

ОДНОРОДНОЕ ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КОНУСЕ С ДИАФРАГМОЙ

С. А. БОСТАНДЖИАН

(Москва)

Принятая в работе автора [1] модель гидроциклона (однородное винтовое течение в конусе) лишь приближенно отражает специфику течения жидкости внутри аппарата. В реальных гидроциклонах небольшая часть жидкости вместе с отброшенными к стенке твердыми частицами выходит через насадку в вершине конуса, а основная часть жидкости покидает гидроциклон через цилиндрическую диафрагму, вставленную через центр основания на определенную глубину. С целью выяснения влияния диафрагмы на структуру потока в гидроциклоне в настоящей работе решается задача об однородном винтовом движении жидкости в конусе с диафрагмой.

1. Предполагается, что идеальная несжимаемая жидкость совершает однородное винтовое движение в области, ограниченной конической поверхностью с углом раствора при вершине $2\theta_0$ и сферической поверхностью радиуса R_0 (фиг. 1). По оси конуса через центр основания вставлена цилиндрическая диафрагма на глубину $R_0 - h$. Жидкость поступает в коническую область через кольцевую щель у основания конуса в количестве q единиц в секунду, а вытекает через вершину конуса и через диафрагму в количестве q_1 и q_2 единиц соответственно. Пренебрегая влиянием диаметра диафрагмы на распределение поверхностей тока, диафрагму представим в виде отрезка прямой.

Задача об однородном винтовом движении жидкости в указанной области сводится к нахождению функции тока $\psi(r, \theta)$ из неоднородного дифференциального уравнения в сферических координатах [2]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + k^2 \psi = -kC \quad (1.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta_0) &= \psi_1 \quad (0 \leq r \leq R_0), & \psi(R_0, \theta) &= \psi_2 \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0) \\ \psi(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq h), & \psi(r, 0) &= \psi_2 \quad (h \leq r \leq R_0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$(k, C = \text{const}, \quad \psi_1 = -q_1/2\pi, \quad \psi_2 = q_2/2\pi)$

Введем функцию $u(r, \theta)$, связанную с функцией тока соотношением

$$u(r, \theta) = \psi(r, \theta) - \psi_1 - f(r) \frac{\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \quad (1.3)$$

$$f(r) = \begin{cases} -\psi_1 & (0 \leq r \leq h) \\ \psi_2 - \psi_1 & (h \leq r \leq R_0) \end{cases} \quad (1.4)$$

Введенная таким образом функция на сферической поверхности $r = h$ терпит разрыв с известным скачком

$$u(h+0, \theta) - u(h-0, \theta) = -\psi_2 \frac{\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \quad (1.5)$$

а производная ее по r при $r \rightarrow h-0$ и $r \rightarrow h+0$ принимает одинаковые значения

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=h-0} = \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=h+0} \quad (1.6)$$

Заменяя в уравнении (1.1) функцию $\psi(r, \theta)$ через $u(r, \theta)$ согласно (1.3), получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + k^2 u = -kC - k^2 \psi_1 - k^2 f(r) + \frac{f(r)}{\sin^2 \theta_0} \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) \sin^2 \theta \quad (1.7)$$

Для функции $u(r, \theta)$, согласно (1.2) и (1.3), получаем следующие граничные условия:

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \theta_0) = 0, \quad u(R_0, \theta) = (\psi_2 - \psi_1) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.7) записывается по-разному при $r < h$ и $r > h$. Разобьем область течения на две области: на область 1, ограниченную боковой поверхностью конуса и сферической поверхностью $r = h$, и область 2, ограниченную боковой поверхностью конуса и двумя сферическими поверхностями $r = h$ и $r = R_0$. Функцию $u(r, \theta)$ в каждой области определим отдельно с последующим сопряжением по поверхности $r = h$. Условиями сопряжения являются (1.5) и (1.6).

Однородность граничных условий по переменной θ позволяет для определения функции $u(r, \theta)$ применить метод собственных функций. Функцию $u(r, \theta)$, как и в работе [1], будем искать в виде бесконечного ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(r) N_n(\theta) \quad (1.9)$$

по собственным функциям

$$N_n(\theta) = \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)$$

где $P_{\nu_n}^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции

Лежандра первого рода, а ν_n — собственные числа, определяемые из трансцендентного уравнения $P_{\nu_n}^1(\cos \theta_0) = 0$.

