УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ю. П. ЛАДИКОВ

(Орск)

Исследуется устойчивость стационарного течения несжимаемой вязкой, проводящей жидкости, стекающей по наклонной плоскости, в присутствии продольного и поперечного магнитных полей. Решения линеаризированных уравнений магнитной гидродинамики при соответствующих граничных условиях находятся в предположении, что число Рейнольдса R_g и волновое число α малы. Показано, что продольное магнитное поле играет стабилизирующую роль. Известно [1], что течение вязкой жидкости по вертикальной стенке всегда неустойчиво. В статье показывается, что эффект неустойчивости при малых волновых числах может быть устранен, если продольное магнитное поле удовлетворяет найденным условиям. Рассмотрен также случай, когда число Альфвена и волновое число малы, а число Рейнольдса конечное.

1. Постановка задачи. Вязкая проводящая жидкость стекает по наклонной плоскости с углом наклона β к горизонту (фигура). Толщина слоя текущей жидкости d. Отличная от нуля u компонента скорости (по оси x), как и все другие величины, есть функция только переменной x. Магнитное поле имеет две компоненты: H_x и H_y. Уравнения магнитной гидродинамики имеют следующий вид:

$$\frac{1}{4\pi} H_y \frac{\partial H_x}{\partial Y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \rho g \sin\beta = 0, \qquad -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \cos\beta = 0$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial Y}(H_y U) + \nu_m \frac{\partial^2 H_x}{\partial Y^2} = 0 \qquad \left(P = p + \frac{H_x^2 + H_y^2}{8\pi}\right) \tag{1.1}$$

Здесь μ — динамическая вязкость, ν_m — магнитная вязкость, P — полное давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести. Во внешней области магнитное поле должно удовлетворять условиям $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, которые приводят к $H_x = H_x^* = \mathrm{const}$, $H_y = H_y^* = \mathrm{const}$. Решения уравнений (1.1) должны удовлетворять граничным условиям.

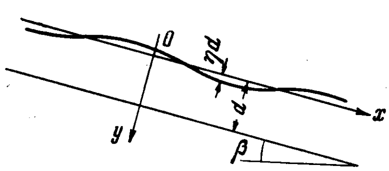
а) Условию непрерывности нормальной составляющей магнитного поля

$$H_y = H_y^* \quad \text{при } Y = 0,\ Y = d$$

б) Непрерывности касательных напряжений на свободной поверхности

$$\mu \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{1}{4\pi} H_x H_y = \frac{1}{4\pi} H_x^* H_y^*$$

$$\text{при } Y = 0$$



Фиг. 1

в) Непрерывности касательной составляющей электрического поля

$$E_z = \nu_m \frac{\partial H_x}{\partial Y} + U H_y = 0 \quad \text{при } Y = 0,\ Y = d$$

г) Условию прилипания

$$U = 0 \quad \text{при } Y = d$$

д) Будем считать, что на наклонной плоскости при $Y = d$ задана составляющая H_x магнитного поля $H_x = H_{x0}$, а на свободной поверхности эта составляющая непрерывна.

Тогда решениями поставленной задачи будут

$$H_y = H_y^*, \qquad P = -\rho g Y \cos\beta + P_0$$

$$H_x = H_x^* - \frac{4\pi\rho g}{H_y^* b}\sin\beta\,[\operatorname{sh} b(d-Y) - bd\operatorname{ch} b(d-Y) + bY] +$$

$$+ (H_{x0} - H_x^*)\operatorname{ch} b(d-Y)$$

$$U = \frac{g}{b^2\nu}\sin\beta\,[1 - \operatorname{ch} b(d-Y) + bd\operatorname{sh} b(d-Y)] +$$

$$+ \frac{H_y^*}{4\pi\mu b}(H_{x0} - H_x^*)\operatorname{sh} b(d-Y) \qquad \left(b^2 = \frac{H_y^{*2}}{4\pi\mu\nu_m}\right)$$

