

МЕТОД РАСЧЕТА ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОРЫВА НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ТОНКОЕ КРЫЛО

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

На основе схемы несущей поверхности разработан численный метод расчета нестационарного обтекания тонкого крыла, движущегося в идеальной несжимаемой среде. Зависимость граничных условий на поверхности крыла от времени и координат может быть любой. Поэтому метод позволяет рассмотреть аperiodическое движение крыла как твердого тела, произвольные деформации его, вхождение крыла в порыв, воздействие на него слабой ударной волны и т. д. На форму тонкой несущей поверхности ограничений также практически не накладывается: метод приложим к монопланному крылу любой формы в плане, к кольцевым крыльям, системам подобных крыльев и т. п.

Подробный обзор работ, в которых вычисляется воздействие порыва на крыло, содержится в монографиях [1, 2]. Не останавливаясь на этом обзоре, отметим, что при дозвуковых скоростях эффективное решение задачи получено лишь для профиля.

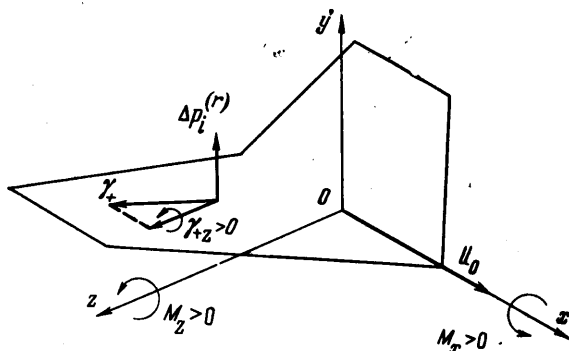
§ 1. Основные положения метода. Пусть произвольная тонкая несущая поверхность совершает неустановившееся движение как твердое тело, или деформируется, входит постепенно или мгновенно в порыв. Зная характеристики порыва, законы движения, деформации тела, нетрудно определить соответствующие им нормальные составляющие скорости на поверхности крыла, которые, таким образом, можно считать известными. Нормальная составляющая возмущенной скорости W_n , возникающая при движении несущей поверхности, должна компенсировать их в любой момент времени (условие плавного обтекания). Отметим, что в рамках рассматриваемой далее линейной теории воздействие порыва, движение крыла как твердого тела и деформации его поверхности можно изучать независимо.

Для определенности далее будем рассматривать монопланное крыло-пластину произвольной, но симметричной формы в плане. Введем подвижную, связанную с крылом систему координат $Oxyz$ с началом на середине корневой хорды b (фиг. 1). Основная, не зависящая от времени t скорость движения крыла U_0 пусть будет направлена вдоль корневой хорды (оси Ox).

В общем случае граничные условия на крыле можно представить в виде

$$\frac{W_n}{U_0} = cf\left(\frac{x_0}{b}, \frac{z_0}{b}, \tau\right)$$

$$\tau = \frac{U_0 t}{b} \quad (1.1)$$

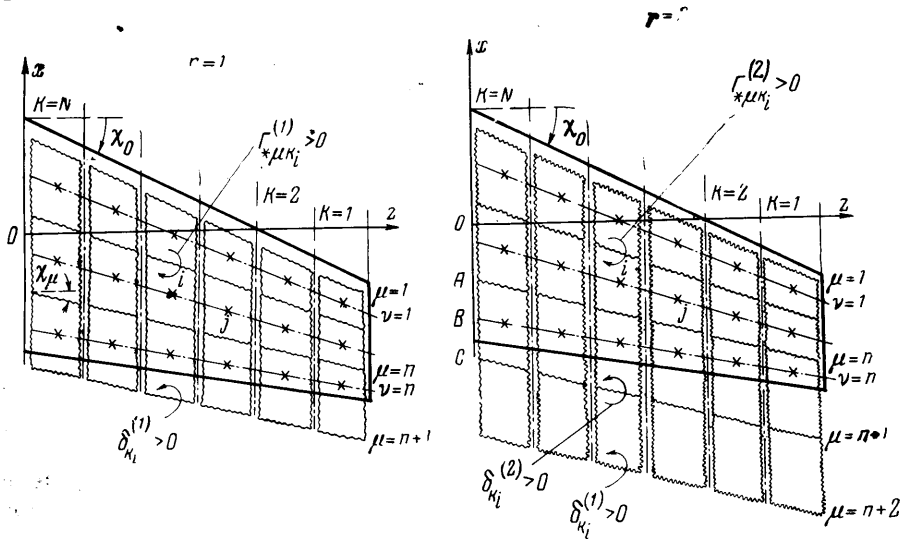


Фиг. 1

Здесь x_0, z_0 — координаты точки на поверхности крыла, τ — безразмерное время и c — некоторая нормирующая безразмерная постоянная. Например, для ограниченных правых частей (1.1) целесообразно выбирать

с таким образом, чтобы $|f| \leq 1$. В линейной задаче можно считать, что при $\tau < 0$, $f = 0$. Отметим также, что если твердое крыло-пластина движется под нулевым углом атаки и постепенно входит в резко ограниченный порыв, то на части крыла, не вошедшей в порыв, функция $f = 0$.