Умножая обе части (1.9) на $\rho(\theta) N_n(\theta) d\theta$ и интегрируя от 0 до θ_0 , получим

$$M_n(r) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{\theta_0} u(r, \theta) \rho(\theta) N_n(\theta) d\theta \quad \left(N_n^2 = \int_0^{\theta_0} \rho(\theta) [N_n(\theta)]^2 d\theta \right) \quad (1.10)$$

Здесь N_n^2 — норма собственных функций, $\rho(\theta) = 1 / \sin \theta$ — весовая функция. Для определения коэффициентов ряда $M_n(r)$ умножим уравнение (1.7) на

$$N_n^{-2} \rho(\theta) \sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) d\theta$$

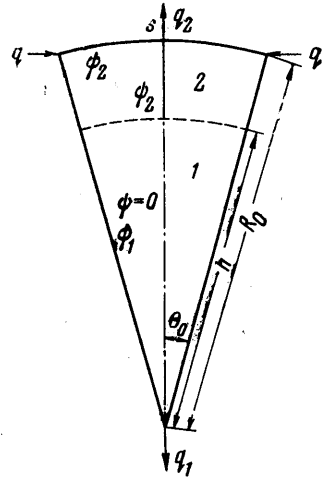
и проинтегрируем от 0 до θ_0 . Используя (1.4), (1.8) и (1.10), получим соответственно для областей 1 и 2

$$\frac{d^2 M_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\nu_n(\nu_n + 1)}{r^2} \right] M_n = -\frac{1}{N_n^2} (k\alpha_n C + k^2 \psi_1 \beta_n) + \frac{2\psi_1}{r^2} \frac{\beta_n}{N_n^2} \quad (0 \leq r \leq h)$$

$$\frac{d^2 M_n}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{\nu_n(\nu_n + 1)}{r^2} \right] M_n = -\frac{1}{N_n^2} [k\alpha_n C + k^2 \psi_2 \alpha_n - (\psi_2 - \psi_1) k^2 \beta_n] - \frac{2(\psi_2 - \psi_1)}{r^2} \frac{\beta_n}{N_n^2} \quad (h \leq r \leq R_0)$$

Здесь

$$\alpha_n = \int_0^{\theta_0} P_{\nu_n}^1(\cos \theta) d\theta, \quad \beta_n = \frac{1}{\sin^2 \theta_0} \int_0^{\theta_0} \sin^2 \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta) d\theta \quad (1.11)$$



Фиг. 1

Общие решения этих уравнений имеют вид

$$M_n(r) = A_n \sqrt{r} J_{\mu_n}(kr) + B_n \sqrt{r} N_{\mu_n}(kr) - \frac{1}{N_n^2} \left(\frac{\alpha_n C}{k} + \psi_1 \beta_n \right) \sqrt{kr} s_{1/2, \mu_n}(kr) + \frac{2\psi_1 \beta_n}{N_n^2} \sqrt{kr} s_{-1/2, \mu_n}(kr) \quad (0 \leq r \leq h)$$

$$M_n(r) = C_n \sqrt{r} J_{\mu_n}(kr) + D_n \sqrt{r} N_{\mu_n}(kr) - \frac{1}{N_n^2} \left[\frac{\alpha_n C}{k} + \psi_2 \alpha_n - (\psi_2 - \psi_1) \beta_n \right] \sqrt{kr} s_{1/2, \mu_n}(kr) - \frac{2(\psi_2 - \psi_1) \beta_n}{N_n^2} \sqrt{kr} s_{-1/2, \mu_n}(kr) \quad (h \leq r \leq R_0)$$

где $s_{\mu, \nu}(z)$ — функция Ломмеля, а $\mu_n = \nu_n + 1/2$.

