

ОБТЕКАНИЕ РЕШЕТКИ ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПРОФИЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОТОКОМ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. Э. САРЕН

(Новосибирск)

Неустановившемуся обтеканию решетки профилей посвящено большое количество работ. Большинство авторов решают задачу для слабо изогнутых профилей, колеблющихся под малым углом атаки.

Из других работ следует отметить работу Зэнгена [1], в которой исследовано обтекание густой решетки пластин, колеблющихся синхронно и синфазно в потенциальном потоке жидкости при большом угле атаки. Г. С. Самойлович [2] исследовал обтекание решетки профилей произвольной формы, колеблющихся с произвольным сдвигом фазы между соседними профилями. Решение для случая переменной циркуляции дано им в квазистационарной постановке. Г. Ю. Степанов [3] рассмотрел тот же вопрос с линейным подходом к потоку за решеткой. В. В. Мусатов [4] рассмотрел задачу об обтекании решетки пластин, колеблющихся с произвольным сдвигом фазы между соседними профилями в потоке жидкости также при большом угле атаки, причем учитывалось изменение взаимного расположения профилей в процессе колебаний.

В данной работе рассматривается обтекание идеальной несжимаемой жидкостью решетки тонких криволинейных колеблющихся профилей с учетом относительных смещений профилей в процессе колебаний. Для определения погонной интенсивности присоединенных вихрей получено линейное интегральное уравнение, являющееся обобщением на рассматриваемый случай уравнения Бирнбаума (см. [5]). Приведены формулы для расчета нестационарных аэродинамических сил и момента, действующих на профили решетки. В качестве примера приведен расчет аэродинамических сил и момента в квазистационарной постановке задачи.

1. В комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим решетку тонких криволинейных профилей (фиг. 1), совершающих установившиеся гармонические колебания в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Система координат x, y связана со средним положением исходного профиля. Начало системы координат помещено в переднюю кромку исходного профиля и ось x направлена вдоль хорды вниз по потоку. Исходный профиль задается дужкой

$$y = Y(x) \quad (0 \leq x \leq b)$$

где b — длина хорды профиля.

Профили колеблются с малыми амплитудами, синхронно и с произвольным сдвигом фазы $m\pi$ ($|m| \leq 1$) между соседними профилями. Течение жидкости вне решетки профилей и вихревых следов, сходящих с каждого профиля, будем предполагать потенциальным. Потенциал скорости в системе координат x, y удовлетворяет уравнению Лапласа и следующим граничным условиям.

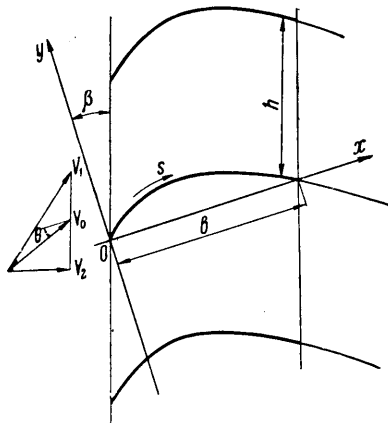
1. Условию безотрывного обтекания на профилях решетки.
2. Условию Жуковского — Кутта о конечности скорости на задних кромках профилей.
3. Условию затухания нестационарных возмущенных скоростей на бесконечном удалении перед решеткой.

Заменяем каждый профиль решетки непрерывным вихревым слоем, искомую погонную интенсивность которого представим в виде

$$\Gamma_k^*(s, t) = \Gamma_0(s) + \Gamma(s) e^{j(\omega t + km\pi)}, \quad \Gamma(s) = \Gamma'(s) + j\Gamma''(s) \quad (1.1)$$

Здесь $\Gamma_0(s)$ — погонная интенсивность вихрей в стационарном потоке; s — длина дуги профиля, отсчитываемая от передней кромки; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер профиля в решетке; j — мнимая единица, служащая для обозначения только временных процессов.

