

## ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ СКОРОСТИ ПОТОКА В НЕСЖИМАЕМОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОЙ ФОРМЫ ТЕЧЕНИЯ

Ю. Н. АЛЕКСЕЕВ, А. И. КОРОТКИН

(Ленинград)

При относительно небольшом отборе жидкости со стенки устойчивость ламинарной формы течения в пограничном слое, развивающемся на ней, значительно увеличивается [1-4]. При теоретическом изучении этого явления все известные авторам данной статьи исследователи принимали во внимание только увеличение полноты профиля скоростей в пограничном слое при отсосе. Расчеты характеристик устойчивости велись в предположении, что поперечные скорости в пограничном слое отсутствуют.

Ниже приводится исследование устойчивости ламинарного пограничного слоя при наличии постоянной поперечной скорости в пристеночной области (отсос). Проведенные расчеты обнаружили существование для заданного профиля скоростей в пограничном слое такой относительной скорости отсоса  $v = v^0$ , что при скоростях отсоса, больших  $v^0$ , течение сохраняет устойчивость при всех числах Рейнольдса, в то время как метод, использованный в упомянутых работах, для каждой относительной скорости отсоса дает определенное конечное критическое число Рейнольдса, равное в принятых обозначениях числу Рейнольдса при  $v = 0$ .

Обнаружено, что при отсосе жидкости из пограничного слоя область неустойчивости имеет конечные размеры, т. е. существуют нижнее и верхнее критические числа Рейнольдса. Течение устойчиво, если его число Рейнольдса меньше нижнего или больше верхнего значения критического числа Рейнольдса.

Область неустойчивости уменьшается с увеличением относительной скорости отсоса и при определенном для каждого профиля скоростей значении этой скорости область неустойчивости вырождается в точку — течение становится абсолютно устойчивым. Таким образом, при распределенном отсосе относительную скорость отсоса имеет смысл увеличивать только до определенной величины, соответствующей исчезновению области неустойчивости. Приведенные результаты расчетов позволяют оценить указанную скорость для профилей скорости — от профиля Блазуса до асимптотического профиля. Конкретные вычисления были проделаны для семейства профилей Вуста, так как в реальных условиях при отсосе всегда существует разгонный участок пограничного слоя [1, 2].

1. Уравнение для функции тока возмущающего движения несжимаемой жидкости [5] имеет вид

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial y} = \nu \Delta \Delta \varphi \quad (1.1)$$

Здесь  $x$  — координата вдоль стенки,  $y$  — координата перпендикулярно стенке,  $\theta$  — функция тока невозмущенного движения,  $\varphi$  — функция тока возмущающего движения. Будем считать, что

$$\theta = \theta_1(y) - v_0 x \quad (1.2)$$

Величина  $v_0 = \text{const}$  представляет собой поперечную составляющую скорости основного потока в пограничном слое. Примером пограничного слоя с постоянной поперечной скоростью является асимптотический пограничный слой с отсосом жидкости на нижней границе.

Принимаем обычное выражение для функции тока возмущающего движения [6]

$$\varphi = f(y) e^{i(ax - \omega t)}$$

подставляя (1.2) в уравнение (1.1), получаем следующее уравнение относительно амплитуды функции тока:

$$\left(u - \frac{\omega}{a}\right) (f'' - a^2 f) - u'' f + \frac{v_0}{ia} (f''' - a^2 f') = -\frac{i\nu}{a} (f^{IV} - 2a^2 f'' + a^4 f)$$

Здесь  $u(y)$  — распределение средней скорости в пограничном слое,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости.

Примем за характерную скорость  $U_0$  — скорость на границе пограничного слоя, за характерный размер  $\delta$  — толщину пограничного слоя и перепишем предыдущее уравнение в безразмерной форме, сохраняя для безразмерных величин  $u$  и  $f$  прежние обозначения

$$(u - c)(f'' - \alpha^2 f) - u''f = -\frac{i}{\alpha R}(f^{IV} - 2\alpha^2 f'' + \alpha^4 f) - \frac{\nu}{i\alpha}(f''' - \alpha^2 f') \quad (1.3)$$

Это соотношение представляет собой обобщение на рассматриваемый случай уравнения Орра — Зоммерфельда.