Для определения четырех констант интегрирования имеем условия:

- 1) при $r \rightarrow 0$ функция $M_n(r)$ должна быть конечной;
- 2) при $r = R_0$ согласно (1.8), (1.10) и (1.11)

$$M_n(R_0) = \frac{(\psi_2 - \psi_1) \beta_n}{N_n^2} \quad (1.12)$$

- 3) согласно (1.5), (1.10) и (1.11)

$$M_n(h+0) - M_n(h-0) = - \frac{\psi_2 (\alpha_n - \beta_n)}{N_n^2} \quad (1.13)$$

- 4) согласно (1.6) и (1.10),

$$\left. \frac{dM_n}{dr} \right|_{r=h-0} = \left. \frac{dM_n}{dr} \right|_{r=h+0} \quad (1.14)$$

Прежде чем определить постоянные интегрирования, заметим, что функцию $s_{-1/2, \mu_n}(kr)$ можно выразить через $s_{1/2, \mu_n}(k, r)$, используя рекуррентную формулу для функций Ломмеля [5]. Величины α_n вычисляются элементарно, а β_n , хотя и вычисляются несколько сложнее, но в конечном итоге просто выражаются через α_n . Имеем

$$s_{-1/2, \mu_n}(kr) = \frac{s_{1/2, \mu_n}(kr) - (kr)^{-1/2}}{\mu_n^2 - 1/4}, \quad \alpha_n = P_{\nu_n}(\cos \theta_0) - 1, \quad \beta_n = \frac{4\mu_n^2 - 1}{4\mu_n^2 - 9} (1 + \alpha_n) \quad (1.15)$$

Определим теперь постоянные интегрирования. Так как при $\nu_n > 0$ произведение $\sqrt{r} N_{\mu_n}(kr) \rightarrow -\infty$, когда $r \rightarrow 0$, то должны положить $B_n = 0$.

Используя граничные условия (1.12), (1.13), (1.14), для определения постоянных A_n, C_n , и D_n получаем с учетом (1.15) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} C_n \sqrt{R_0} J_{\mu_n}(kR_0) + D_n \sqrt{R_0} N_{\mu_n}(kR_0) &= \frac{1}{N_n^2} \left(\frac{\alpha_n C}{k} - \right. \\ &\left. - \psi_2 + \psi_1 + \psi_1 \alpha_n \right) \sqrt{kR_0} s_{1/2, \mu_n}(kR_0) + \frac{(\psi_2 - \psi_1) (1 + \alpha_n)}{N_n^2} \\ (C_n - A_n) \sqrt{h} J_{\mu_n}(kh) + D_n \sqrt{h} N_{\mu_n}(kh) &= \frac{\psi_2}{N_n^2} [1 - \sqrt{kh} s_{1/2, \mu_n}(kh)] \\ (C_n - A_n) \frac{d}{dr} (\sqrt{r} J_{\mu_n}(kr))_{r=h} + D_n \frac{d}{dr} (\sqrt{r} N_{\mu_n}(kr))_{r=h} &= \\ &= - \frac{\psi_2}{N_n^2} \frac{d}{dr} (\sqrt{kr} s_{1/2, \mu_n}(kr))_{r=h} \end{aligned}$$

Если ввести безразмерную переменную $\rho = r/R_0$ и безразмерные параметры $\kappa = kR_0$, $\delta = kh$, $\gamma = \psi_2/\psi_1$, то функцию тока можно записать в следующем виде для областей 1 и 2.

Область 1 ($0 \leq \rho \leq \delta/\kappa$): (1.16)

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n' \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 \right) \sqrt{\kappa\rho} s_{1/2, \mu_n}(\kappa\rho) - \frac{8(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{\sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)}{N_n^2}$$

Область 2 ($\delta/\kappa \leq \rho \leq 1$)

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \gamma - (\gamma - 1) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n' \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + D_n' \sqrt{\rho} \frac{N_{\mu_n}(\kappa\rho)}{N_{\mu_n}(\kappa)} - \right. \\ \left. - \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 - \gamma \right) \sqrt{\kappa\rho} s_{1/2, \mu_n}(\kappa\rho) + \frac{8(\gamma - 1)(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{\sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)}{N_n^2}$$

Здесь (1.17)

$$A_n' = (\gamma - 1)(1 + \alpha_n) + \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 - \gamma \right) \sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa) - \\ - \frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}} \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2} (1 - \delta \sqrt{\delta} s_{-1/2, \mu_n-1}(\delta)) (J_{\mu_n}(\kappa) N_{\mu_n}(\delta) - N_{\mu_n}(\kappa) J_{\mu_n}(\delta)) + \right. \\ \left. + \delta (1 - \sqrt{\delta} s_{1/2, \mu_n}(\delta)) (J_{\mu_n}(\kappa) N_{\mu_n-1}(\delta) - N_{\mu_n}(\kappa) J_{\mu_n-1}(\delta)) \right] \quad (1.18)$$