По теореме Томсона изменение интенсивности вихрей на профиле на величину $\Delta\Gamma$ вызывает появление в жидкости свободного вихря с интенсивностью — $\Delta\Gamma$. Следуя схеме Бирнбаума [5], будем предполагать, что свободные вихри непрерывно возникают в каждой точке профиля и движутся относительно профиля со скоростью $W_{0\tau}(s)$, равной полусумме предельных скоростей жидкости при подходе к профилю сверху и снизу в стационарном потоке. Достигая задней кромки, свободные вихри продолжают двигаться со скоростью стационарного потока и образуют вихревой след, совпадающий с линией тока в стационарном потоке. Интенсивность слоя свободных вихрей $H_k(s, t)$ равна сумме интенсивностей свободных вихрей, возникающих в моменты времени $t_1 \leq t$ в точках $s_1 \leq s$ и достигших ко времени t точки s k -го профиля. Таким образом,



Фиг. 1

и интегрирование ведется вдоль дужки профиля.

Учитывая (1.1), для свободных вихрей на k -м профиле и в следе k -го профиля получим соответственно

$$H_k(s, t) = -j\omega e^{j(\omega t + km\pi)} \int_0^s \frac{1}{W_{0\tau}(s_1)} \Gamma(s_1) e^{-j\omega T(s_1, s)} ds_1$$

$$T(s_1, s) = \int_{s_1}^s \frac{ds_2}{W_{0\tau}(s_2)} \quad (1.2)$$

$$H_k(\sigma, t) = H_k(s_0, t) e^{-j\omega T(0, \sigma)}, \quad T(0, \sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{W_{02}(\sigma)} \quad (1.3)$$

Здесь s_0 — полная длина дужки профиля; σ — длина дуги линии, совпадающей с вихревым следом, отсчитываемая от задней кромки профиля; $W_{02}(\sigma)$ — скорость сноса свободных вихрей в следе.

Пусть $W_n(x, y, t)$ — нормальная составляющая возмущенной скорости жидкости в точке (x, y) исходного профиля; $u_n(x, y, t)$ — нормальная составляющая скорости колебания в точке (x, y) исходного профиля. Условие непроницаемости для исходного профиля можно записать в виде

$$W_n(x, y, t) - u_n(x, y, t) = 0 \quad (1.4)$$

Возмущенная скорость жидкости в точке (x, y) в момент времени t равна

$$W(x, y, t) = V_0 + v(x, y, t) + v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) \quad (1.5)$$

Здесь V_0 — средняя скорость жидкости, равная полусумме скоростей на бесконечном удалении перед и за решеткой в стационарном потоке; v — скорость жидкости, индуцируемая присоединенными вихрями; v_1, v_2 — соответственно скорости жидкости, индуцируемые свободными вихрями на профилях и вихревыми следами.

При определении возмущенной скорости жидкости будем учитывать относительное смещение профилей в процессе колебаний. Ограничиваясь линейной постановкой задачи, будем удерживать при этом только члены не выше первого порядка малости относительно амплитуды колебаний профилей.

2. Обозначим через Δz перемещение в процессе колебаний точки $(x, Y(x))$ исходного профиля. Для случая произвольной малой деформации профиля по гармоническому закону имеем

$$\Delta z = \delta(t) F(x), \quad \delta(t) = \delta_0 e^{j\omega t} \quad (|\delta_0| \ll 1) \quad (2.1)$$

Здесь $F(x) = F'(x) + iF''(x)$ — функция, характеризующая форму колебаний профиля; δ_0 — безразмерная амплитуда колебаний профиля.

Назовем соответственными точки профилей, лежащие на одной прямой, параллельной фронту решетки, когда каждый профиль находится в среднем положении.

Комплексные координаты соответственных точек профилей в момент времени t равны

$$Z(t) = z_0 + ikhe^{-i\beta} + \Delta z e^{jkm\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.2)$$

$$z_0 = x + iY(x)$$

Здесь h — шаг решетки; β — угол выноса; z_0 — комплексная координата точки исходного профиля в его среднем положении.