Возмущенное движение жидкости вне крыла и вихревого следа за ним можно считать потенциальным. Потенциал возмущенных скоростей как при установившемся, так и при неустановившемся движениях будет удовлетворять уравнению Лапласа. На вихревой пелене за крылом давления должны изменяться непрерывно, а в задних кромках крыла — удовлетворяться условие Чаплыгина—Жуковского.



Фиг. 2

Разность давлений Δp на нижней и верхней поверхностях крыла при произвольном неустановившемся движении может быть выражена через интенсивность присоединенного вихревого слоя γ_+ на основании теоремы Жуковского «в малом» [3]

$$\Delta p = -\rho \gamma_+ W_{00n} \quad (1.2)$$

Здесь W_{00n} — нормальная к оси вихря γ_+ составляющая относительной скорости среды в точке, принадлежащей вихревому слою, ρ — плотность среды.

Как известно, потенциал скоростей, соответствующий вихревой поверхности или дискретным вихрям, удовлетворяет уравнению Лапласа. Согласно (1.2), если нормальная составляющая относительной скорости среды будет равна нулю, то разность давлений на свободной поверхности не возникает. Следовательно, оси свободных вихрей должны быть направлены по местной скорости среды, или эти вихри должны двигаться с равной ей скоростью. В рамках линейной теории можно принять эту скорость равной U_0 , тогда вместо (1.2) будем иметь

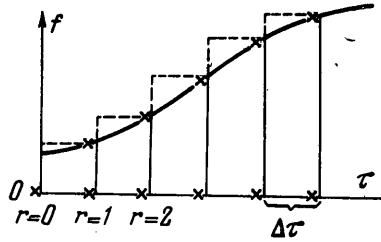
$$\Delta p = \rho \gamma_{+z} U_0 \quad (1.3)$$

Через γ_{+z} обозначена интенсивность присоединенных вихрей, оси которых перпендикулярны скорости U_0 . Положительные направления Δp и γ_{+z} показаны на фиг. 1. Таким образом, если крыло заменить вихревым слоем, ряд условий задачи выполняется автоматически. Необходимо лишь так подобрать интенсивность этого слоя, чтобы удовлетворить условия плавного обтекания и Чаплыгина—Жуковского.

Основная идея численного метода решения указанной задачи, который будет изложен ниже, заключается в переходе от непрерывных распределений и процессов к дискретным.

Во-первых, непрерывно распределенный вихревой слой, заменяющий крыло, приближенно моделируется системой дискретных вихрей. Однако, в отличие от того, к к это делалось в работах [3, 4], здесь такая замена производится не для присоединенного вихревого слоя, а для суммарного, состоящего из свободных и присоединенных вихрей на крыле и свободных за крылом (фиг. 2).

Во-вторых, непрерывный процесс изменения граничного условия и циркуляции по времени заменяется ступенчатым. В определенные моменты времени происходит скачкообразное изменение граничных условий и циркуляций, а в промежутки между ними циркуляции не меняются. Соответственно этому свободные вихри сходят с присоединенных в дискретные моменты времени (фиг. 3).

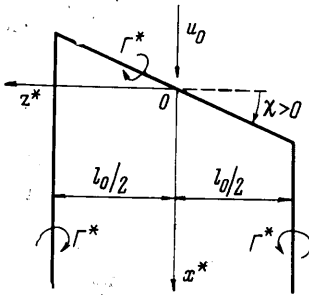


Фиг. 3

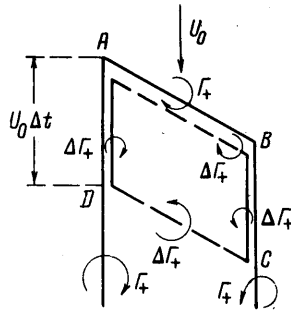
§ 2. Вихревая модель крыла. Для монопланнх крыльев основными элементарными вихревыми системами будут косые подковообразные вихри (фиг. 4). Циркуляция поперечного вихря и продольных (параллельных скорости U_0), полубесконечных, постоянны и равны Γ^* . Согласно работе [3], скорость, вызванную такой вихревой системой в плоскости x^* , z^* , можно представить в виде

$$W_y = \frac{U_0 \Gamma}{2\pi} w_y(\xi_0, \zeta_0, \chi), \quad \Gamma^* = U_0 l_0 \Gamma, \quad \xi_0 = \frac{2x_0^*}{l_0}, \quad \zeta_0 = \frac{2z_0^*}{l_0} \quad (2.1)$$

Через $w_y(\xi_0, \zeta_0, \chi)$ обозначена безразмерная функция, выражение для которой приведено в [3].



Фиг. 4



Фиг. 5

Переход от непрерывного изменения циркуляции по времени к дискретному позволяет в качестве основной элементарной системы рассматривать указанный стационарный вихрь. Пусть на произвольном элементе крыла циркуляция присоединенного вихря Γ_+ изменилась в некоторый момент времени t на величину $\Delta \Gamma_+$. Это будет сопровождаться сходом поперечного свободного вихря циркуляции $\Delta \Gamma_+$. В момент времени $t + \Delta t$ вместо косога стационарного вихря (фиг. 4) получится вихревая система, изображенная на фиг. 5.