$$C_n' = (\gamma - 1)(1 + \alpha_n) + \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 - \gamma \right) \sqrt{\kappa} s_{1/2, \mu_n}(\kappa) + \\ + \frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}} \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2} J_{\mu_n}(\delta) (1 - \delta \sqrt{\delta} s_{-1/2, \mu_n-1}(\delta)) + \right. \\ \left. + \delta J_{\mu_n-1}(\delta) (1 - \sqrt{\delta} s_{1/2, \mu_n}(\delta)) \right] N_{\mu_n}(\kappa) \quad (1.19)$$

$$D_n' = - \frac{\pi}{2} \gamma \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}} \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2} J_{\mu_n}(\delta) (1 - \delta \sqrt{\delta} s_{-1/2, \mu_n-1}(\delta)) + \right. \\ \left. + \delta J_{\mu_n-1}(\delta) (1 - \sqrt{\delta} s_{1/2, \mu_n}(\delta)) \right] N_{\mu_n}(\kappa) \quad (1.20)$$

Из полученного решения задачи об однородном винтовом движении жидкости в конусе с диафрагмой можно получить решение о потенциальном движении идеальной несжимаемой жидкости в той же области, если в формулах (1.16)–(1.20) перейти к пределу при $k \rightarrow 0$. Осуществив такой предельный переход, имеем

$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(\gamma - 1)(1 + \alpha_n) - \gamma \left(\frac{2\mu_n + 1}{4\mu_n} \left(\frac{h}{R_0} \right)^{\mu_n - 1/2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\mu_n - 1}{4\mu_n} \left(\frac{R_0}{h} \right)^{\mu_n + 1/2} \right) \right] \rho^{\mu_n + 1/2} - \frac{8(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{\sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)}{N_n^2} \quad (0 \leq \rho \leq \frac{h}{R_0}) \quad (1.21)$$

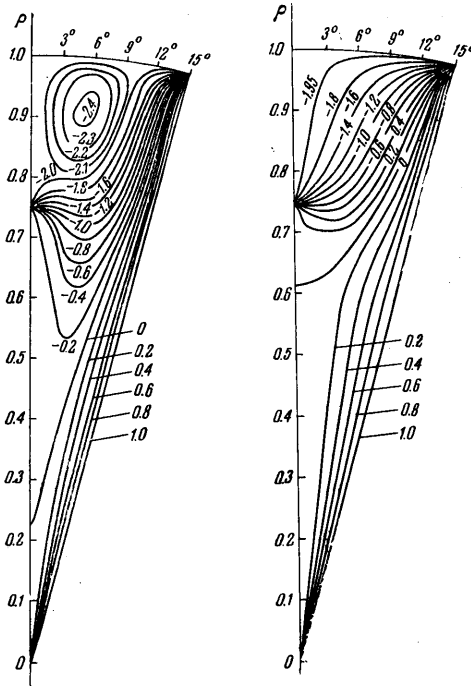
$$\frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} = \gamma - (\gamma - 1) \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\gamma - 1)(1 + \alpha_n) \rho^{\mu_n + 1/2} - \frac{\gamma(2\mu_n + 1)}{4\mu_n} \left(\frac{h}{R_0} \right)^{\mu_n - 1/2} \times \right. \\ \left. \times (\rho^{\mu_n + 1/2} - \rho^{-\mu_n + 1/2}) + \frac{8(\gamma - 1)(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{\sin \theta P_{\nu_n}^1(\cos \theta)}{N_n^2} \quad \left(\frac{h}{R_0} \leq \rho \leq 1 \right)$$

Способ определения собственных чисел ν_n и нормы собственных функций N_n^2 приводится в работе [1]. Вычисления функции тока значительно упрощаются, если вместо функций Лежандра использовать их асимптотические выражения, полученные в работе [3], которые применительно к фигурирующим здесь функциям выглядят так:

$$P_{\nu_n}^1(\cos \theta) = -\mu_n \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{1/2} J_1(\mu_n \theta), \quad P_{\nu_n}^0(\cos \theta) = \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^{1/2} J_0(\mu_n \theta) \quad (1.22)$$

Использование асимптотических формул вполне допустимо для практически интересных углов раствора конуса $2\theta_0 = 20 - 45^\circ$. При этом v_n и N_n^2 вычисляются по простым формулам $(v_n + 1/2)\theta_0 = x_n$, $N_n^2 = \mu_n\theta_0/\pi$, где x_n — n -й отличный от нуля корень уравнения $J_1(x) = 0$.