Граничные условия для уравнения (1.3) возьмем в обычной [1-6] форме

$$f(0) = f'(0) = \alpha f(1) + f'(1) = 0, \quad f(y) < M < \infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

2. Заметим, что относительная величина поперечной скорости в случае управления пограничным слоем с целью ламинаризации имеет порядок  $R^{-1}$ , где число Рейнольдса  $R = U_0 \delta / \nu$ . В связи с этим за первые два решения уравнения (1.3) возьмем аналогичные решения уравнения Орра — Зоммерфельда, которые находятся в предположении о малости правой части уравнения, зависящей от вязкости [6]

$$f_1(y) = (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) \alpha^{2n}, \quad q_0 = 1 \quad (2.1)$$

$$f_2(y) = (u - c) \sum_{n=0}^{\infty} q_n(y) \alpha^{2n} \quad (2.2)$$

$$q_0 = \int_0^y \frac{dy}{(u - c)^2}, \quad q_{n+1} = \int_0^y \left[ \int_0^y (u - c)^2 q_n(y) dy \right] \frac{dy}{(u - c)^2}$$

Для определения оставшихся двух решений уравнения (1.3) сделаем подстановку

$$f(y) = \exp \left[ \int_0^y p(y) dy \right]$$

Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$(u - c)(p' + p^2 - \alpha^2) - u'' + \frac{\nu R}{i\alpha R}(p'' + 3pp' + p^3 - \alpha^2 p) = -\frac{i}{\alpha R}[p^4 + 6p^2 p' + 3p'^2 + 4pp'' + p''' - 2\alpha^2(p' + p^2) + \alpha^4] \quad (2.3)$$

Решения уравнения (2.3) ищем в форме ряда

$$p(y) = \sqrt{\alpha R} p_0(y) + p_1(y) + \frac{1}{\sqrt{\alpha R}} p_2(y) + \dots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, что дает погрешность порядка  $(\alpha R)^{-1/2}$ , находим

$$p_0(y) = \pm \sqrt{i(u - c)}, \quad p_1(y) = -\frac{5}{2} \frac{p_0'}{p_0} + \frac{\nu R}{2} \quad (2.4)$$

$$f_3(y) = (u - c)^{-1/2} \exp \left[ -\int_0^y \sqrt{i\alpha R(u - c)} dy + \frac{\nu R}{2} y \right] \quad (2.5)$$

$$f_4(y) = (u - c)^{-1/2} \exp \left[ \int_0^y \sqrt{i\alpha R(u - c)} dy + \frac{\nu R}{2} y \right] \quad (2.6)$$

При отсосе жидкости величина  $v$  будет отрицательной. Решение  $f_4(y)$  не удовлетворяет последнему из условий (1.4), что видно из выражения (2.6). Поэтому в общем решении уравнения (1.3)

$$f(y) = C_1 f_1(y) + C_2 f_2(y) + C_3 f_3(y) + C_4 f_4(y) \quad (2.7)$$

постоянная  $C_4 = 0$ . Формула (2.5) показывает, что

$$f_3(y) = f_3^{\circ}(y) \exp(1/2vRy) \quad (2.8)$$

Здесь  $f_3^{\circ}(y)$  — соответствующее решение для уравнения Орра—Зоммерфельда. Указанное обстоятельство будет использовано в дальнейшем.

3. При определении произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3$  в общем решении из однородных граничных условий (1.4) возникает характеристическое уравнение, которое для нейтральных возмущений связывает параметры возмущающего движения  $\alpha$ ,  $s$  с числом Рейнольдса и характеристиками среднего движения. В обсуждаемом случае оно имеет вид

$$-\frac{1}{y_k} \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} = \frac{c}{|y_k u'(0)|} \frac{z}{1+z} \quad (3.1)$$

Здесь

$$z = z_r + iz_i = \frac{u'(0) c [f_2'(1) + \alpha f_2(1)]}{f_1'(1) + \alpha f_1(1)}$$

$$z_r = -\frac{u'(0)}{u_k'} + \frac{u'(0) \alpha u_k''}{u_k'^3} \ln c + \frac{u'(0) c}{\alpha (1-c)^2}, \quad z_i = -\pi u'(0) c \frac{u_k''}{u_k'^3}$$

$$u(y_k) = c, \quad u_k' = u'(y_k), \quad u_k'' = u''(y_k)$$

Примем, следуя [6], приближенное равенство  $c \approx y_k u'(0)$ , тогда уравнение (3.1) можно переписать так:

$$\left[1 - \frac{1}{y_k} \frac{f_3(0)}{f_3'(0)}\right]^{-1} = z + 1 \quad (3.2)$$

Учитывая (2.8), преобразуем левую часть (3.2), обозначив ее  $F^*(w)$

$$F^*(w) = \left[1 - \frac{1}{y_k} \frac{-f_3^{\circ}(0)}{f_3^{\circ}(0) + 1/2vRf_3^{\circ}(0)}\right]^{-1} = \left[1 - \frac{F(w)}{1 - 1/2vRy_k F(w)}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{1 - F(w)mw^3}{1 - F(w)(1 + mw^3)} = \frac{(1 - F_r mw^3)(1 - F_r - mw^3 F_r) + mw^3 F_i^2 (1 + mw^3)}{(1 - F_r - mw^3 F_r)^2 + F_i^2 (1 + mw^3)^2} +$$

$$+ i \frac{F_i}{(1 - F_r - mw^3 F_r)^2 + F_i^2 (1 + mw^3)^2}$$

$$w = y_k (\alpha u_k' R)^{1/2}, \quad m = \frac{1}{2} \frac{v}{\alpha y_k^2 u_k'}$$

Здесь через  $F(w) = F_r(w) + iF_i(w)$  обозначена функция Титьенса, подробные таблицы которой содержатся в работе [7].