Переходя к безразмерным величинам

$$Y = yd, \quad X = xd, \quad H_x = HH_y^*, \quad U = U_aV \tag{1.2}$$

получим

$$V = \frac{LH_1}{m}\operatorname{sh}[m(1-y)] + \frac{R_g\sin\beta}{m^2F_r^2}[1 - \operatorname{ch} m(1-y) + m\operatorname{sh} m(1-y)]$$

$$H = H^* + H_1\operatorname{ch} m(1-y) - \frac{R_g\sin\beta}{LmF_r^2}[\operatorname{sh} m(1-y) - m\operatorname{ch} m(1-y) + my]$$

$$A = \left(\frac{H_y^{*2}}{4\pi\rho U_a^2}\right)^{1/2}, \quad L = A^2R_g, \quad R_m = \frac{U_ad}{\nu_m}, \quad F_r = \frac{U_a}{\sqrt{gd}}$$

$$m = bd = A\sqrt{R_gR_m}$$

Здесь A — число Альфвена, R_g — гидродинамическое число Рейнольдса, R_m — магнитное число Рейнольдса, F_r — число Фруда, m — число Гартмана, H^*, H_0 — значения безразмерного продольного поля при $y = 0.1$. В случае малых значений m для V и H будем иметь следующие приближенные выражения:

$$V = LH_1(1-y) + \frac{R_g\sin\beta}{2F_r^2}\left[(1-y^2) + \frac{m^2}{12}(3 - 8y + 6y^2 - y^4)\right] \tag{1.3}$$

$$H = H_0 + \frac{1}{2}m^2H_1(1-y)^2 + \frac{R_g\sin\beta}{6F_r^2}\left[y^3 - 3y + 2 - \frac{m^4}{5!}(1-y)^4(y+4)\right]$$

Выберем в качестве характерной скорости значение u_a, соответствующее значению средней скорости V при $m = 0$. Тогда

$$u_a = \frac{gd^2\sin\beta}{3\nu}, \qquad R_g\sin\beta = 3F_r^2 \tag{1.4}$$

и выражения (1.3) примут вид

$$V = LH_1(1-y) + {}^3/_2\,[(1-y^2) + {}^1/_{12}m^2(3 - 8y + 6y^2 - y^4)]$$

$$H = H_0 + \frac{1}{2}m^2H_1(1-y)^2 + \frac{R_m}{2}\left[y^3 - 3y + 2 - \frac{m^4}{5!}(1-y)^4(y+4)\right]$$

§ 2. Исследование устойчивости. Будем предполагать, что все безразмерные характеристики течения испытывают малые возмущения вида $q = Q + q_1(y)\exp i\alpha(x - \sigma\tau)$. Пусть $\psi(x, y, \tau) = \varphi(y)\exp i\alpha(x - \sigma\tau)$ и $\chi(x, y, \tau) = \Omega(y)\exp i\alpha(x - \sigma\tau)$ соответственно функция тока и магнитная силовая функция, так что

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad h_x = \frac{\partial\chi_1}{\partial y}, \quad h_y = -\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

Здесь u_x, u_y, h_x, h_y — возмущения скорости и поля. Тогда, подставляя возмущенные величины характеристики в уравнения магнитной гидродинамики и исключая из полученных уравнений возмущение давления, получим для определения $\varphi(y)$, $\Omega(y)$, $\Pi(y)$ следующие уравнения [2]:

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R_g\,[(V-\sigma)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - V''\varphi] -$$

$$- L[\Omega''' - i\alpha(\Omega H'' + \alpha^2 H\Omega - i\alpha\Omega' - H\Omega'')] \tag{2.1}$$

$$\Omega'' - \alpha^2\Omega = -R_m\varphi' + i\alpha R_m\,[(V-\sigma)\Omega - H\varphi] \tag{2.2}$$

$$\Pi = (\sigma - V)\varphi' + \varphi V' + A^2\left(H\Omega' - \frac{i}{\alpha}\Omega'' - \Omega H'\right) + \frac{1}{R_g}\left(i\alpha\varphi' - \frac{i}{\alpha}\varphi'''\right) \tag{2.3}$$

$$\left(\Pi = \frac{p_1}{\rho u_a^2 \exp i\alpha(x - \sigma\tau)}\right)$$

Здесь $\Pi(y)$ — безразмерное возмущение полного давления. Во внешнем пространстве над свободной поверхностью возмущения электромагнитного поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла, которые имеют следующие решения:

$$\Omega^* = \Omega^*(0)\,e^{\alpha y}, \qquad E_z^* = -\frac{i\sigma}{c}\,\Omega^*(y)\exp i\alpha\,(x - \alpha\tau)\,u_a H_y^* \tag{2.4}$$

Здесь E_z^* — величина электрического поля, $\Omega^*(0)$ — значение функции $\Omega^*(y)$ на поверхности $y = 0$ при $y \to -0$.