С использованием асимптотических формул на электронно-вычислительной машине были проделаны расчеты при следующих значениях параметров: $\kappa = 4$, $\delta = 3$, $C/k\psi_1 = -15$, $\gamma = -2$, $\theta_0 = 15^\circ$. Из выбранных значений κ и δ вытекает, что $h/R_0 = 0.75$. На фиг. 2 даны линии пересечения поверхностей тока $\psi(\rho, \theta) = \text{const}$ с меридиональной плоскостью в случае винтового и потенциального



Фиг. 2

движений жидкости. В случае винтового движения жидкости наличие диафрагмы сильно меняет структуру потока вблизи диафрагмы, где образуется застойная зона, в которой жидкость циркулирует, не выходя из конуса. Это находится в полном согласии с опытами Келсалла [4], который при помощи специального микроскопа наблюдал за движением находящихся в воде легких алюминиевых стружек в прозрачном модельном гидродиклоне. Автор отмечает существование вблизи диафрагмы выше ее конца области, в которой происходит рециркуляция жидкости.

2. Составляющие скорости выражаются через функцию тока [2]

$$v_\varphi = \frac{C + k\psi}{r \sin \theta}, \quad v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.1)$$

Составляющие скорости получим в безразмерной форме, отнеся их к величине $\lambda = \psi_1 / R_0^2$. Первую формулу (2.1) можно записать в виде

$$\frac{v_\varphi}{\lambda} = \frac{\kappa}{\rho \sin \theta} \left(\frac{C}{k\psi_1} + \frac{\psi(\rho, \theta)}{\psi_1} \right) \quad (2.2)$$

Для получения окружной скорости в областях 1 и 2 достаточно второе слагаемое в скобках заменить соответственно по формулам (1.16) и (1.17).

Используя соотношения

$$P_{v_n^1}(\cos \theta) = \frac{dP_{v_n}(\cos \theta)}{d\theta}, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_{v_n}(\cos \theta)}{d\theta} \right] = -v_n(v_n + 1)P_{v_n}(\cos \theta)$$

получим формулы для радиальной составляющей скорости

$$\frac{v_r}{\lambda} = \frac{2 \cos \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^2 - \frac{1}{4} \right) \left\{ A_n' \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} - \right. \quad (2.3)$$

$$\left. - \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 \right) \sqrt{\kappa\rho} s_{1/\mu_n}(\kappa\rho) - \frac{8(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{P_{v_n}(\cos \theta)}{N_n^2} \quad \left(0 \leq \rho \leq \frac{\delta}{\kappa} \right)$$

$$\frac{v_r}{\lambda} = -\frac{2(\gamma - 1) \cos \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{\rho^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n^2 - \frac{1}{4} \right) \left\{ C_n' \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + D_n' \sqrt{\rho} \frac{N_{\mu_n}(\kappa\rho)}{N_{\mu_n}(\kappa)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 - \gamma \right) \sqrt{\kappa\rho} s_{2/\mu_n}(\kappa\rho) + \frac{8(\gamma - 1)(1 + \alpha_n)}{4\mu_n^2 - 9} \right\} \frac{P_{v_n}(\cos \theta)}{N_n^2} \quad \left(\frac{\delta}{\kappa} < \rho < 1 \right)$$

Пользуясь рекуррентными формулами [5]

$$J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z), \quad s'_{\mu,\nu}(z) = (\mu + \nu - 1) s_{\mu-1,\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} s_{\mu,\nu}(z)$$

нетрудно показать, что

$$\frac{d}{d\rho} [\sqrt{\rho} J_{\mu_n}(\kappa\rho)] = \frac{1 - 2\mu_n}{2\sqrt{\rho}} J_{\mu_n}(\kappa\rho) + \kappa \sqrt{\rho} J_{\mu_n-1}(\kappa\rho) \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{d\rho} [\sqrt{\kappa\rho} s_{1/2,\mu_n}(\kappa\rho)] = \kappa \frac{1 - 2\mu_n}{2} \left[\frac{s_{1/2,\mu_n}(\kappa\rho)}{\sqrt{\kappa\rho}} - \sqrt{\kappa\rho} s_{-1/2,\mu_n-1}(\kappa\rho) \right] \quad (2.5)$$