Бесконечный ряд элементарных вихрей $\Gamma_k^* ds$, расположенных в соответственных точках профилей решетки ζ_k , индуцирует в точке z комплексно-сопряженную скорость

$$d(v_x - iv_y) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_k^* ds}{z - \zeta_k}$$

Учитывая (2.1) и (2.2) для скорости, индуцируемой в точке исходного профиля присоединенными вихрями всех профилей решетки, получим выражение

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{s_0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{\Gamma_0(s) + \Gamma(s) e^{j(\omega t + km\pi)}}{z_0 - \zeta_0 + \delta_0 [F(x) - F(\xi)] e^{jkm\pi} e^{j\omega t} - ikhe^{-i\beta}} ds$$

Здесь интегрирование ведется вдоль дужки профиля

$$\zeta_0 = \xi + iY(\xi)$$

С точностью до членов первого порядка малости относительно амплитуды колебаний профиля подынтегральное выражение представим в виде

$$\Gamma_0(s) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z_0 - \zeta_0 - ikhe^{-i\beta}} + \Gamma(s) e^{j\omega t} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jkm\pi}}{z_0 - \zeta_0 - ikhe^{-i\beta}} -$$

$$- \Gamma_0(s) \delta_0 e^{j\omega t} \left\{ F(x) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[z_0 - \zeta_0 - ikhe^{-i\beta}]^2} - F(\xi) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jkm\pi}}{[z_0 - \zeta_0 - ikhe^{-i\beta}]^2} \right\}$$

Последнее выражение можно преобразовать и просуммировать

$$\begin{aligned} \Gamma_0(s) \frac{\kappa}{b} \left[\left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right)^{-1} + \sum'_{-\infty}^{\infty} \left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} - ik\pi \right)^{-1} \right] + \Gamma(s) e^{j\omega t} \frac{\kappa}{b} \left[\left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + \sum'_{-\infty}^{\infty} e^{jk\pi} \left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} - ik\pi \right)^{-1} \right] - \Gamma_0(s) \delta_0 e^{j\omega t} \frac{\kappa^2}{b} \left\{ \frac{F(x)}{b} \left[\left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right)^{-2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum'_{-\infty}^{\infty} e^{jk\pi} \left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} - ik\pi \right)^{-2} \right] - \frac{F(\xi)}{b} \left[\left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right)^{-2} + \sum'_{-\infty}^{\infty} e^{jk\pi} \left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} - ik\pi \right)^{-2} \right] \right\} = \\ = \frac{\pi i}{b} \Gamma_0(s) R_0(z_0, \zeta_0) + \frac{\pi i}{b} \Gamma(s) e^{j\omega t} R(m, z_0, \zeta_0) - \\ - \frac{\pi i}{b} \delta_0 e^{j\omega t} \Gamma_0(s) \left[\frac{F(x)}{b} g_1(z_0, \zeta_0) - \frac{F(\xi)}{b} g_2(m, z_0, \zeta_0) \right] \quad (2.3) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R(m, z_0, \zeta_0) = \frac{\kappa}{\pi i} \left\{ \operatorname{ch} \left[\left(\frac{|m|}{m} - m \right) \kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right] - \right. \\ \left. - ij \operatorname{sh} \left[\left(\frac{|m|}{m} - m \right) \kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right] \right\} \operatorname{csch} \frac{\kappa(z_0 - \zeta_0)}{b} \\ \kappa = \pi \frac{b}{h} e^{i\beta}, \quad R_0(z_0, \zeta_0) = \frac{\kappa}{\pi i} \operatorname{cth} \kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b}, \quad g_1(z_0, \zeta_0) = \frac{\kappa^2}{\pi i} \operatorname{csch}^2 \left(\kappa \frac{z_0 - \zeta_0}{b} \right) \\ g_2(m, z_0, \zeta_0) = \pi i R(m, z_0, \zeta_0) \left[R_0(z_0, \zeta_0) + ij \left(\frac{|m|}{m} - m \right) \frac{\kappa}{\pi i} \right] \end{aligned}$$

Штрих у знаков суммы в левой части выражения (2.3) означает суммирование по всем числам k за исключением $k = 0$. Заметим, что выражение функции R приведено в работах [2,4].

Таким образом, комплексно-сопряженная скорость, индуцируемая присоединенными вихрями на исходном профиле

$$\begin{aligned} v_x - iv_y = \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \Gamma_0(s) R_0(t_0, \zeta_0) ds + e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \Gamma(s) R(m, z_0, \zeta_0) ds - \\ - \delta_0 e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \Gamma_0(s) \left[\frac{F(x)}{b} g_1(z_0, \zeta_0) - \frac{F(\xi)}{b} g_2(m, z_0, \zeta_0) \right] ds \quad (2.4) \end{aligned}$$