Решения уравнений (2.1, 2) должны удовлетворять граничным условиям § 1, которые необходимо преобразовать для безразмерных возмущений. Равенства нулю компонент скорости на наклонной плоскости дают

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \quad \text{при } y = 1 \tag{2.5}$$

Аналогично этому требование непрерывности нормальной составляющей h_n и задание продольной составляющей $H_x = H_{x_0}$ при $y = 1$ дают для компонент возмущений магнитного поля h_x, h_y условия $h_x = h_y = 0$ при $y = 1$, которые соответствуют

$$\Omega(1) = \Omega'(1) = 0 \quad \text{при } y = 1 \tag{2.6}$$

Исследуем, какой вид примут граничные условия на свободной поверхности. Обозначим смещение свободной поверхности через ηd, тогда из кинематического условия

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial\tau} + V(0)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

найдем

$$\eta = \frac{\varphi(0)}{\sigma'}\exp[i\alpha(x - \sigma\tau)], \qquad \sigma' = \sigma - V(0) \tag{2.7}$$

Исследуем теперь условие непрерывности касательной составляющей электрического поля E_z. Для области течения (c — скорость света)

$$E_z = \frac{1}{c}\left[\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}\right)\nu_m - (u_x H_y + U h_y - H_x u_y)\right]$$

Подставляя выражения (0.0) для возмущений и используя уравнение (2.2), найдем

$$E_z = \frac{u_a H_y^*}{c}\,i\alpha\sigma\Omega(y)\exp i\alpha(x - \sigma\tau)$$

Сравнивая это выражение с (2.4), получим

$$\Omega^*(0) = \alpha\Omega(0) \tag{2.8}$$

Ввиду того, что продольная и поперечная составляющие невозмущенного магнитного поля непрерывны при $y = 0$, условие непрерывности нормальной составляющей магнитного поля на возмущенной поверхности будет удовлетворяться, если составляющая h_y при $y = 0$ будет непрерывна. Как легко видеть, в силу (2.8) это условие выполняется. Далее необходимо удовлетворить условиям непрерывности касательных и нормальных напряжений по обе стороны от возмущенной свободной поверхности. Условие равенства касательных напряжений можно представить в виде

$$\left\{\frac{\partial}{\partial Y}\left[\tau_{xy}+\frac{H_y H_x}{4\pi}\right]\eta d+\frac{H_x h_y+H_y h_x}{4\pi}+\tau_{xy}'\right\}_{y=0}=\left(\frac{H^*{}_x h^*{}_y+H^*{}_y h^*{}_x}{4\pi}\right)_{y=0} \qquad (2.9)$$

Здесь τ_{xy}, τ_{xy}', h_x^*, h_y^* — соответственно касательные напряжения в основном и возмущенном течениях и возмущения магнитного поля во внешнем пространстве. Уравнение (2.9) может быть преобразовано к виду

$$-\frac{R_g}{F_r^2}\sin\beta\,\frac{\varphi(0)}{\sigma'}+L\Omega'(0)+\alpha^2\varphi(0)+\varphi''(0)-\alpha L\Omega(0)=0 \qquad (2.10)$$

Для нормальных напряжений будем иметь уравнение

$$-\frac{\partial P}{\partial y}\eta d+\tau_{yy}'-P_1=-\frac{1}{4\pi}(H_x^*h_x^*+H_y^*h_y^*)-T\frac{\partial^2(\eta d)}{\partial x^2}$$

$$\text{при}\ y=0\quad\left(\tau_{yy}'=2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \qquad (2.11)$$

Здесь P, P_1 — соответственно полное давление в основном и возмущенном течениях, τ_{yy}' — нормальное напряжение в возмущенном течении, T — коэффициент поверхностного натяжения.Преобразуя это уравнение с использованием $P_1=\rho u_0^2\Pi(y)\exp i\alpha(x-\sigma\tau)$ и (2.3), получим

$$\varphi'''(0)+L\Omega''(0)+i\alpha R_g\left[\left(\frac{\cos\beta}{F_r^2}+S\alpha^2\right)\frac{\varphi(0)}{\sigma'}+\sigma'\varphi'(0)\right]+$$
$$+i\alpha L[H(0)\Omega'(0)-\alpha\Omega(0)H(0)-H'(0)\Omega(0)+i\alpha\Omega(0)]-3\alpha^2\varphi'(0)=0 \qquad (2.12)$$