Соотношение, аналогичное (2.4), справедливо и для функции Неймана $N_{\mu_n}(\kappa\rho)$. Используя (2.4), для составляющей скорости v_θ в областях 1 и 2 получаем

$$\begin{aligned} \frac{v_\theta}{\lambda} = & -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n' \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2\sqrt{\rho}} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + \kappa \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n-1}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} \right] - \left(0 \leq \rho \leq \frac{\delta}{\kappa} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\kappa(1 - 2\mu_n)}{2} \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 \right) \left(\frac{s_{1/2,\mu_n}(\kappa\rho)}{\sqrt{\kappa\rho}} - \sqrt{\kappa\rho} s_{-1/2,\mu_n-1}(\kappa\rho) \right) \right\} \frac{P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{N_n^2} \\ \frac{v_\theta}{\lambda} = & -\frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_n' \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2\sqrt{\rho}} \frac{J_{\mu_n}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} + \kappa \sqrt{\rho} \frac{J_{\mu_n-1}(\kappa\rho)}{J_{\mu_n}(\kappa)} \right] + \right. \\ & \left. + D_n' \left[\frac{1 - 2\mu_n}{2\sqrt{\rho}} \frac{N_{\mu_n}(\kappa\rho)}{N_{\mu_n}(\kappa)} + \kappa \sqrt{\rho} \frac{N_{\mu_n-1}(\kappa\rho)}{N_{\mu_n}(\kappa)} \right] - \kappa \frac{1 - 2\mu_n}{2} \left(\frac{C}{k\psi_1} \alpha_n + \alpha_n + 1 - \gamma \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{s_{1/2,\mu_n}(\kappa\rho)}{\sqrt{\kappa\rho}} - \sqrt{\kappa\rho} s_{-1/2,\mu_n-1}(\kappa\rho) \right) \right\} \frac{P_{\nu_n}^{-1}(\cos \theta)}{N_n^2} - \left(\frac{\delta}{\kappa} \leq \rho \leq 1 \right) \quad (2.6) \end{aligned}$$

Для вычисления составляющих скорости v_r и v_θ приходится дифференцировать ряд, выражающий функцию тока. Анализ полученных рядов показывает, что они сходятся равномерно во всей области течения, за исключением поверхностей $r = h$ и $r = R_0$. Из равномерной сходимости полученных рядов вытекает справедливость почленного дифференцирования ряда.

3. Наиболее полный экспериментальный материал по измерению поля скоростей содержится в работе Келсалла [4]. Для сравнения полученных в настоящей работе теоретических результатов с экспериментами были проделаны специальные расчеты применительно к опытам Келсалла.

Размеры гидроциклона таковы: $R_0 = 24.7$ см, $h = 14.5$ см, $\theta_0 = 10^\circ$. Результаты измерений по объемному расходу: $q = 1000$ см³/сек, $q_1 = 553$ см³/сек, $q_2 = 447$ см³/сек.

Профили окружных и осевых (направленных параллельно оси конуса) составляющих скоростей в шести горизонтальных сечениях, полученные Келсаллом, изображены на фиг. 3 и 4 сплошными линиями. Отсчет положительных и отрицательных скоростей производится от каждого сечения соответственно вверх и вниз. По оси абсцисс отложено расстояние d частицы жидкости от оси конуса. На фигурах сечение диафрагмы меридиональной плоскостью заштриховано, область между осью и параллельной ей прямой занимает воздушный столб.

Определим фигурирующие в расчетных формулах параметры $\psi_1, \psi_2, \gamma, C, \kappa$ и δ . Первые три легко определяются по величинам объемных расходов: $\psi_1 = -87.8$ см³/сек, $\psi_2 = 71$ см³/сек, $\gamma = \psi_2 / \psi_1 = -0.808$.