Заметим, что замкнутую вихревую нить $ABCD$ постоянной циркуляции $\Delta \Gamma_+$ можно рассматривать как сумму двух поперечных вихрей AB и CD равнопротивоположной циркуляции с соответствующими им полубесконечными продольными вихрями.

При замене непрерывного вихревого слоя дискретными вихрями непосредственно на крыле целесообразно это делать аналогично стационарному случаю [3] и задаче о гармонических колебаниях крыла [4].

На фиг. 2 волнистыми линиями показаны вихри и крестиками — расчетные точки, в которых удовлетворяются граничные условия. Номера поперечных вихрей будем обозначать i , расчетных точек — j , вихревых шнуров — μ , расчетных линий — ν и сечений, параллельных оси Ox , — k . Существенным в этом расположении является, во-первых, то, что расчетные точки лежат посередине между ближайшими к ним вихрями. Во-вторых, в каждой полосе k последняя расчетная точка лежит ближе к хвосту, чем последний вихрь.

Вообще говоря, выбор необходимого количества вихрей на крыле $m = nN$ и промежутков времени Δt между расчетными моментами производится независимо. При вычислении циркуляций разделение вихрей на свободные и присоединенные нецелесообразно. Таким образом, в отличие от указанных выше случаев, здесь поперечными вихрями на крыле моделируется в каждый момент времени не присоединенный, а суммарный слой, включающий в себя и присоединенные, и свободные вихри.

Остановимся подробнее на переходе от непрерывного по времени процесса изменения граничного условия к ступенчатому (фиг. 3). В качестве расчетных моментов времени будем брать указанные крестиками и характеризовать их числом r

$$\tau_r = r\Delta t \quad (r = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

Они выбираются таким образом, чтобы каждый из них непосредственно предшествовал моментам, в которые происходит скачкообразное изменение граничного условия, а следовательно, и циркуляции вихрей на крыле. Расчет этих циркуляций производится только в моменты времени τ_r с учетом того, что при переходе от предыдущего расчетного момента к последующему свободные вихри за крылом сносятся вниз по течению на расстояние $U_0\Delta t$.

Итак, в каждый расчетный момент времени, характеризуемый r , весь вихревой слой на крыле заменяется системой косых вихрей, как это показано на фиг. 2. Система свободных вихрей за крылом строится также при помощи косых вихрей, положение которых относительно крыла уже не фиксировано и изменяется при разных r . Угол стреловидности свободных вихрей за крылом будем брать таким же, как у последнего вихревого шнура на крыле $\mu = n$. На фиг. 2 изображены вихревые системы крыла при $r = 1$, когда за крылом образовалась одна свободная вихревая нить $\mu = n + 1$, и при $r = 2$, когда таких нитей две ($\mu = n + 1$ и $\mu = n + 2$).

Выбор положений поперечных свободных вихрей за крылом должен производиться таким образом, чтобы выполнялось условие Чаплыгина—Жуковского на задних кромках крыла. Данное условие приводит к обращению в нуль интенсивности присоединенного вихревого слоя γ_+ в задних кромках.

Для его выполнения необходимо, чтобы свободные вихри за крылом в расчетные моменты времени находились на достаточно большом расстоянии от последней расчетной линии $\nu = n$. Как показали расчеты, условие Чаплыгина—Жуковского выполняется, если взять $AB = BC$ (фиг. 2). Это означает, что достаточно принять минимальное расстояние между свободным вихревым шнуром $\mu = n + 1$ и расчетной линией $\nu = n$ равным максимальному расстоянию между вихревой линией $\mu = n$ и линией $\nu = n$.

Разбиение хорд крыла в каждом сечении производится на n равных частей, причем расстояние между соседними вихревыми шнурами [3] в каждом сечении k будет равно b_k / n , поэтому $AB = \frac{1}{2}b / n$.

За время Δt поперечный свободный вихрь проходит расстояние $AC = U_0\Delta t$. Приняв $AB = BC = \frac{1}{2}AC$, находим

$$\Delta \tau = 1 / n, \quad \Delta \tau = U_0\Delta t / b \quad (2.3)$$

Согласно (1.1) и (2.2), получаем

$$\tau_r = \frac{r}{n}, \quad \tau_r = \frac{t_r U_0}{b} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где t_r и τ_r — размерные и безразмерные расчетные моменты времени.

§ 3. Вычисление положений вихрей и расчетных точек. Циркуляция каждого вихря будет зависеть от расчетного момента времени, который при данном числе n вихревых шнуров на крыле можно согласно (2.4) характеризовать числом r , и номера вихря i . Положение вихря на крыле удобнее задавать двумя величинами: номером шнура μ и номером полосы k_i , которые соответствуют вихрю i . Принимая размах l_0 каждого поперечного вих-

ря одинаковым, будем рассматривать размерные и безразмерные циркуляции соответственно суммарных, присоединенных и свободных вихрей на крыле.

$$\Gamma_{\Sigma\mu k_i}^{(r)} = U_0 l_0 \Gamma_{*\mu k_i}^{(r)}, \quad \Gamma_{+\mu k_i}^{(r)} = U_0 l_0 \Gamma_{\mu k_i}^{(r)}, \quad \Gamma_{-\mu k_i}^{(r)} = U_0 l_0 \Delta_{\mu k_i}^{(r)} \\ (1 \leq \mu \leq n, \quad 1 \leq k_i \leq N) \quad (3.1)$$

Циркуляции свободных вихрей, уже сошедших с крыла, с течением времени не изменяются. Поэтому их можно считать зависящими либо от μ и k_i , либо от r и k_i

$$\Gamma_{-k_i}^{(r)} = U_0 l_0 \delta_{k_i}^{(r)}, \quad (n+1 \leq \mu \leq n+r, \quad 1 \leq k_i \leq N) \quad (3.2)$$

В формулах (3.1) и (3.2) N — число полос, на которое разбивается полуразмах крыла.

