

### К ТЕОРИИ ВИБРОНАСОСА

О. Э. ЦЫПКИНА

(Москва)

В работе [1] рассмотрена задача о вибрационном подъеме жидкости в предположении несжимаемости колонны насосных труб.

В данной статье учитывается упругость материала труб. Такой учет приводит к рассмотрению режимов вынужденных колебаний в двух упругих средах, связанных нелинейными условиями на одной из границ. При этом обнаруживается неоднозначность зависимостей искомых величин от определяющих, что приводит к эффекту гистерезиса.

1. При работе вибронасоса верхний конец колонны труб, связанный с вибратором, имеет заданное движение (фиг. 1).

На нижнем конце находится идеализированный безынерционный и лишенный сопротивления приемный клапан. Погружение его под уровень жидкости считается равным нулю. Нулю равно также трение и противодействие на выходе.

Для перемещений жидкого элемента  $w$  и элемента колонны труб  $u$  имеем уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - g, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

Здесь  $a$  — скорость звука в жидкости,  $b$  — в трубах,  $g$  — весовое ускорение (стационарное растяжение труб под действием собственного веса для простоты не учитывается).

На верхнем конце насоса ( $x = 0$ ) задаются условия

$$a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad u = u_0 \sin \omega t \quad (2)$$

Предполагается, что искомое движение имеет ту же частоту, что и внешнее возмущение. Принимается также, что в течение цикла происходят одно открытие и одно закрытие клапана.

В то время, когда клапан открыт, давление жидкости в сечении входа в насос ( $x = -l$ ) равно нулю. Напряжение на нижнем конце колонны труб также равно нулю.

При закрытом клапане скорости жидкости и труб для  $x = -l$  совпадают, а растягивающая сила, приложенная к колонне, равна силе давления жидкости на клапан.

Таким образом, при  $x = -l$  справедливы условия

$$a^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad b^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (t_1 < t < t_2) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \rho' f' b^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho f a^2 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (t_2 < t < t_1 + 2\pi/\omega)$$

Здесь  $\rho$  и  $\rho'$  — плотности жидкости и материала труб соответственно,  $f$  — проходное сечение насоса,  $f'$  — поперечное сечение колонны труб,  $t_1$  — момент открытия и  $t_2$  — момент закрытия клапана. По аналогии с тем, как это сделано в [1], сформулируем условия переключения. Эти условия выполняются в сечении клапана  $x = -l$  и имеют следующий вид:

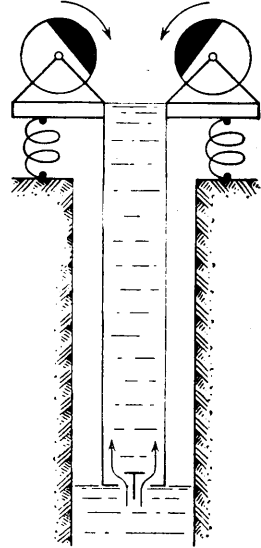
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (t = t_1 + 0); \quad p = 0 \quad (t = t_1 - 0) \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (t = t_2 - 0), \quad P = 0 \quad (t = t_2 + 0) \quad \left( p = -\rho a^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad P = \int_{t_1}^t p dt \right)$$

Перейдем к безразмерным величинам

$$w^\circ = \frac{w}{u_0}, \quad u^\circ = \frac{u}{u_0}, \quad x^\circ = \frac{x}{l}, \quad \tau = \omega t, \quad \eta = \frac{g}{u_0 \omega^2}$$

$$\mu = \frac{\omega l}{a}, \quad \nu = \frac{\omega l}{b}, \quad \delta = \frac{\rho f}{\rho' f'}$$



Фиг. 1

Уравнения (1), граничные условия (2), (3) и условия переключения (4) можно записать теперь следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w^\circ}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial x^{\circ 2}} - \eta, \quad \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial \tau^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u^\circ}{\partial x^{\circ 2}} \quad (5)$$

при  $x^\circ = 0$

$$\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial w^\circ}{\partial x^\circ} = 0, \quad u^\circ = \sin(\tau + \tau_1) \quad (6)$$

при  $x^\circ = -1$

$$P^\circ = 0 \quad (0 \leq \tau \leq \theta), \quad \frac{\partial(w^\circ - u^\circ)}{\partial \tau} = 0 \quad (\theta \leq \tau \leq 2\pi) \quad (7)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial u^\circ}{\partial x^\circ} = \begin{cases} 0 & (0 \leq \tau \leq \theta) \\ -(\delta/\mu^2) \partial w^\circ / \partial x^\circ & (\theta \leq \tau \leq 2\pi) \end{cases} \quad (8)$$

$$P^\circ = \frac{\partial^2(w^\circ - u^\circ)}{\partial \tau^2}, \quad P^\circ = \frac{\partial(w^\circ - u^\circ)}{\partial \tau} \quad (\tau = 0); \quad P^\circ = \frac{\partial(w^\circ - u^\circ)}{\partial \tau} \quad (\tau = \theta) \quad (8)$$

(момент открытия клапана принят за начальный).

