

О КОЛЕБАНИЯХ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ В ОКОЛОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Д. Н. ГОРЕЛОВ

(Новосибирск)

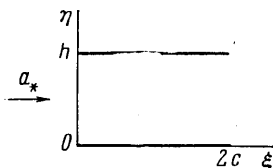
Околозвуковое нестационарное течение газа через решетку тонких слабо изогнутых профилей очень сложно и мало изучено. Основные трудности решения задачи связаны с нелинейной зависимостью аэродинамических характеристик от толщины профиля. В работе [1] показано, что для одиночного тонкого профиля, совершающего высокочастотные колебания в околозвуковом потоке газа, зависимостью нестационарных аэродинамических характеристик от толщины профиля можно пренебречь. Для решетки профилей картина течения осложняется аэродинамической интерференцией между профилями, которая может существенным образом зависеть от формы профилей. Решение задачи об околозвуковом нестационарном обтекании решетки без учета толщины профилей получено Хамамото [2].

Целью настоящей работы является выяснение зависимости аэродинамических характеристик решетки профилей от толщины профиля на режимах околозвукового нестационарного течения. Нелинейное уравнение для потенциала скорости линеаризуется в предположении, что неподвижный профиль вызывает в потоке значительно большие возмущения, чем те, которые вызваны колебаниями профиля. Для одиночного профиля подобная линеаризация была проведена в работе [3]. Аэродинамическая интерференция между профилями решетки определена методом, изложенным в работе [4]. В качестве примера приведен расчет аэродинамических сил, действующих на профиль, колеблющийся в канале и свободной струе.

§ 1. Рассмотрим обтекание околозвуковым потоком газа решетки без выноса, составленной из тонких слабо изогнутых профилей, совершающих синхронные гармонические колебания с малыми амплитудами по некоторым заданным законам. Предположим, что, начиная от передних кромок, все профили решетки обтекаются сверхзвуковым потенциальным потоком.

Введем в рассмотрение систему координат ξ, η , связанную с исходным профилем. Начало координат поместим в передней кромке профиля, ось ξ направим вдоль направления невозмущенного потока, ось η — вертикально вверх (фиг. 1). С соседним профилем, расположенным выше, свяжем систему координат ξ_1, η_1 . Координаты ξ_1, η_1 связаны с координатами ξ, η соотношениями

$$\xi_1 = \xi, \eta_1 = \eta - h \quad (h - \text{шаг решетки}) \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Потенциал скорости $\varphi(\xi, \eta, t)$ в общем случае плоского нестационарного движения баротропного газа удовлетворяет уравнению [1]

$$a^2(\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta}) - \varphi_{\xi}^2\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta}^2\varphi_{\eta\eta} - 2\varphi_{\xi}\varphi_{\eta}\varphi_{\xi\eta} - 2\varphi_{\xi}\varphi_{\xi t} - 2\varphi_{\eta}\varphi_{\eta t} - \varphi_{tt} = 0 \quad (1.2)$$

где скорость звука a определяется уравнением

$$a^2 = 1/2(\kappa + 1)a_*^2 - 1/2(\kappa - 1)(\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2) - (\kappa + 1)\varphi_t \quad (1.3)$$

Здесь a_* — критическая скорость звука, κ — отношение удельных теплоемкостей, t — время. Представим потенциал скорости $\varphi(\xi, \eta, t)$ в виде

$$\varphi(\xi, \eta, t) = a_*\xi + \varphi'(\xi, \eta, t)$$

где $a_*\xi$ — потенциал скорости основного движения газа, φ' — потенциал скорости дополнительного возмущенного движения газа. Тогда, в рамках

гипотезы малых возмущений, из уравнений (1.2) и (1.3) можно получить следующее нелинейное уравнение [1] для определения φ' :

$$\frac{\kappa+1}{a_*} \varphi_{\xi}' \varphi_{\xi\xi}' - \varphi_{\eta\eta}' + \frac{2}{a_*} \varphi_{\xi t}' + \frac{1}{a_*^2} \varphi_{tt}' = 0 \quad (1.4)$$