Первое и второе слагаемые правой части последнего выражения представляют собой соответственно комплексно-сопряженные скорости, индуцированные стационарными и нестационарными присоединенными вихрями и вычисленные в предположении, что форма решетки не меняется в процессе колебаний. Последнее слагаемое представляет собой дополнительное нестационарное возмущение основной скорости потока, которое не зависит от скорости колебания профиля и в каждый момент времени определяется стационарными параметрами потока и относительным смещением профилей в процессе колебаний. Отметим, что в частном случае изгибных синфазных колебаний профилей решетки указанная дополнительная скорость равна нулю, так как в этом случае имеем

$$F(x) = F(\xi), \quad g_1(z_0, \zeta_0) = g_2(0, z_0, \zeta_0)$$

Учитывая (1.2) и (1.3), с принятой степенью точности получим аналогичным образом выражения скоростей, индуцируемых в каждой точке

(x, y) исходного профиля свободными вихрями на профилях и вихревыми следами

$$v_{1x} - iv_{1y} = -j\omega e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \chi(s) R(m, z_0, \zeta_0) ds \quad (2.5)$$

$$v_{2x} - iv_{2y} = -jqe^{j\omega t} \frac{1}{2b} \chi(s_0) \int_0^{\infty} e^{-j\omega T(0, \sigma)} R(m, z_0, \zeta_0) d\sigma \quad (2.6)$$

$$\left(\chi(s) = \int_0^s \frac{1}{W_{0\tau}(s_1)} \Gamma(s_1) e^{-j\omega T(s_1, s)} ds_1 \right)$$

В правой части выражения (2.6) интегрирование ведется вдоль вихревого следа, который считаем совпадающим с линией тока в стационарном потоке.

Учитывая выражения (1.5) и (2.4) — (2.6), условие непроницаемости профиля с принятой степенью точности запишем в виде

$$\begin{aligned} & \sin(\theta - \varepsilon) + \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \gamma_0(s) R_{0n} \left(\frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) ds + \cos(\theta - \varepsilon) f_1 \delta_0 e^{j\omega t} + \\ & + f_1 \delta_0 e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \gamma_0(s) R_{0\tau} \left(\frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) ds + e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \gamma(s) R_n \left(m, \frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) ds - \\ & - \delta_0 e^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \gamma_0(s) \left[g_{1n} \left(\frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) - g_{2n} \left(m, \frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) \right] ds - \\ & - jqe^{j\omega t} \frac{1}{2b} \int_0^{s_0} \frac{1}{b} \chi(s) R_n \left(m, \frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) ds - \\ & - jqe^{j\omega t} \frac{1}{2b^2} \chi(s_0) \int_0^{\infty} e^{-jqV_0 b^{-1} T(0, \sigma)} R_n \left(m, \frac{x}{b}, \frac{\xi}{b} \right) d\sigma - jq\delta_0 e^{j\omega t} F_n(x) = 0 \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$\gamma_0(s) = \frac{\Gamma_0(s)}{V_0}, \quad \gamma(s) = \frac{\Gamma(s)}{V_0}, \quad q = \frac{\omega b}{V_0}, \quad f_1 = \frac{dF''(x)}{dx}$$

Здесь $F_n(x) = -F'(x) b^{-1} \sin \varepsilon + F''(x) b^{-1} \cos \varepsilon$ — проекция на нормаль к профилю в точке z_0 функции $b^{-1}F(x)$ R_{0n} , R_n , g_{1n} , g_{2n} — соответственно проекции на нормаль к профилю в точке z_0 функций комплексно-сопряженных функций $R_0(z_0, \zeta_0)$, $R(m, z_0, \zeta_0)$, $b^{-1}F(x) g_1(z_0, \zeta_0)$, $b^{-1}F(x) g_2(m, z_0, \zeta_0)$; $R_{0\tau}$ — проекция на касательную к профилю в точке z_0 функции комплексно-сопряженной $R_0(z_0, \zeta_0)$; θ — геометрический угол атаки, образуемый вектором средней скорости потока и осью x ; $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — угол, образуемый касательной к профилю в точке z_0 и осью x .

Уравнение (2.7) представляет собой обобщение интегрального уравнения Бирнбаума на случай решетки тонких криволинейных профилей. В предельном случае при $z_0 = x = s$ и $h \rightarrow \infty$ ($\kappa \rightarrow 0$) уравнение (2.7) переходит в уравнение Бирнбаума для изолированного профиля.