Нумеруя поперечные вихри i и расчетные точки j справа налево, начиная с $\mu = 1$ и $\nu = 1$ (фиг. 2), можем написать для крыла любой формы в плане

$$i = k_i + (\mu - 1)N \quad (i = 1, \dots, m; \quad 1 \leq \mu \leq n) \\ j = k_j + (\nu - 1)N \quad (j = 1, \dots, m; \quad 1 \leq \nu \leq n) \quad (m = nN) \quad (3.3)$$

Приведем соотношения для определения необходимых геометрических параметров крыла с постоянной стреловидностью по передней и задней кромкам (крыло такого типа изображено на фиг. 2). Пусть l — размах, b — корневая хорда, b_k — хорда в сечении k , λ — удлинение, η — сужение, χ_0 — угол стреловидности по передней кромке крыла и χ_μ — угол стреловидности шнура μ , тогда [3]

$$\frac{l}{b} = \frac{\lambda}{2} \frac{\eta + 1}{\eta}, \quad \operatorname{tg} \chi_\mu = \operatorname{tg} \chi_0 - \frac{4\Delta_\mu}{\lambda} \frac{\eta - 1}{\eta + 1} \quad \left(\lambda = \frac{l^2}{S}, \quad \eta = \frac{b}{b_k} \right) \\ \Delta_\mu = \frac{\mu}{n} - \frac{3}{4n}, \quad \frac{b_k}{b} = 1 - z_k^* \frac{\eta - 1}{\eta}, \quad z_k^* = \frac{2z_k}{l}, \quad \frac{l_0}{l} = \frac{1}{2N} \quad (3.4)$$

Пусть

$$(x_\mu^{k_i}, z_{k_i}), \quad (x_{0\nu}^{k_j}, z_{0k_j})$$

— координаты середины поперечного вихря i и расчетной точки j соответственно, тогда [3]

$$z_k^* = 1 - \frac{2k-1}{2N}, \quad \frac{x_\mu^{k_i}}{b_{k_i}} = \frac{1}{2} - \frac{4\mu-3}{4n} + \frac{\Delta x_{k_i}}{b_{k_i}} \\ \frac{x_{0\nu}^{k_j}}{b_{k_j}} = \frac{1}{2} - \frac{4\nu-1}{4n} + \frac{\Delta x_{k_j}}{b_{k_j}}, \quad \frac{\Delta x_k}{b_k} = -\frac{b}{b_k} z_k^* \left(\frac{\lambda}{4} \frac{\eta+1}{\eta} \operatorname{tg} \chi_0 - \frac{\eta-1}{2\eta} \right) \quad (3.5)$$

В формулы, где k стоит без индекса, можно подставить или k_i или k_j .

Обратимся к вихревым шнурам за крылом $\mu = n + \varepsilon$, $\varepsilon = 1, \dots, r$, которые получены параллельным смещением шнура $\mu = n$ вдоль оси Ox на $\varepsilon b/n$. Сохраняя здесь тот же принцип обозначений, как и на крыле, замечаем, что все приведенные выше соотношения, в которые не входит μ , остаются без изменения; кроме того,

$$\chi_{n+\varepsilon} = \chi_n \quad (\varepsilon = 1, \dots, r) \quad (3.6)$$

В соответствии со сказанным имеет место связь (фиг. 2)

$$x_{n+\varepsilon}^{k_i} = x_n^{k_i} - \varepsilon b/n$$

Найдем выражения для безразмерных координат, по которым вычисляются скорости (2.1) в точке j как от вихря i , расположенного на той же половине крыла, так и от вихря i' , симметричного i . Сравнивая системы

координат фиг. 2 и 4, после очевидных преобразований будем иметь

$$\xi_{0\mu\nu}^{k_i k_j} = 4 \frac{b}{l} N \left(\frac{b_{k_i} x_{\mu}^{k_i}}{b b_{k_i}} - \frac{b_{k_j} x_{0\nu}^{k_j}}{b b_{k_j}} \right) \quad (3.7)$$

$$\xi_0^{k_i k_j} = 2N (z_{k_i}^* - z_{0k_j}^*), \quad (\xi_0 + \delta\xi_0)^{k_i k_j} = 2N (z_{k_i}^* + z_{k_j}^*)$$

При расчете скоростей от свободных вихрей за крылом безразмерные координаты $\xi_0^{k_i k_j}$ и $(\xi_0 + \delta\xi_0)^{k_i k_j}$ будут определяться по тем же формулам. Согласно (3.6), можем написать

$$\xi_{0n+\varepsilon}^{k_i k_j} = \frac{2}{l} (x_{n+\varepsilon}^{k_i} - x_{0\nu}^{k_j})$$