Потенциал скорости φ' ищем в виде

$$\varphi'(\xi, \eta, t) = \varphi_0(\xi, \eta) + \varphi_1(\xi, \eta)e^{i\nu t} \quad (1.5)$$

Здесь ν — круговая частота колебаний профилей, $\varphi_0(\xi, \eta)$ — потенциал скорости дополнительного возмущенного стационарного движения газа, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\kappa+1}{a_*} \varphi_{0\xi} \varphi_{0\xi\xi} - \varphi_{0\eta\eta} = 0 \quad (1.6)$$

и соответствующим граничным условиям. Решение для φ_0 в стационарном потоке предполагается известным (см. [5]).

Предположим теперь, следуя работе [3], что нестационарные возмущения в потоке значительно меньше стационарных. Тогда, с точностью до величин первого порядка малости, для определения функции φ_1 получим следующее линейное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\frac{\kappa+1}{a_*} [\varphi_{0\xi} \varphi_{1\xi\xi} + \varphi_{0\xi\xi} \varphi_{1\xi}] - \varphi_{1\eta\eta} + \frac{2i\nu}{a_*} \varphi_{1\xi} - \frac{\nu^2}{a_*^2} \varphi_1 = 0 \quad (1.7)$$

Если предположить, что скорости дополнительного возмущенного стационарного движения газа $\varphi_{0\xi}$ в межпрофильном канале мало отличаются от своего среднего значения wa_* , которое предполагается известным, то уравнение (1.7) примет вид

$$m^2 \varphi_{1\xi\xi} - \varphi_{1\eta\eta} + \frac{2i\nu}{a_*} \varphi_{1\xi} - \frac{\nu^2}{a_*^2} \varphi_1 = 0 \quad (m^2 = (\kappa+1)w) \quad (1.8)$$

Положим

$$\varphi_1(\xi, \eta) = ca_* \Phi(x, y) e^{-i\lambda x} \quad (\lambda = k/m^2, k = \nu c/a_*, x = \xi/c, y = m\eta/c) \quad (1.9)$$

Здесь c — половина хорды профиля. Тогда (1.8) перейдет в уравнение

$$\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \omega^2 \Phi = 0 \quad (\omega^2 = k^2(1-m^2)/m^4) \quad (1.10)$$

Граничные условия: условие непротекания профилей ($0 \leq x \leq 2$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{a_* m} v^{(0)}(x) e^{i\lambda x} \quad \text{при } y=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{1}{a_* m} v^{(1)}(x) e^{i\lambda x} \quad \text{при } y = \frac{mh}{c} \quad (1.11)$$

Функции $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ определяют формы колебаний исходного (нижнего) и верхнего профилей. В невозмущенном потоке

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (1.12)$$

§ 2. В соответствии с методом расчета аэродинамической интерференции профилей, предложенным в работе [4], функцию Φ ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \Phi^{(0)}(x, y) + \Psi^{(0)}(x, y) + \Phi^{(1)}(x, y_1) + \Psi^{(1)}(x, y_1) \quad (2.1)$$

Функции $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$ определяют потенциалы скорости обтекания одиночных профилей, формы колебаний которых равны $v^{(0)}$ и $v^{(1)}$ соответственно. В рассматриваемом межпрофильном канале [6]

$$\Phi^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{a_* m} \int_0^{x-y} J_0 \{ \omega [(x-\xi)^2 - y^2]^{1/2} \} v^{(0)}(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \quad (y > 0) \quad (2.2)$$

$$\Phi^{(1)}(x, y_1) = \frac{1}{a_* m} \int_0^{x+y_1} J_0 \{ \omega [(x-\xi)^2 - y_1^2]^{1/2} \} v^{(1)}(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \quad (y_1 < 0) \quad (2.3)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Функции $\Psi^{(0)}(x, y)$, $\Psi^{(1)}(x, y_1)$ определяются теми же формулами (2.2), (2.3), если в них вместо $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ поставить искомые функции $u^{(0)}(x)$, $u^{(1)}(x)$, учитывающие интерференцию профилей.