Представим безразмерную погонную интенсивность присоединенных вихрей на исходном профиле в виде линейной функции безразмерных кинематических параметров движения

$$\gamma_0^*(s, t) = \frac{\Gamma_0^*(s, t)}{V_0} = \gamma_0(s) + \gamma^\delta(s) \delta(t) + \gamma^{\delta'}(s) \delta'(t), \quad \delta'(t) = jq\delta(t) \quad (2.8)$$

и будем в дальнейшем под $x, \xi, s, \sigma, T(s_1, s)$ и $T(0, \sigma)$ понимать соот-

ветственно безразмерные величины

$$x/b, \xi/b, s/b, \sigma/b, V_0/bT(s_1, s), V_0/bT(0, \sigma)$$

Уравнение (2.7) распадается на линейные интегральные уравнения относительно $\gamma_0, \gamma^\delta, \gamma^{\delta^*}$

$$\int_0^{s_0} \gamma_0(s) R_{0n}(x, \xi) ds = -2 \sin(\theta - \varepsilon(x)) \quad (2.9)$$

$$\int_0^{s_1} \gamma^\delta(s) R_n(m, x, \xi) ds - jq \int_0^{s_0} \chi^\delta(s) R_n(m, x, \xi) ds - \quad (2.10)$$

$$- jq \chi^\delta(s_0) \int_0^\infty e^{-jqT(0, \sigma)} R_n(m, x, \xi) d\sigma = -2f_1 \cos(\theta - \varepsilon(x)) -$$

$$- f_1 \int_0^{s_0} \gamma_0(s) R_{0\tau}(x, \xi) ds + \int_0^{s_0} \gamma_0(s) [g_{1n}(x, \xi) - g_{2n}(m, x, \xi)] ds$$

$$\int_0^{s_0} \gamma^{\delta^*}(s) R_n(m, x, \xi) ds - jq \int_0^{s_0} \chi^{\delta^*}(s) R_n(m, x, \xi) ds - \quad (2.11)$$

$$- jq \chi^{\delta^*}(s_0) \int_0^\infty e^{-jqT(0, \sigma)} R_n(m, x, \xi) d\sigma = 2F_n(x)$$

$$\chi^\delta(s) = \int_0^s \frac{V_0}{W_{0\tau}(s_1)} \gamma^\delta(s_1) e^{-jqT(s_1, s)} ds_1, \quad \chi^{\delta^*}(s) = \int_0^s \frac{V_0}{W_{0\tau}(s_1)} \gamma^{\delta^*}(s_1) e^{-jqT(s_1, s)} ds_1$$

Решения уравнений (2.9) — (2.11) должны удовлетворять условию Жуковского — Кутта. Из уравнений (2.9) определяется стационарная вихревая интенсивность присоединенных вихрей $\gamma_0(s)$, после чего уравнения (2.10) и (2.11) решаются независимо друг от друга.

Заметим, что если не учитывать относительное смещение профилей в процессе колебаний, то последнее слагаемое в правой части уравнения (2.10) исчезает, и для частного случая чисто изгибных колебаний профилей решетки ($f_1 = 0$) получаем $\gamma^\delta(s) = 0$. Подставляя величины $\gamma_0, \gamma^\delta, \gamma^{\delta^*}$ в выражение (2.8), получим величину погонной интенсивности присоединенных вихрей на исходном профиле.

3. Для определения перепада давления в точке s исходного профиля воспользуемся теоремой Жуковского «в малом»

$$\Delta p = -\rho U \Gamma_0^*(s, t) \quad (3.1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $U(s, t)$ — относительная скорость жидкости в точке s исходного профиля.