Отсюда

$$\xi_{0n+\varepsilon}^{k_i k_j} = \xi_{0n\nu}^{k_i k_j} - \frac{8N\varepsilon}{n\lambda} \frac{\eta}{\eta+1} \quad (\varepsilon = 1, \dots, r) \quad (3.8)$$

Безразмерные скорости (2.1), которые соответствуют вихрям i и j и вычисляются по этим аргументам, обозначим

$$w_{y\mu\nu}^{k_i k_j} = w_y (\xi_{0\mu\nu}^{k_i k_j}, \xi_0^{k_i k_j}, \chi_{\mu}); \quad \delta w_{y\mu\nu}^{k_i k_j} = w_y (\xi_{0\mu\nu}^{k_i k_j}, (\xi_0 + \delta\xi_0)^{k_i k_j}, \chi_{\mu}) \quad (3.9)$$

причем

$$\chi_{n+\varepsilon} = \chi_n \quad (\varepsilon = 1, \dots, r) \quad (3.10)$$

§ 4. Уравнения для циркуляций. Составим уравнения для определения безразмерных циркуляций суммарных вихрей на крыле $\Gamma_{\mu k_i}^{(r)}$ и свободных вихрей за крылом $\delta_{k_i}^{(r)}$. В каждый расчетный момент τ все суммарные циркуляции на крыле должны определяться заново, у свободных вихрей неизвестны лишь циркуляции на линии $\mu = n + 1$. Таким образом, при любом r число неизвестных равно $m + N$ (фиг. 2).

Верхний индекс у $\delta_{k_i}^{(r)}$ показывает, при каком значении r данные свободные вихри находились на линии $\mu = n + 1$. Далее эти вихри сносятся вниз по течению, причем циркуляция их не меняется. Поэтому при $r = \varepsilon$ устанавливается следующее соответствие между номером линии за крылом μ и циркуляцией свободных вихрей δ на ней:

$$\mu = n + 1, \quad n + 2, \quad \dots, \quad n + \varepsilon$$

$$\delta = \delta_{k_i}^{(\varepsilon)}, \quad \delta_{k_i}^{(\varepsilon-1)}, \quad \dots, \quad \delta_{k_i}^{(1)}$$

На основании (2.1) и фиг. 2 и 4 для скорости, вызванной всей вихревой системой крыла, можем написать

$$\frac{W_y}{U_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} (w_{y\mu\nu}^{k_i k_j} \pm \delta w_{y\mu\nu}^{k_i k_j}) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\varepsilon=1}^r \delta_{k_i}^{(\varepsilon)} (w_{yn+r-\varepsilon+1\nu}^{k_i k_j} \pm \delta w_{yn+r-\varepsilon+1\nu}^{k_i k_j}) \quad (4.1)$$

Положительные направления для суммарных и свободных вихрей показаны на фиг. 2.

Знак плюс в этих формулах берется для симметричных и знак минус — для антисимметричных относительно плоскости $z = 0$ циркуляций.

Для их определения имеем условия о плавном обтекании крыла (1.1) и равенстве нулю циркуляций всех вихрей на крыле и за ним в каждом сечении $k_i = \text{const}$ при любом r .

Граничное условие будет удовлетворяться в точках j при расчетных моментах времени τ_r , поэтому правая часть уравнений будет содержать функции

$$f_{k_i}^{(r)} = f(x_{0\nu}^{k_j}/b, z_{0k_j}/b, \tau_r) \quad (4.2)$$

Учитывая сказанное, на основании (1.1), (4.1) и (4.2) получаем системы алгебраических линейных уравнений

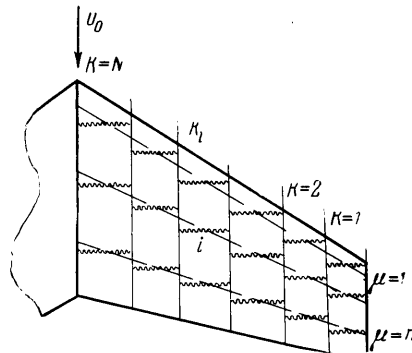
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{*\mu k_i}^{(r)}}{c} (w_{y\mu\nu}^{k_i k_j} \pm \delta w_{y\mu\nu}^{k_i k_j}) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\varepsilon=1}^r \frac{\delta_{k_i}^{(\varepsilon)}}{c} (w_{y\nu+r-\varepsilon+1\nu}^{k_i k_j} \pm \delta w_{y\nu+r-\varepsilon+1\nu}^{k_i k_j}) = f_{k_j\nu}^{(r)} \quad (4.3) \\ & \sum_{\mu=1}^n \frac{\Gamma_{*\mu k_i}^{(r)}}{c} - \sum_{\varepsilon=1}^r \frac{\delta_{k_i}^{(\varepsilon)}}{c} = 0 \quad (r=1, \dots, m=nN; k_i=1, \dots, N \\ & k_j=1, \dots, N; \nu=1, \dots, n) \end{aligned}$$

При каждом значении r решение этих систем производится независимо, начиная с $r = 1$ и далее при последовательно возрастающих r . Неизвестными будут $\Gamma_{*\mu k_i}^{(r)} / c$ и $\delta_{k_i}^{(r)} / c$, поскольку величины $\delta_{k_i}^{(\varepsilon)} / c$ при $\varepsilon < r$ уже будут найдены.