Функция $\Phi(x, y)$, определяемая равенствами (2.1) — (2.3), будет удовлетворять всем условиям задачи (1.10) — (1.12), если искомые функции $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ являются решениями следующей системы уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} u^{(0)} + \Phi_{y_1}^{(1)} + \Psi_{y_1}^{(1)} &= 0 \quad \text{при } y_1 = -x_* \\ \frac{1}{m} u^{(1)} + \Phi_y^{(0)} + \Psi_y^{(0)} &= 0 \quad \text{при } y = x_* \\ (0 \leq x \leq 2, x_* &= 2m\tau^{-1}, \tau = 2c/h) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Предположим, что функции $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ и $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ в промежутке $0 \leq x \leq 2$ можно аппроксимировать тригонометрическими полиномами вида

$$\begin{aligned} v^{(k)}(x) &= a_* \sum_{\sigma=0}^n \theta_{k\sigma} \cos \sigma \eta, \quad u^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_* \\ u^{(k)}(x) &= a_* \sum_{\sigma=0}^{n_1} \vartheta_{k\sigma} [\cos \sigma \eta - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_*] \quad \text{при } x_* < x \leq 2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\delta_{0\sigma}$ — символ Кронекера, $k = 0, 1$; $\eta = \arccos(1 - x)$, $\eta_* = \arccos(1 - x_*)$. Тогда условия непротекания (2.4) с учетом выражений (2.2), (2.3) примут вид ($0 \leq x \leq 2$)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=0}^n \{ \vartheta_{0\sigma} e^{i\lambda x} [\cos \sigma \eta - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_*] + \theta_{1\sigma} f_{\sigma}(x) + \vartheta_{1\sigma} f_{\sigma}^*(x) \} &= 0 \\ \sum_{\sigma=0}^{n_1} \{ \vartheta_{1\sigma} e^{i\lambda x} [\cos \sigma \eta - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_*] + \theta_{0\sigma} f_{\sigma}(x) + \vartheta_{0\sigma} f_{\sigma}^*(x) \} &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{\sigma}(x) &= \cos \sigma \eta_1 e^{i\lambda(x-x_*)} - F_{\sigma}(x), \quad F_{\sigma}(x) = \int_0^{x-x_*} J_0'(z) e^{i\lambda \xi} \cos \sigma \psi d\xi \\ (\eta_1 &= \arccos(1 - x + x_*), \quad \psi = \arccos(1 - \xi)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} f_{\sigma}^*(x) &= [\cos \sigma \eta_1 - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_*] e^{i\lambda(x-x_*)} - F_{\sigma}^*(x) \\ F_{\sigma}^*(x) &= \int_{x_*}^{x-x_*} J_0'(z) e^{i\lambda \xi} [\cos \sigma \psi - (1 - \delta_{0\sigma}) \cos \sigma \eta_*] d\xi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Символом $J_0'(z)$ обозначено

$$J_0'(z) = \frac{\partial}{\partial y} J_0(z) \Big|_{y=x_*}, \quad z = \omega [(x - \xi)^2 - y^2]^{1/2}$$

Отметим, что

$$f_{\sigma}(x) = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq x_*, \quad f_{\sigma}^*(x) = 0 \quad \text{при } x \leq 2x_* \quad (0 \leq x \leq 2) \tag{2.9}$$

Потребуем выполнения равенств (2.6) в $n + 1$ точках в промежутке $x_* \leq x \leq 2$. Тогда искомые коэффициенты $\vartheta_{0\sigma}$, $\vartheta_{1\sigma}$ ($\sigma = 0, 1, \dots, n$) определяются как решение системы алгебраических уравнений $2(n + 1)$ порядка. После вычисления коэффициентов $\vartheta_{0\sigma}$, $\vartheta_{1\sigma}$ для заданных законов движения профилей решетки задача определения потенциала скорости φ_1 оказывается решенной.