Обозначим через W_τ и u_τ соответственно касательные составляющие возмущенной скорости жидкости и скорости колебания профиля в точке $(x, Y(x))$, совпадающей с точкой исходного профиля. Тогда

$$U = W_\tau - u_\tau \quad (3.2)$$

Учитывая формулы (1.1), (1.5), (2.8) и (3.2), с точностью до членов первого порядка малости относительно амплитуды колебаний профилей решетки для перепада давления, получим выражение

$$\Delta p = -\frac{1}{2}\rho V_0^2 b \left\{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] \gamma_0(s) - \frac{1}{2}\rho V_0^2 b \left\{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] (\gamma^\delta(s) \delta + \gamma^{\delta^*}(s) \delta^*) + [(v_\tau^\delta + v_{1\tau}^\delta + v_{2\tau}^\delta) \delta + (v_\tau^{\delta^*} + v_{1\tau}^{\delta^*} + v_{2\tau}^{\delta^*} - 2F_\tau(x)) \delta^*] \gamma_0(s) \right\} \right\} \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 v_{0\tau}(x) &= \int_0^{s_0} \gamma_0(s) R_{0\tau}(x, \xi) ds \\
 v_{\tau}^{\delta}(x) &= \int_0^{s_0} \gamma^{\delta}(s) R_{\tau}(m, x, \xi) ds - \int_0^{s_0} \gamma_0(s) [g_{1\tau}(x, \xi) - g_{2\tau}(m, x, \xi)] ds \\
 v_{\tau}^{\delta^*}(x) &= \int_0^{s_0} \gamma^{\delta^*}(s) R_{\tau}(m, x, \xi) ds, \quad v_{1\tau}^{\delta}(x) = jq \int_0^{s_0} \chi^{\delta}(s) R_{\tau}(m, x, \xi) ds \\
 v_{1\tau}^{\delta^*}(x) &= jq \int_0^{s_0} \gamma^{\delta^*}(s) R_{\tau}(m, x, \xi) ds \\
 v_{2\tau}^{\delta}(x) &= jq \chi^{\delta}(s_0) \int_0^{\infty} e^{-jqT(0, \sigma)} R_{\tau}(m, x, \xi) d\sigma \\
 v_{2\tau}^{\delta^*}(x) &= jq \chi^{\delta^*}(s_0) \int_0^{\infty} e^{-jqT(0, \sigma)} R_{0\tau}(m, x, \xi) d\sigma \\
 F_{\tau}(x) &= \frac{F'(x)}{b} \cos \varepsilon + \frac{F''(x)}{b} \sin \varepsilon
 \end{aligned}$$

При этом R_{τ} , $g_{1\tau}$, $g_{2\tau}$ — соответственно проекции на касательную, проведенную в точке z_0 исходного профиля, функций комплексно-сопряженных функций $R(m, z_0, \zeta_0)$, $b^{-1}F(x)g_1(z_0, \zeta_0)$, $b^{-1}F(x)g_2(m, z_0, \zeta_0)$.

Составляющие результирующей аэродинамической силы и аэродинамический момент относительно передней кромки, действующие на исходный профиль, равны соответственно

$$P_x = \int_0^{s_0} \Delta p \sin \varepsilon ds, \quad P_y = \int_0^{s_0} \Delta p \cos \varepsilon ds, \quad M = b \int_0^{s_0} \Delta p (y \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon) ds$$

Коэффициенты аэродинамических сил и момента

$$C_x = \frac{P_x}{1/2\rho V_0^2 b}, \quad C_y = \frac{P_y}{1/2\rho V_0^2 b}, \quad C_m = \frac{M}{1/2\rho V_0^2 b^2}$$

Учитывая (3.3), представим в виде

$$\begin{aligned}
 C_x &= C_{x0} + C_x^{\delta} \delta + C_x^{\delta^*} \delta^*, \quad C_y = C_{y0} + C_y^{\delta} \delta + C_y^{\delta^*} \delta^* \\
 C_m &= C_{m0} + C_m^{\delta} \delta + C_m^{\delta^*} \delta^*
 \end{aligned}$$

Здесь C_{x0} , C_{y0} , C_{m0} — коэффициенты аэродинамической силы и момента в стационарном потоке:

$$C_v^{\delta} = - \int_0^{s_0} \{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] \gamma^{\delta}(s) + [v_{\tau}^{\delta} + v_{1\tau}^{\delta} + v_{2\tau}^{\delta}] \gamma_0(s) \} L^v ds$$

$$\begin{aligned}
 C_v^{\delta^*} = - \int_0^{s_0} \{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] \gamma^{\delta^*}(s) + \\
 + [v_{\tau}^{\delta^*} + v_{1\tau}^{\delta^*} + v_{2\tau}^{\delta^*} - 2F_{\tau}] \gamma_0(s) \} L^v ds
 \end{aligned}$$