В работе [1] показано, что течение вязкой жидкости на наклонной плоскости неустойчиво относительно длинноволновых возмущений даже при очень малых числах Рейнольдса при условии, что наклон плоскости достаточно велик ($\beta\approx{}^1/_2\pi$). Поэтому для упрощения анализа сделаем следующее допущение о параметрах уравнений (2.1, 2). Будем считать волновое число α и обычное число Рейнольдса малыми величинами одного порядка $\alpha\approx R_g\ll 1$. Магнитное число Рейнольдса R_m и число Альфвена A полагаем порядка единицы: $R_m\approx 1$, $A\approx 1$. Тогда величины $m^2=A^2R_g R_m$ и $L=A^2R_g$ будут также малыми порядка α. Решать систему уравнений (2.1, 2) с граничными условиями (2.6, 7, 10, 12) будем методом последовательных приближений, полагая

$$\varphi(y)=\varphi_0(y)+\lambda\varphi_1(y)+\lambda^2\varphi_2(y)+\ldots,\qquad \sigma=\sigma_0+\lambda\sigma_1+\lambda^2\sigma_2+\ldots$$
$$\Omega(y)=\Omega_0(y)+\lambda\Omega_1(y)+\lambda^2\Omega_2(y)+\ldots,$$
$$\alpha=\lambda\alpha_0,\qquad R_g=\lambda R_{g0},\qquad L=\alpha L_0,\qquad m^2=\lambda m_0^2\qquad (\alpha_0\approx 1,\ R_{g0}\approx 1)$$

Здесь λ — малый параметр. Индекс 0 в дальнейшем для упрощения опускаем. Тогда для нулевого приближения будем иметь следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\varphi_0^{IV}=0,\quad \Omega_0''=-R_m\varphi^{0\prime},\ \varphi_0(1)=\varphi_0'(1)=0,\quad \Omega_0(1)=\Omega_0'(1)=0 \qquad (2.13)$$

$$-\frac{3\varphi_0(0)}{\sigma'}+\varphi_0''(0)=0,\quad \varphi_0'''(0)=0 \qquad (2.14)$$

Решение будем искать в виде $\varphi_0(y)=a_0y^3+b_0y^2+d_0y+f_0$. Тогда для определения коэффициентов a_0, b_0, d_0, f_0 получим уравнения

$$a_0+b_0+d_0+f_0=0,\quad 3a_0+2b_0+d_0=0$$
$$6a_0=0,\quad -3f_0/\sigma_0'+2b_0=0 \qquad (2.15)$$

Так как система (2.15) линейна и однородна, то собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Возьмем $f_0=1$.

Тогда $\varphi_0(y) = (1-y)^2$, $\sigma_0' = {}^3/_2$. Из второго уравнения (2.13) найдем

$$\Omega_0 = {}^1/_3 R_m (1-y)^3 \tag{2.16}$$

Для следующего приближения будем иметь

$$\varphi_1^{IV}(y) = -L\Omega_0'''(y)$$

$$\Omega_1''(y) = -R_m \varphi_1'(y) + i\alpha R_m [(V-\sigma)\Omega_0(y) - H\varphi_0(y)] \tag{2.17}$$

$$\varphi_1(1) = \varphi_1'(1) = 0, \qquad \Omega_1(1) = \Omega_1'(1) = 0 \tag{2.18}$$

$$-\frac{3\varphi_1(0)}{\sigma_0'} + \frac{3\varphi_0(0)}{\sigma_0'^2}\sigma_1' + \varphi_1''(0) + L\Omega_0'(0) = 0, \quad \varphi_1'''(0) + L\Omega_0''(0) = 0 \tag{2.19}$$

Подставляя $\Omega_0'''(y)$ в первое уравнение (2.17), получим $\varphi_1^{IV}(y) = 2m^2$; общее решение этого уравнения $\varphi_1(y) = a_1y^3 + b_1y^2 + d_1y + f_1 + {}^1/_2 m^2$.

Причем постоянную f_i $(i \geqslant 1)$ здесь и в дальнейшем можно принять равной нулю [1]. Используя граничные условия, получим

$$a_1 + b_1 + d_1 = -{}^1/_{12} m^2, \qquad 3a_1 + 2b_1 + d_1 = -{}^1/_3 m^2$$
$${}^4/_3\sigma_1' + 2b_1 - m^2 = 0, \qquad 6a_1 + 2m^2 = 0 \tag{2.20}$$

Отсюда находим

$$a_1 = -{}^1/_3 m^2, \qquad b_1 = {}^5/_{12} m^2, \qquad d_1 = -{}^1/_6 m^2, \qquad \sigma_1' = {}^1/_8 m^2 \tag{2.21}$$