§ 3. Давление потока на поверхность профиля определяется уравнением Коши — Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho_0 a_*^2 (\Phi_x - i\alpha\Phi) e^{i(vt - \lambda x)} \quad (\alpha = \lambda - k) \quad (3.1)$$

Здесь p_0 , ρ_0 — давление и плотность невозмущенного потока. Нестационарные части подъемной силы и момента, действующих на исходный профиль, представим в виде

$$\Delta P = \rho_0 a_*^2 c C_y, \quad \Delta M = 2\rho_0 a_*^2 c^2 C_m \quad (3.2)$$

где C_y , C_m — безразмерные аэродинамические коэффициенты.

Предположим, что все профили решетки колеблются по одному закону с постоянным сдвигом фаз ψ между колебаниями соседних профилей. Тогда

$$v^{(1)} = v^{(0)} e^{i\psi}, \quad u^{(1)} = u^{(0)} e^{i\psi}, \quad \Phi(x, y) = -\Phi(x, -y) \quad (3.3)$$

В этом случае, полагая, что аэродинамический момент взят относительно середины профиля

$$C_y = 2 \int_0^2 [\Phi_x(x, +0) - i\alpha\Phi(x, +0)] e^{-i\lambda x} dx \quad (3.4)$$

$$C_m = \int_0^2 (1-x) [\Phi_x(x, +0) - i\alpha\Phi(x, +0)] e^{-i\lambda x} dx$$

Здесь

$$\Phi(x, +0) = -\frac{1}{ma_*} \int_0^x [v^{(0)}(\xi) + u^{(0)}(\xi)] J_0\{\omega(x-\xi)\} e^{i\lambda\xi} d\xi +$$

$$+ \frac{e^{i\psi}}{ma_*} \int_0^{x-x_*} [v^{(0)}(\xi) + u^{(0)}(\xi)] J_0\{\omega[(x-\xi)^2 - x_*^2]^{1/2}\} e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (3.5)$$

§ 4. В качестве примера рассмотрим изгибно-крутильные колебания профилей решетки, колеблющихся синфазно и в противофазе. Синфазные колебания соответствуют колебаниям профиля в свободной плоской струе, а колебания в противофазе — в канале, ограниченном твердыми стенками. В обоих случаях ширина струи H связана с густотой решетки τ соотношением $H = 2c\tau^{-1}$.

Предположим, что ось вращения расположена в середине профиля. Тогда

$$v^{(0)}(x) e^{i\psi} = a_* [-\alpha + \alpha'(1-x) + y'/a_*]$$

$$v^{(1)}(x) = v^{(0)}(x) e^{i\psi} \quad (\psi = 0, \pi) \quad (4.1)$$

Здесь $\alpha(t)$ — угол поворота профиля около оси вращения, $y(t)$ — вертикальное перемещение оси вращения.

Безразмерные аэродинамические коэффициенты C_y , C_m , входящие в выражения (3.2), представим в виде

$$C_y = l_\alpha \alpha + l_y y/c, \quad C_m = m_\alpha \alpha + m_y y/c \quad (4.2)$$

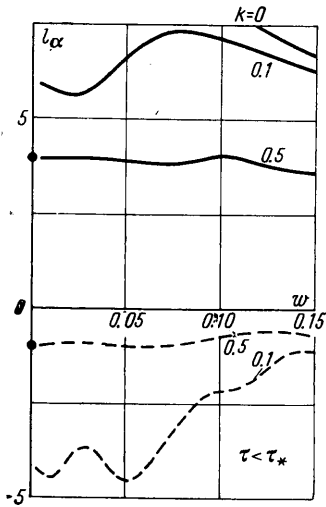
$$l_\alpha = l_\alpha' + i l_\alpha'', \dots, \quad m_y = m_y' + i m_y''$$