$$v = x, y, m, \quad L^x = \sin \varepsilon, \quad L^y = \cos \varepsilon, \quad L^m = y \sin \varepsilon - x \cos \varepsilon$$

$$(F(x) = ib, \quad \delta(t) = b^{-1}y(t))$$

4. В частном случае изгибных колебаний параллельно оси y решетки криволинейных профилей в квазистационарной постановке задачи выражения для коэффициентов нестационарных аэродинамических сил и момента примут вид

$$C_v^{\delta} = C_v^y = - \int_0^{s_0} \{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] \gamma^y(s) + v_{\tau}^y \gamma_0(s) \} L^y ds \tag{4.1}$$

$$C_v^{\delta^*} = C_{v^*}^{y^*} = - \int_0^{s_0} \{ [2 \cos(\theta - \varepsilon) + v_{0\tau}] \gamma^{y^*}(s) + [v_{\tau}^{y^*} - 2 \sin \varepsilon] \gamma_0(s) \} L^y ds$$

Здесь γ^y и γ^{y^*} — соответственно решения уравнений

$$\int_0^{s_0} \gamma^y(s) R_1(m, x, \xi) ds = \int_0^{s_0} \gamma_0(s) [g_{1n}(x, \xi) - g_{2n}(m, x, \xi)] ds \tag{4.2}$$

$$\int_0^{s_0} \gamma^{y^*}(s) R_n(m, x, \xi) ds = 2 \cos \varepsilon(x)$$

Как видно из уравнений (4.2) и формул (4.1), коэффициент C_v^y характеризует ту часть нестационарных аэродинамических сил и момента, которая действует на профиль решетки вследствие относительного смещения профилей в процессе изгибных колебаний. Суммарные коэффициенты нестационарных аэродинамических сил ($v = x, y$) и аэродинамического момента ($v = m$) равны

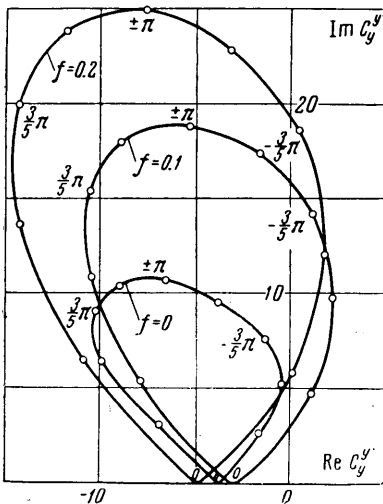
$$C_v^{y^*}(s) = (\text{Re } C_{v^*}^{y^*} + q^{-1} \text{Im } C_v^y) + j (\text{Im } C_{v^*}^{y^*} - q^{-1} \text{Re } C_v^y)$$

Из последней формулы видно, что доля нестационарных аэродинамических сил, связанных с относительным смещением профилей в процессе колебаний, с уменьшением величины приведенной частоты q возрастает.

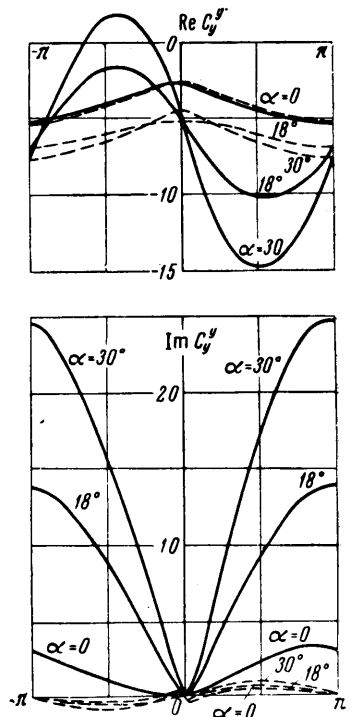
В качестве примера проведен расчет коэффициентов $C_y^{y^*}$ для решеток профилей различной кривизны, совершающих изгибные колебания параллельно оси y . Дужка исходного профиля задается уравнением

$$y = V(x) = \frac{x(1-x)f}{(1-x)x_j^2 + x(1-x_j)^2} \tag{0 \leq x \leq 1}$$

Здесь f — максимальная вогнутость профиля, отнесенная к длине хорды; x_j — безразмерная координата точки максимальной вогнутости.