§ 5. Определение циркуляций присоединенных вихрей. Согласно теореме Жуковского «в малом» (1.3), аэродинамические нагрузки крыла выражаются через циркуляции присоединенных вихрей. Поэтому по найденным выше суммарным циркуляциям на крыле $\Gamma_{*\mu k_i}^{(r)}$ в каждый расчетный момент τ_r необходимо найти циркуляции присоединенных вихрей $\Gamma_{\mu k_i}$.

Для этого в каждом сечении k целесообразно перейти от косых к прямым вихрям той же циркуляции (фиг. 6). Из (1.3) следует, что эти вихревые системы создают одинаковые нормальные силы.

Рассмотрим произвольное сечение k_i (фиг. 6), в нем расстояние между соседними вихрями будет одинаково и равно b_{k_i} / n . Пусть Δt_{k_i} — время, за которое свободный вихрь, сносимый со скоростью U_0 , проходит указанное расстояние. Аналогично (1.1) и (2.4) введем безразмерные величины



Фиг. 6

$$\tau_{rk_i} = r_{k_i} \Delta t_{k_i} \quad (r_{k_i} = 1, 2, \dots) \quad (5.1)$$

причем τ_{rk_i} назовем расчетными моментами сечения k_i .

С одной стороны, $\Delta t_{k_i} = \Delta t_{k_i} U_0 / b$, а с другой, $\Delta t_{k_i} U_0 = b_{k_i} / n$, то

$$\Delta t_{k_i} = \frac{1}{n} \frac{b_{k_i}}{b} \quad (5.2)$$

В результате имеем связь, аналогичную (2.4), позволяющую найти расчетные моменты в каждом сечении k_i

$$\tau_{rk_i} = \frac{r_{k_i}}{n} \frac{b_{k_i}}{b} \quad (5.3)$$

По аналогии с (3.1), безразмерные циркуляции суммарных, присоединенных и свободных вихрей на крыле в моменты τ_{rk_i} будем обозначать $\Gamma_{*\mu k_i}^{(rk_i)}$, $\Gamma_{\mu k_i}^{(rk_i)}$, $\Delta_{\mu k_i}^{(rk_i)}$. За положительное направление для первых двух возьмем то, которое изображено на фиг. 2 для суммарных циркуляций, а для

свободных естественно в качестве положительного взять обратное, как и у $\delta_k^{(r)}$. По данным § 4, путем интерполяции нетрудно вычислить значения $\Gamma_{*\mu k_i}^{(r k_i)}$. Для этого при рассматриваемом значении r_{k_i} нужно найти такие r , при которых

$$\tau_r \leq \tau_{r_{k_i}} \leq \tau_{r+1}, \quad \text{или} \quad r \leq r_{k_i} b_{k_i} / b \leq r + 1$$

Последнее получается согласно (2.4) и (5.3).

Таким образом, подбор необходимых для интерполяции значений r при данном r_{k_i} производится на основании неравенства

$$0 \leq r_{k_i} b_{k_i} / b - r \leq 1 \quad (5.4)$$

После этого, если, например, ограничиться линейной интерполяцией, можем написать

$$\Gamma_{*\mu k_i}^{(r k_i)} = \Gamma_{*\mu k_i} + (\Gamma_{*\mu k_i}^{(r+1)} - \Gamma_{*\mu k_i}^{(r)}) \left(r_{k_i} \frac{b_{k_i}}{b} - r \right) \quad (5.5)$$

Перейдем к вычислению циркуляций присоединенных вихрей $\Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i)}$, считая суммарные циркуляции $\Gamma_{*\mu k_i}^{(r k_i)}$ известными. Так как изменение циркуляции присоединенного вихря происходит из-за схода свободного, то

$$\Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i)} - \Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i - 1)} = \Delta_{\mu k_i}^{(r k_i)} \quad (5.6)$$

Свободные вихри сносятся вниз по течению, причем расчетные моменты времени τ_{k_i} выбраны так, что за время между ними вихри проходят как раз расстояние между соседними линиями μ и $\mu + 1$ (фиг. 3 и 6).

Поэтому в расчетные моменты τ_{k_i} на шнуре $\mu = 1$ свободных вихрей не будет никогда, на втором шнуре будут только от первого, на третьем при $r_{k_i} = 1$ — только от второго, при $r_{k_i} = 2$ — от второго и третьего и т. д. Принимая во внимание сказанное, можем написать

$$\begin{aligned} \Gamma_{*1 k_i}^{(r k_i)} &= \Gamma_{1 k_i}^{(r k_i)}, & \Gamma_{*2 k_i}^{(r k_i)} &= \Gamma_{2 k_i}^{(r k_i)} - \Delta_{1 k_i}^{(r k_i)} \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \Gamma_{*\mu k_i}^{(r k_i)} &= \Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i)} - \Delta_{\mu-1 k_i}^{(r k_i)} - \Delta_{\mu-2 k_i}^{(r k_i)} - \dots - \Delta_{\mu-r k_i}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