Расчет коэффициентов l_α , l_y , m_α , m_y проводился на ЭВМ. При этом учитывались семь членов в аппроксимации (2.5) для функций $v^{(k)}$, $u^{(k)}$ ($k = 0, 1$), а условия непротекания (2.6) выполнялись соответственно в семи точках на профиле с координатами

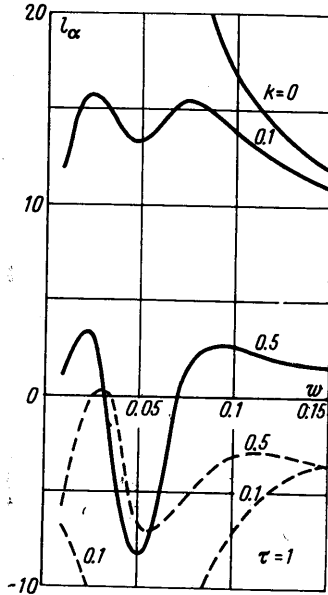
$$x_r = x_* - \frac{2-x_*}{7}(r-1) \quad (x_* = 2m\tau^{-1}; r = 1, 2, \dots, 7) \quad (4.3)$$

Основные результаты расчета представлены на фиг. 2—7. Вещественные части аэродинамических коэффициентов на всех фигурах обозначены сплошной линией, а мнимые — пунктирной.

Прежде всего выясним влияние формы профиля на величину аэродинамических характеристик при различных числах Струхала. В первом приближении форма профиля учитывается параметром w , определяющим среднее значение безразмерной скорости возмущенного стационарного движения газа. На фиг. 2 в качестве примера представлена зависимость коэффициента l_α от w при значениях числа Струхала $k = 0, 0.1, 0.5$ и густоте решетки $\tau \leq \tau_* = m$, где $m = \sqrt{(1+x)w}$. В нашем решении для решетки с густотой $\tau \leq \tau_*$ аэродинамическая интерференция между профилями отсут-

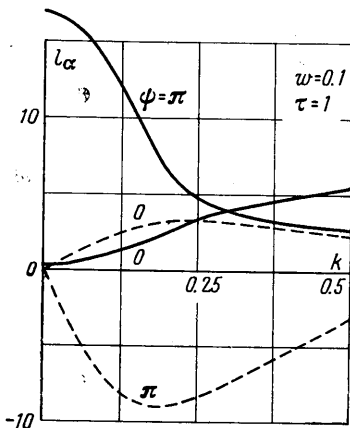


Фиг. 2

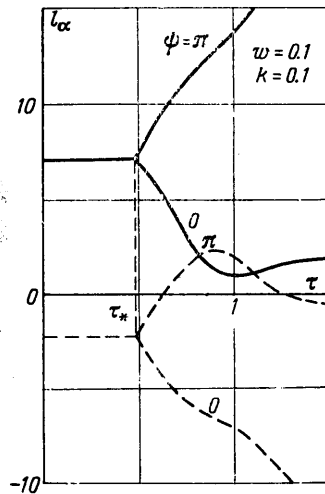


Фиг. 3

ствует. На фиг. 3 приведена та же зависимость l_α от w , но уже при наличии аэродинамической интерференции между профилями решетки ($\tau = 1$). Профили колеблются в противофазе. Расчетные точки: $w = 0.01, 0.025-0.15$ с шагом $\Delta w = 0.025$. Точка $w = 0$ является особой и при подходе к ней погрешность расчета увеличивается. Случай $k = 0$ соответствует обтеканию потока решетки сверхзвуковым стационарным потоком,