Можно предложить следующий порядок расчета кривой нейтральной устойчивости.

1. Для ряда значений  $m$  строятся универсальные (не зависящие от профиля скоростей) зависимости  $F_i^*(w, m)$ ,  $F_r^*(w, m)$ .
2. Задавшись значением  $F_i^*$ , определяем по графику  $F_i^*(w, m)$  для определенного  $m$  значения  $w_1, w_2$ , а также, используя равенство  $F_i^* = z_i(c)$ , — величину  $c$ . Характер зависимости  $F_i^* = F_i^*(w)$  таков, что в общем случае одному значению функции соответствуют два значения аргумента.
3. По найденному  $c$  определяем  $y_k, u_k', u_k''$ , так как профиль скоростей известен.
4. Для найденных значений  $w_1, w_2$  и выбранного  $m$  вычисляем или определяем по графику значения функций  $F_{r1}^*, F_{r2}^*$ .

5. Используя равенство  $F_r^* = z_r + 1$ , находим  $\alpha_1, \alpha_2$ .
6. По формуле  $R = (w / y_k)^3 (\alpha u_k')^{-1}$  вычисляем  $R_1, R_2$ .
7. Определяем величины относительного вдува  $v = 2y_k^2 \alpha u_k' m$ , которые соответствуют полученным точкам нейтральной кривой.

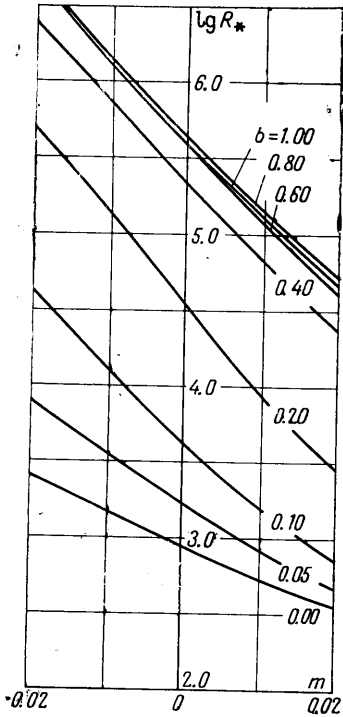
Указанную схему без изменения можно применить для непосредственного нахождения критического числа Рейнольдса без построения нейтральной кривой, если все вычисления провести для точки на кривой

$$F_i^* = F_i^*(w, m) \quad (F_i^* = \max F_i^*)$$

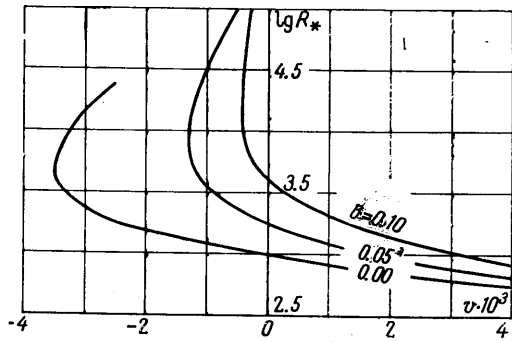
4. Расчеты зависимостей критического числа Рейнольдса  $R_*$  от величины поперечной скорости были проведены для семейства профилей Вуста

$$u(y, b) = u^{(2)}(y) + b [u_\xi^{(1)}(y) - u^{(2)}(y)]$$

Здесь  $u^{(1)}(y)$  — распределение скорости в асимптотическом профиле скоростей;  $u^{(2)}(y)$  — распределение скорости в профиле Блазиуса;  $b$  — параметр семейства, который варьировался от нуля до единицы.