Таким образом, как нулевое, так и первое приближения соответствуют нейтральным колебаниям. Используя второе уравнение (2.17), находим

$$\varphi_1(y) = {}^1/_{12} m^2 (y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 2y) \tag{2.22}$$

$$\Omega_1(y) = -R_m\{{}^1/_{12} m^2 ({}^1/_5 y^5 - y^4 + {}^5/_3 y^3 - y^2 - {}^2/_{15}) + i\alpha\,[{}^1/_{12}(1-y)^4 \times$$
$$\times H_0 + {}^1/_2 R_m ({}^3/_2 y^2 - {}^5/_3 y^3 + y^4 - {}^3/_{10} y^5 + {}^1/_{30} y^6 - {}^7/_{20} y - {}^2/_5)]\} \tag{2.23}$$

Рассмотрим второе приближение (2.24)

$$\varphi_2^{IV} = 2\alpha^2\varphi_0'' + i\alpha R_g [(V-\sigma)^{(0)}\varphi_0'' - V^{(0)''}\varphi_0] - B\Omega_1''' + i\alpha L(\Omega_0 H^{(0)''} -$$
$$- \Omega_0'' H^{(0)}) = 0 \tag{2.25}$$

$$\Omega''_2 = \alpha^2\Omega_0 - R_m\varphi_2^1 + i\alpha R_m [(V_1 - \sigma)_0 \Omega^+_1 + (V-\sigma)^1 \Omega_0 - H^0\varphi_1 - H^1\varphi_0]$$

Здесь символы $(V-\sigma)^{(0)}$, $(V-\sigma)^1$, $H^{(0)}$, $H^{(1)}$ и пр. обозначают, что в разложении этих величин нужно взять соответственно нулевое или первое приближения. Граничные условия для второго приближения будут иметь вид

$$\varphi_2(1) = \varphi_2'(1) = 0, \qquad \Omega_2(1) = \Omega_2'(1) = 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{3\varphi_0(0)}{\sigma_0'^2}\sigma_2' - \frac{3\varphi_0(0)}{\sigma_0'^3}\sigma_1'^2 + \frac{3\varphi_1(0)}{\sigma_0'^2}\sigma_1 - \frac{3\varphi_2(0)}{\sigma_0'} + \alpha^2\varphi_0(0) +$$
$$+ \varphi_2''(0) + L\Omega_1'(0) - \alpha L\Omega_0(0) = 0$$

$$\varphi_2'''(0) + L\Omega_1''(0) + i\alpha R_g\left[\frac{\cos\beta}{F_r^2}\frac{\varphi_0(0)}{\sigma_0'} + \sigma_0'\varphi_0'(0)\right] +$$
$$+ i\alpha L\,[H^{(0)}(0)\,\Omega_0'(0) - \Omega_0(0)\,H^{(0)'}(0)] - 3\alpha^2\varphi_0'(0) = 0$$

Подставляя $V^{(0)}$, $V^{(0)'}$, σ_0', σ_1', $H^{(0)}$, $H^{(0)''}$ и т. д. в (2.24), получим

$$\varphi_2^{IV} = 4\alpha^2 - 6i\alpha R_g y + {}^1/_{12} m^4 (12y^2 - 24y + 10) - 4i\alpha m^2 H_0 +$$
$$+ i\alpha R_m m^2 (-7 + 18y - 15y^2 + 4y^3) \tag{2.27}$$

Решение ищем, как и прежде, в виде

$$\varphi_2(y) = a_2y^3 + b_2y^2 + d_2y + \Phi_2(y)$$

Полагая $\Phi_2(y) = A_2y^7 + B_2y^6 + D_2y^5 + E_2y^4$ из (2.27), найдем

$$A_2 = {}^1/_{210}i\alpha m^2R_m, \quad B_2 = {}^1/_{360}m^4 - {}^1/_{24}i\alpha m^2R_m$$

$$D_2 = -{}^1/_{20}i\alpha R_g - {}^1/_{60}m^4 + {}^1/_{30}i\alpha m^2H_0 + {}^3/_{20}i\alpha m^2R_m$$

$$E_2 = {}^1/_6\alpha^2 + {}^5/_{144}m^4 - {}^1/_6i\alpha m^2H_0 - {}^7/_{24}i\alpha m^2R_m$$