Фиг. 4

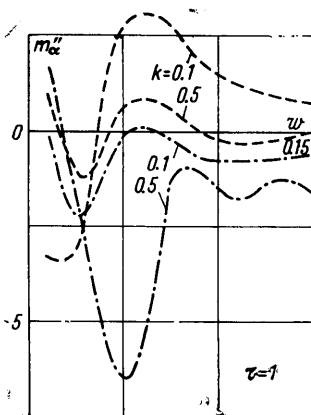


Фиг. 5

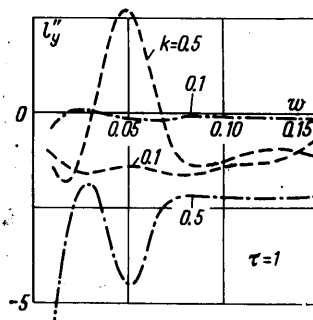
у которого число Маха M связано с параметром m соотношением $m = \sqrt{M^2 - 1}$. Значения коэффициента l_α для случая обтекания стационарным сверхзвуковым потоком тонкого профиля, расположенного в канале, приведены в работе [7]. Точками на

фиг. 2 нанесены результаты расчета коэффициента l_α для одиночной пластины при $k = 0.5$, взятые из работы [2]. Соответствующие результаты фиг. 2, 3 полностью согласуются с данными работ [2, 7].

Проведенный расчет подтвердил вывод работы [1] о том, что в околосзвуковом потоке при числах Струхали, значительно больших относительной толщины профиля, нестационарные аэродинамические характеристики одиночного профиля практически не зависят от формы профиля. Однако этот вывод не распространяется на случай движения системы профилей, если имеет место аэродинамическое взаимодействие между профилями. Результаты, приведенные на фиг. 3, показывают существенную зависимость коэффициента l_α от параметра w , характеризующего влияние формы



Фиг. 6



Фиг. 7

профиля, при всех значениях числа Струхали. Расчет других нестационарных аэродинамических коэффициентов решетки профилей, колеблющихся в фазе и противофазе, дает аналогичные результаты.

На фиг. 4 показана зависимость коэффициента l_α от числа Струхали k при колебаниях профилей в фазе ($\psi = 0$) и в противофазе ($\psi = \pi$). Расчетные точки: $k = 0, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5$.

На фиг. 5 дана зависимость коэффициента l_α от густоты решетки τ . При $\tau \leq \tau_*$ коэффициент l_α не зависит от τ . Расчетные точки: $\tau = 0.25-1.5$ с шагом $\Delta\tau = 0.25$.

Большой интерес представляет зависимость аэродинамического демпфирования профилей решетки от параметра w . На фиг. 6, 7 представлены результаты расчета мнимых частей m''_α, l''_y аэродинамических коэффициентов m_α и l_y , определяющих аэродинамическое демпфирование при крутильных и изгибных колебаниях профилей. Пунктиром обозначен случай синфазных, а штрих-пунктиром — противофазных колебаний профилей. Расчет проводился при тех же w , что и на фиг. 2, 3. Результаты расчета показывают, что при некоторых значениях исходных параметров коэффициенты m''_α и l''_y становятся положительными, что свидетельствует о возможности автоколебаний профилей с одной степенью свободы.

Все приведенные результаты показывают существенную зависимость нестационарных аэродинамических характеристик решетки профилей от формы профиля на режимах околосзвукового течения газа.

Поступило 10 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Цзян Х., Лин Ц., Рейснер Е. О двумерном неустановившемся движении тонкого тела в сжимаемой жидкости. В кн.: Газовая динамика. Сб. статей, Изд-во иностр. лит., 1950, с. 183—196.
2. Hamamoto J. Minute harmonic oscillation of flat plate cascade in transonic flow.— Proc. 10-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960, Tokyo, 1961.
3. Courty G., Piazzi G. Etude du flottement en régime transsonique la Recherche Aéronautique, 1958, No 63.
4. Горелов Д. Н. О расчете аэродинамической интерференции системы тел в идеальной жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
5. Hosokawa J. Theory of lifting thin aerofoils at sonic speed.— Proc. 10-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1960, Tokyo, 1961.
6. Майлс Д. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. Физматгиз, 1963.
7. Miles J. W. The compressible flow past an oscillating airfoil in a wind tunnel, JAS, 1956, No 7.