Фиг. 2



Фиг. 3

Расчеты проводились на ЭВМ по методу дискретных вихрей, примененному в работах [6,7]. Схема расположения дискретных вихрей и точек, в которых удовлетворялись уравнения (4.2), принималась аналогичной схеме работы [7]. Количество дискретных вихрей бралось равным 20, что, как указано в работе [7], обеспечивает удовлетворительную точность расчета.

Густота решетки $\tau = b/h = 1$, угол выноса $\beta = -30$, $x_f = 0.3$ и число Струаля $q = 0.25$ при всех расчетах оставались неизменными. Для определения угла бесциркуляционного обтекания θ_0 использовались результаты, представленные в работе [7]. Геометрический угол атаки θ связан с аэродинамическим углом атаки α соотношением $\theta = \alpha - \theta_0$.

На фиг. 2 представлены комплексные величины коэффициента $C_y^{y'}$ для решеток профилей различной кривизны: $f = 0$ (решетка пластин), $f = 0.1$ и $f = 0.2$ при стационарном аэродинамическом угле атаки $\alpha = 30^\circ$ и сдвигах фазы между колебаниями соседних профилей в пределах от $-\pi$ до π . На фиг. 3 представлены зависимости коэффициента $C_y^{y'}$ от сдвига фазы $m\pi$ для решетки профилей с максимальной вогнутостью $f = 0.2$ при стационарных аэродинамических углах атаки $\alpha = 0, 18, 30^\circ$. Расчет величин, представленных на фиг. 2 и 3, проводился для значений $m = \pm 0.01, \pm 0.2, \pm 0.4, \pm 0.6, \pm 0.8, \pm 1.0$.

На фиг. 4 дана зависимость коэффициента $C_y^{y'}$ от угла атаки α , изменяющегося в пределах от 0 до 10° , для двух решеток профилей $f = 0$ (решетка пластин) и $f = 0.1$ при сдвиге фазы между колебаниями соседних профилей, равном 0.6π . Для выяснения влияния относительного смещения профилей в процессе колебаний на фиг. 3 и 4 пунктиром нанесены значения коэффициента $C_y^{y'} = C_{y_*}^{y'}$, вычисленные без учета взаимного смещения профилей.

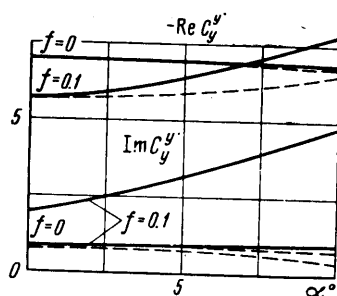
Отметим, что результаты расчетов, представленные в данной работе, в случае решетки пластин хорошо согласуются с аналогичными результатами расчетов, проведенных на основе работ [4,6,8].

Анализ результатов расчета показывает, что: 1) кривизна профилей решетки значительно влияет на величину нестационарных аэродинамических сил; 2) при большом стационарном угле атаки взаимное смещение профилей в процессе колебаний может существенно влиять на величину нестационарных аэродинамических сил. В случае решетки слабо изогнутых профилей, колеблющихся при малом угле атаки, это влияние мало.

Поступило 2 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. S ö h n g e n H. Luftkräfte an einem schwingenden Schaufeekranz kleiner Teilung. Z. angew. Math. and Phys., 1953, vol. 4, № 4.
2. С а м о й л о в и ч Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 20, вып. 1.
3. С т е п а н о в Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
4. М у с а т о в В. В. К расчету нестационарного обтекания решетки профилей в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
5. Н е к р а с о в А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд-во АН СССР, 1947.
6. Б е л о ц е р к о в с к и й С. М., Г и н е в с к и й А. С., П о л о н с к и й Я. С. Аэродинамические силы, действующие на решетку профилей при нестационарном обтекании. Промышленная аэродинамика, 1961, вып. 20.
7. Б е л о ц е р к о в с к и й С. М., Г и н е в с к и й А. С., П о л о н с к и й Я. Е. Силы и моментные аэродинамические характеристики решетки тонких профилей. Промышленная аэродинамика, 1962, вып. 22.
8. Г о р е л о в Д. Н., Д о м и н а с Л. В. Расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на решетку пластин, колеблющихся в плоском потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.



Фиг. 4