Используя граничные условия (2.26), получим систему уравнений

$$a_2 + b_2 + d_2 + \Phi_2(1) = 0, \qquad 3a_2 + 2b_2 + d_2 + \Phi_2'(1) = 0 \tag{2.28}$$

$${}^4/_3\sigma_2' + \alpha m^2({}^1/_3H_0 + {}^7/_{20}R_m) + 2b_2 + \alpha^2 - {}^1/_{72}m^4 - {}^1/_3\alpha m^2 = 0$$

$$6a_2 = {}^1/_6m^4 - 6\alpha^2 + 2i\alpha m^2H_0 + 2i\alpha m^2R_m - i\alpha R_g({}^2/_3F_r^{-2}\cos\beta - 3)$$

Из нее найдем величину собственного значения

$${}^4/_3\sigma_2' = i\alpha m^2({}^{31}/_{420}R_m + {}^4/_{15}H_0 + {}^8/_5R_g - {}^4/_3\operatorname{ctg}\beta) + {}^{77}/_{360}m^4 - 3\alpha^2 \tag{2.29}$$

Таким образом, возмущения будут затухать, если

$${}^{31}/_{420}R_m + {}^4/_{15}H_0 + {}^8/_5R_g - {}^4/_3\operatorname{ctg}\beta < 0 \tag{2.30}$$

При $R_m = H_0 = 0$ получаем условие устойчивости $R_g < {}^5/_6\operatorname{ctg}\beta$, найденное в [1]. Из этого условия следует, что при $\beta = {}^1/_2\pi$ течение всегда неустойчиво.

Из неравенства (2.30) видно, что при $H_0 > 0$ магнитное поле не только не стабилизирует течение, а наоборот, даже усиливает неустойчивость. Однако при $H_0 < 0$, т. е. в случае, когда продольное магнитное поле направлено против течения, течение может быть устойчивым при достаточно больших H_0, даже и при $\beta = {}^1/_2\pi$. Влияние продольного магнитного поля на устойчивость можно объяснить действием касательных напряжений ${}^1/_4H_xH_y/\pi$, которые, аналогично вязкости, тормозят течение в случае $H_xH_y < 0$ ($H_0 < 0$) и ускоряют его при $H_xH_y > 0$.

Рассмотрим случай, когда числа Рейнольдса конечны $R_g \approx 1$, а волновое число α и параметр A малы: $\alpha = \lambda\alpha_0$, $A^2 = \lambda A_0^2$. Тогда $m^2 = A^2R_gR_m \ll 1$, $L = A^2R_g \ll 1$.

Поступая аналогично вышерассмотренному способу, разложим собственные числа и функции в ряд по малому параметру. Подставляя затем эти ряды в уравнения (2.1, 2) и граничные условия (2.6, 7, 10, 12), получим уравнения и граничные условия соответственно для нулевого, первого, второго и т. д. приближений. При этом собственное число σ' с точностью до второго приближения выразится равенством

$$\sigma' = {}^3/_2 + \lambda[{}^1/_8m^2 + i\alpha({}^6/_5R_g - \operatorname{ctg}\beta)] + {}^3/_4\lambda^2[-0.03m^4 +$$
$$+ 0.333\alpha m^2 + \alpha^2(-0.346R_g^2 + 2.172R_g\operatorname{ctg}\beta - 0.111\operatorname{ctg}^2\beta - 3.5) +$$
$$+ i\alpha m^2(0.521R_g - 0.133\operatorname{ctg}\beta + 0.057R_m + 0.268H_0)]$$

Таким образом, в случае малых чисел Альфвена устойчивость течения определяется так же, как в безмагнитном случае, т. е. $R_g < {}^5/_6\operatorname{ctg}\beta$.

Влияние магнитного поля сказывается только в следующем приближении, причем это влияние проявляется аналогично рассмотренному выше случаю, т. е. стабилизирующую роль оказывает продольное магнитное поле при $H_0 < 0$. Когда $H_0 = 0$, как в первом, так и во втором случаях влияние магнитного поля на устойчивость течения мало существенно, так как коэффициент при R_m очень мал. Все же с возрастанием R_m проявляется эффект магнитной неустойчивости течения, который, видимо, также можно объяснить тем обстоятельством, что поперечное и индуцированное продольное магнитные поля создают касательное напряжение в верхних слоях течения ${}^1/_4H_yH_x/\pi$, направленное вниз по наклонной плоскости.

Поступило 20 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Yih Chia Shun. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3, p. 321—334.
2. Павлов К. Б. Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля. Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Изд. АН Латв. ССР, Рига, 1962, стр. 99—106.