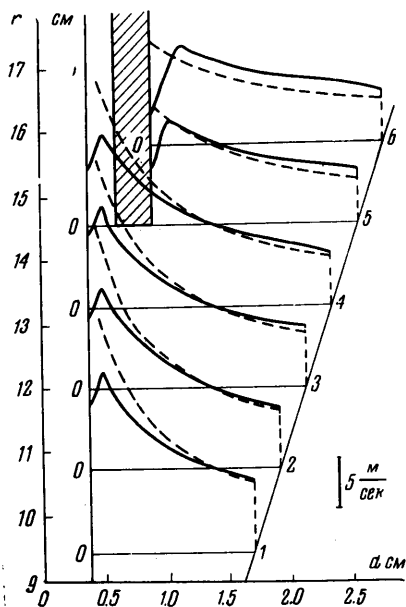
Параметры C и κ определялись путем обработки экспериментальных кривых окружной и осевой составляющих скорости. В случае однородного винтового движения жидкости окружная составляющая скорости выражается формулой

$$v_\varphi r \sin \theta = C + k\psi \quad (3.1)$$

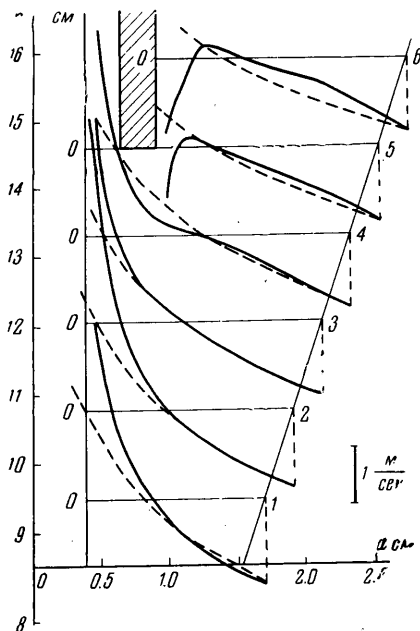
Произведение $r \sin \theta$ представляет собой расстояние точки с координатами r и θ до оси конуса. Из формулы (3.1) видно, что C есть момент окружной скорости частицы, находящейся на поверхности тока $\psi = 0$. Отсюда — такой метод определения постоянной C . Выбирается определенное сечение. Из фиг. 4 по кривой вертикальных скоростей путем численного интегрирования определяются координаты r^* и θ^* точки в этом

сечения, через которую проходит поверхность тока $\psi = 0$. Из фиг. 3 определяется окружная скорость v_ϕ^* в точке с координатами r^* , θ^* . После этого из формулы (3.1) определяется C . В данном случае было выбрано сечение 2.

В результате обработки экспериментальных кривых было найдено: $\theta^* = 8^\circ 20'$, $r^* \sin \theta^* = 1.56$ см, $v_\phi^* = 705$ см/сек, $C = 1100$ см²/сек. Параметр κ выбирался так, чтобы при вычислении функции тока по формуле (1.16) поверхность тока $\psi = 0$ проходила через точку с координатами r^* , θ^* . Этому условию удовлетворяет $\kappa = 6.1$ что соответствует $k = 0.25$ см⁻¹. Из соотношения $\delta / \kappa = h / R_0$ находим $\delta = 3.1$.



Фиг. 3



Фиг. 4

По найденным значениям параметров были проделаны расчеты окружных и осевых скоростей для тех сечений, в которых имеются экспериментальные кривые. По результатам расчетов на фиг. 3 и 4 пунктирной линией проведены профили окружных и осевых скоростей. Теоретические кривые окружных скоростей идут несколько круче, чем экспериментальные. Кривые, полученные расчетным путем, находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными кривыми везде, за исключением непосредственной близости к воздушному столбу. Это объясняется тем, что задача решалась без учета воздушного столба и, возможно, — наличием свободной поверхности.

Теоретические кривые осевой составляющей скорости в области ниже конца диафрагмы идут несколько ниже экспериментальных кривых в непосредственной близости к воздушному столбу и очень хорошо согласуются с последними в остальной части. Такое расхождение вблизи воздушного столба легко объясняется тем, что задача решалась без учета воздушного столба. Одно и то же количество жидкости при наличии воздушного столба уходит вверх через меньшее сечение, чем при отсутствии его, следовательно, и осевая скорость больше. Выше конца диафрагмы расхождение больше. Здесь сказывается влияние диаметра воздушного столба и толщины диафрагмы, которые в расчетах не принимались во внимание.

Поступило 16 VIII 1965

ЛИТЕРАТУРА:

1. Б о с т а н д ж и я н С. А. Однородное винтовое движение в конусе. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
2. В а с и л ь е в О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, 1958.
3. М у р а д я н Р. М. Асимптотические формулы для обобщенных функций Лежандра и функций Генбауэра. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 5.
4. K e i s a l l D. F. Recent developments in mineral dressing. London, I. M. M., 1952.
5. В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд. иностр. лит., 1949.