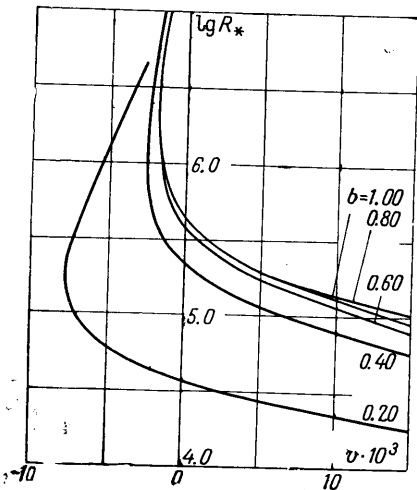


Фиг. 1

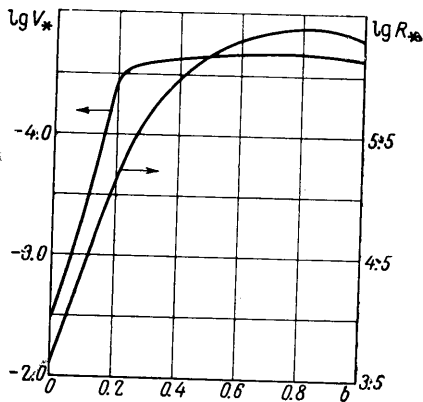


Фиг. 2

Зависимость критического числа Рейнольдса  $R_*$  от параметров  $m$  и  $b$  представлена на фиг. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра  $b$  и относительной поперечной скорости в пограничном слое показана на фиг. 2 и 3. Из рассмотрения этой зависимости можно сделать вывод о существовании для каждого профиля скоростей



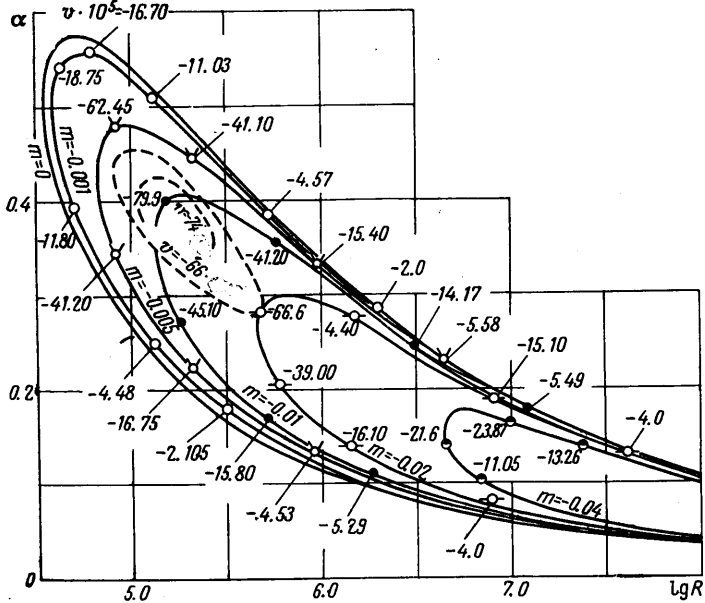
Фиг. 3



Фиг. 4

такой относительной скорости  $v_*$ , что при скорости отсоса, большей  $v_*$ , ламинарный пограничный слой сохраняет устойчивость при всех числах Рейнольдса.

Зависимости  $v_* = v_*(b)$ ,  $R_* = R_*(b)$  приведены на фиг. 4. При скоростях отсоса, меньших  $v_*$ , существуют два критических числа Рейнольдса: верхнее  $R_*^+$  и нижнее  $R_*^-$ . Течение в пограничном слое устойчиво, если его число Рейнольдса меньше  $R_*^-$  или больше  $R_*^+$ . Если  $R_*^+ > R > R_*^-$ , то течение неустойчиво.



Фиг. 5

Для более полного выяснения указанного обстоятельства были построены кривые нейтральной устойчивости для профиля скорости с параметром  $b = 0.2$ . Каждая кривая на фиг. 5 отвечает определенной величине параметра  $m$ . Если в каждой точке нейтральных кривых вычислить величину относительной скорости отсоса  $v$  и соединить точки с  $v = \text{const}$ , то получатся замкнутые области, показанные на фиг. 5 пунктиром; в этих областях значения  $v$  даны в миллионных долях, т. е. следует считать,  $v = 66 \cdot 10^{-6}$  и  $v = 74 \cdot 10^{-6}$ . Внутри этих областей течение неустойчиво, снаружи — устойчиво. При определенной скорости отсоса область неустойчивости вырождается в точку.

Поступило 28 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
2. Ulrich A. Theoretische Untersuchungen über die Widerstandersparnis durch Laminarhaltung mit Absaugung. Schriften d. dt. Akad. d. Luftfahrtforschung, 1944, B. 8, No 2.
3. Pletsch J. Umschlagsbeginn und Absaugung. Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, 1942, S. I.
4. Bussmann K., Münz H. Die Stabilität der laminaren Reibungsschicht mit Absaugung. Jb. Luftfahrtforschung, 1942, S. 1, 36.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А. Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948, ч. 1.
6. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.