На основании (5.6) и (5.7) получаем рекуррентную формулу для вычисления циркуляций присоединенных вихрей

$$\Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i)} = \Gamma_{*\mu k_i}^{(r k_i)} + [\Gamma_{\mu-1 k_i}^{(r k_i)} - \Gamma_{\mu-1 k_i}^{(r k_i - 1)}] + [\Gamma_{\mu-2 k_i}^{(r k_i - 1)} - \Gamma_{\mu-2 k_i}^{(r k_i - 2)}] + \dots + \Gamma_{\mu-r k_i}^{(1)} \quad (5.8)$$

В формулах (5.6) — (5.8) все циркуляции с неположительными индексами должны быть приняты равными нулю.

§ 6. Расчет аэродинамических характеристик крыла. Прежде всего необходимо путем интерполяции по времени перейти от $\Gamma_{\mu k_i}^{(r k_i)}$ к $\Gamma_{\mu k_i}^{(r)}$ — циркуляциям присоединенных вихрей в расчетные моменты τ_r , одинаковые для всего крыла. Для этого найдем такие $\tau_{r_{k_i}}$, когда при данном τ_r выполняется неравенство

$$\tau_{r_{k_i}} \leq \tau_r \leq \tau_{r_{k_i+1}}, \quad \text{или} \quad 0 \leq r b / b_{k_i} - r_{k_i} \leq 1 \quad (6.1)$$

Последнее имеет место согласно (2.4) и (5.3).

Из (6.1) для значений $r = 1, 2, \dots$ определяются $r_{k_i} = 1, 2, \dots$. После этого, ограничиваясь, например, линейной интерполяцией, имеем

$$\Gamma_{\mu k_i}^{(r)} = \Gamma_{\mu k_i}^{(r_{k_i})} + \left[\Gamma_{\mu k_i}^{(r_{k_i}+1)} - \Gamma_{\mu k_i}^{(r_{k_i})} \right] (rb/b_{k_i} - r_{k_i}) \quad (6.2)$$

Теперь на основании теоремы Жуковского «в малом» (1.3) нетрудно определить нестационарные аэродинамические нагрузки на крыле, характеристики сечений и суммарные коэффициенты крыла.

При этом следует учесть, что непрерывно распределенный слой на каждом участке $\Delta x = b_{k_i} / n$ заменялся одним дискретным вихрем.

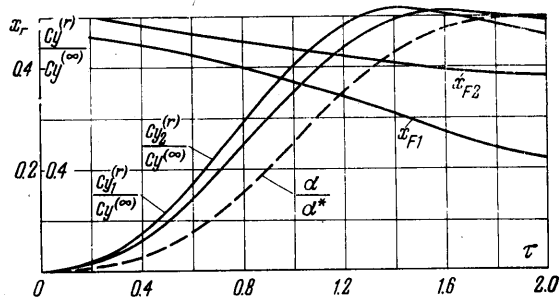
Согласно фиг. 1, для подъемной силы и моментов крыла имеем выражения, в которых суммирование производится по одной (правой) половине крыла

$$Y^{(r)} = 2 \sum_{i=1}^m \Delta p_i^{(r)} \Delta S_i$$

$$M_z^{(r)} = 2 \sum_{i=1}^m \Delta p_i^{(r)} x_i \Delta S_i$$

$$M_x^{(r)} = -2 \sum_{i=1}^m \Delta p_i^{(r)} z_i \Delta S_i$$

$$\Delta S_i = \frac{l_0 b_{k_i}}{n}$$



Фиг. 7

Здесь i — номер присоединенного вихря, ΔS_i — соответствующая элементарная площадка, x_i, z_i — координаты середины вихря.

На основании (1.3) имеем

$$\Delta p_i^{(r)} \Delta S_i = \rho U_0^2 l_0^2 \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} \quad (6.4)$$

Введем аэродинамические коэффициенты

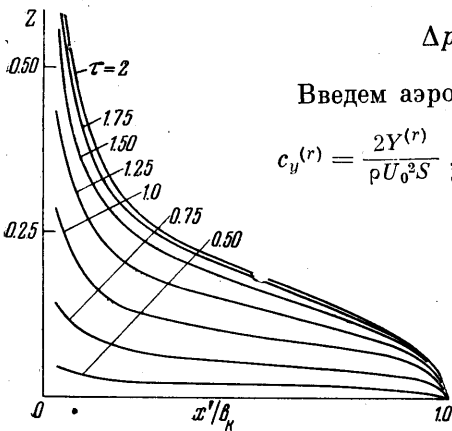
$$c_y^{(r)} = \frac{2Y^{(r)}}{\rho U_0^2 S}; \quad m_z^{(r)} = \frac{2M_z^{(r)}}{\rho U_0^2 S b}; \quad m_x^{(r)} = \frac{2M_x^{(r)}}{\rho U_0^2 S l} \quad (6.5)$$

