup> В этом случае характеристики второго семейства образуют замкнутые кривые внутри  $ABCD$ .

полное седло, то на  $RS$  существует такая гиперболическая точка  $C$  поверхности  $\varphi = \varphi(r, z)$ , в которой характеристика второго семейства имеет точку перегиба.

Вопрос о корректной постановке задач Коши, Гурса и смешанных при наличии линии параболичности на границе области (фиг. 4, *a*) в настоящее время для квазилинейных гиперболических уравнений типа (1.15) или (1.16) исследован недостаточно. Еще большие трудности возникают при наличии линии параболичности внутри области (фиг. 4, *b*, *в*), которая заранее неизвестна, так как зависит от решения. Кроме того, поверхность  $\varphi = \varphi(r, z)$  в турбомашинах обычно такова, как уже отмечалось (1.17), что появление предельных линий на ней исключено, так как  $p$  и  $q$  представляют собой ограниченные по модулю величины, нигде не достигающие бесконечного значения; эта поверхность также не имеет особых точек, так как  $p$  и  $q$  хотя и могут одновременно обратиться в нуль, но зато первая производная по третьей переменной  $\varphi$  равна единице.



Фиг. 4

Исследование вопросов корректной постановки задач для квазилинейных гиперболических уравнений при наличии точек или линий параболического вырождения на границе и внутри области представляет самостоятельную и весьма сложную математическую задачу. Возникают также трудности и при решении таких задач, так как в окрестности линии параболического вырождения касание характеристик приводит к неустойчивости в вычислениях при использовании обычного метода характеристик, и поэтому здесь необходимо применение других численных методов.

В заключение благодарю Г. Ю. Степанова за обсуждение работы.

Поступило 2 II 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bauerfeld W. Theorie und Berechnung der Vollturbinen und Kreiselpumpen, 1905, В. 49, No 49, S. 2007—2008.
2. Bauerfeld W. Die Konstruktion der Francis — Schaufel nach der Lorenzschenen Turbinentheorie und ihre Eigenschaften, 1912, В. 56, No 51, S. 2045—2051.
3. Вознесенский И. Н. Уравнения гидродинамики и конструкция водяных турбин (стр. 81—91 в кн. И. Н. Вознесенского «Жизнь, деятельность и избранные труды», Машгиз, 1952).
4. Колтон А. Ю., Эттингер И. Э. Основы теории и гидродинамического расчета водяных турбин. Машгиз, 1958.
5. Сироткин Я. А. К постановке прямой задачи вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашинах. Инж. ж., 1963, т. 3, № 2.
6. Сироткин Я. А. К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашинах. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2.
7. Gavalos F. The dynamics of turboflow, Z, angew. Math. und Phys., 1959, No 4.
8. Mises R. Theorie der Wasseraäder. ZMP, 1909, В. 57, No 1, S. 1—120.
9. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II. Физматгиз, 1959.
10. Курянт Р. Уравнение с частными производными. Изд. «Мир», 1964.