где S — площадь крыла. Тогда из (6.3), (6.4) и (6.5) получим

$$c_y^{(r)} = \frac{\lambda}{N^2} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} \quad (6.6)$$

$$m_z^{(r)} = \frac{\lambda}{N^2} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} \frac{b_{k_i}}{b} \frac{x_{\mu}^{k_i}}{b_{k_i}}$$

$$m_x^{(r)} = -\frac{\lambda}{2N^2} \sum_{k_i=1}^N \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} z_{k_i}^*$$



Фиг. 8

Аналогичные формулы имеют место и для коэффициентов сечений крыла

$$c_{y k_i}^{(r)} = \frac{\lambda}{2N} \frac{\eta + 1}{\eta} \frac{b}{b_{k_i}} \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)}, \quad m_{z k_i}^{(r)} = \frac{\lambda}{2N} \frac{\eta + 1}{\eta} \frac{b}{b_{k_i}} \sum_{\mu=1}^n \Gamma_{\mu k_i}^{(r)} \frac{x_{\mu}^{k_i}}{b_{k_i}} \quad (6.7)$$

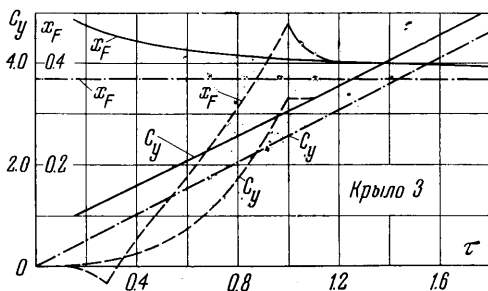
$$c_{y k_i}^{(r)} = \frac{2\Delta Y^{(r)k_i}}{\rho U_0^2 l_0 b_{k_i}}, \quad m_{z k_i}^{(r)} = \frac{2\Delta M_z^{(r)k_i}}{\rho U_0^2 l_0 b_{k_i}^2} \quad (6.8)$$

Через $\Delta Y^{(r)}_{k_i}$ и $\Delta M_z^{(r)}_{k_i}$ обозначены подъемная сила и продольный момент относительно оси Oz , возникающие в сечении k_i .

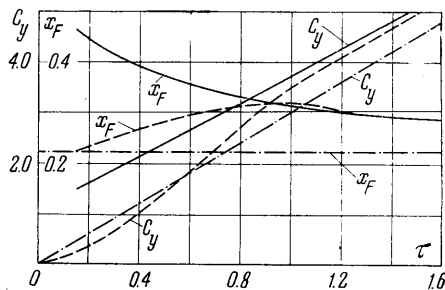
§ 7. **Примеры.** Для равностороннего треугольного 1 и прямоугольного 2 крыльев одинакового удлинения $\lambda = 2.31$ приводятся некоторые данные, характеризующие воздействие среды при плавном переходе крыла с нулевого угла атаки на угол $\alpha = \alpha^*$. Закон изменения угла атаки по безразмерному времени имеет вид

$$\frac{\alpha}{\alpha^*} = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2\pi} \sin \pi(\tau - 1), \quad (0 < \tau \leq 2), \quad \frac{\alpha}{\alpha^*} = 1, \quad (2 \leq \tau < \infty) \quad (7.1)$$

и изображен пунктиром на фиг. 7.



Фиг. 9



Фиг. 10

Характер распределения интенсивности присоединенного вихревого слоя на крыле 1 в сечении $z^* = 0.917$, расположенном вблизи конца крыла, в разные моменты времени иллюстрирует фиг 8, где $Z = [(\gamma_{+z}) / \alpha^* U_0] b_k / b$. Через x' обозначено расстояние от передней кромки до текущей точки в сечении ($x' / b_{k_i} = 0$ — носик и $x' / b_{k_i} = 1$ — задняя кромка сечения).

Изменение коэффициента подъемной силы и перемещение фокуса крыла со временем изображены на фиг. 7. Индексы показывают, для какого крыла берутся коэффициенты. Безразмерные координаты фокуса отсчитаны от носка средней аэродинамической хорды и отнесены к этой хорде [8]. Полезно отметить также, что пунктирная кривая, кроме зависимости α / α^* от τ , дает приближенный закон изменения коэффициента подъемной силы, вытекающий из так называемой гипотезы стационарности.

Для треугольного 3 и прямоугольного 4 крыльев с удлинением $\lambda = 2.5$ рассматривается воздействие переменного по времени вертикального порыва. Он характеризуется следующим соотношением:

$$f = 0, \quad \tau < 0; \quad f = \tau, \quad \tau > 0 \quad (7.2)$$

На фиг. 9 (крыло 3) и фиг. 10 (крыло 4) показано, как меняются коэффициент подъемной силы и положение фокуса со временем при мгновенном охвате крыла порывом (сплошные линии) и при постепенном вхождении крыла в порыв (пунктир). Данные, полученные по гипотезе стационарности, изображены пунктиром с точкой.

Автор приносит благодарность Э. П. Капустиной, которая провела расчеты примеров.

Поступило 29. X. 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд-во АН СССР, 1947.
2. Bisplinghoff R. L., Ashley H, Halfman R. L. Aeroelasticity, 1955.
3. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. Изд-во «Наука», 1965.
4. Белоцерковский С. М. Метод расчета коэффициентов вращательных производных и присоединенных масс тонкого крыла произвольной формы в плане. Сб. статей по аэрогидродинамике. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 940.