Решение системы (5), удовлетворяющее условиям (6), представляется в виде

$$w = C\tau + \frac{x^2 \eta \omega^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu n x (A_n \cos n\tau + B_n \sin n\tau) \quad (9)$$

$$u = Gv^2 x + \cos vx \sin(\tau + \tau_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin vn x [D_n \cos n(\tau + \tau_1) + E_n \sin n(\tau + \tau_1)]$$

(индексы при безразмерных переменных здесь и дальше опущены).

Присутствие бегущей волны в выражении для  $u$  связано с тем, что по колонне труб передается энергия от вибратора к приемному клапану.

Подставляя выражения (9) в (7) и (8) и применяя операции умножения на  $\cos k\tau$ ,  $\sin k\tau$ , интегрирования и сложения, получим бесконечную систему уравнений, линейную относительно искомым коэффициентов Фурье.

Последовательные приближения будут сходиться, если в исходные уравнения ввести трение. Систему первого приближения можно представить в форме

$$2\pi C' = \Omega \left[ B_1'(\theta - \sin \theta) + A_1'(1 - \cos \theta) \right] + \int_0^{2\pi} F \, d\tau \quad (10)$$

$$B_1' \left[ \pi \cos \mu + (\theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta) \frac{\Omega}{2} \right] - \frac{A_1' \sin^2 \theta}{2} = \int_0^{2\pi} F \cos \tau \, d\tau$$

$$B_1'(1 - \cos \theta)^2 \frac{\Omega}{2} + A_1' \left[ \pi \cos \mu + (\theta - \sin \theta \cos \theta) \frac{\Omega}{2} \right] = - \int_0^{2\pi} F \sin \tau \, d\tau$$

$$\sin \tau_1' - \eta' + A_1' \Omega = 0$$

$$\cos \tau_1'(1 - \cos \theta) + \sin \tau_1' \sin \theta - \eta' \theta + \Omega [B_1'(1 - \cos \theta) + A_1' \sin \theta] = 0$$

$$G = \delta \left\{ \eta \left( 1 - \frac{\theta}{2\pi} \right) + \frac{\sin \mu}{\mu} [A_1' \sin \theta + B_1'(1 - \cos \theta)] \right\}$$

$$\frac{H_1}{H} \cos(\varphi + \psi) = \delta \Phi_1, \quad \frac{H_1}{H} \sin(\varphi + \psi) = \delta \Phi_2$$

Здесь

$$\Omega = \frac{\sin \mu}{\mu} - \cos \mu, \quad C' = \frac{C}{H}, \quad A_1' = \frac{A_1}{H}, \quad B_1' = \frac{B_1}{H}, \quad \eta' = \frac{\eta}{H}$$

$$H = \sqrt{(\cos v - E_1 \sin v)^2 + D_1^2 \sin^2 v}, \quad H_1 = (1/v) \sqrt{(E_1 \cos v + \sin v)^2 + D_1^2 \cos^2 v}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos v - E_1 \sin v}{H}, \quad \sin \varphi = \frac{D_1 \sin v}{H}, \quad \cos \psi = \frac{D_1 \cos v}{H_1 v}$$

$$\sin \psi = - \frac{E_1 \cos v + \sin v}{H_1 v}, \quad \tau_1' = \tau_1 + \varphi, \quad F = \begin{cases} \cos \tau_1' - \eta\tau & (0 \leq \tau \leq \theta) \\ \cos(\tau + \tau_1') & (\theta < \tau \leq 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \eta' [\sin \tau_1' (1 - \cos \theta) - \cos \tau_1' \sin \theta] - \frac{\sin \mu}{2\mu} [A_1' [\sin \tau_1' \sin^2 \theta + \right.$$

$$+ \cos \tau_1' (2\pi - \theta - \sin \theta \cos \theta)] - B_1' [\sin \tau_1' (2\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta) + \cos \tau_1' \sin^2 \theta] \left. \right\}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{\pi} \left\{ \eta' [\cos \tau_1' (1 - \cos \theta) + \sin \tau_1' \sin \theta] + \frac{\sin \mu}{2\mu} [A_1' [-\cos \tau_1' \sin^2 \theta + \right.$$

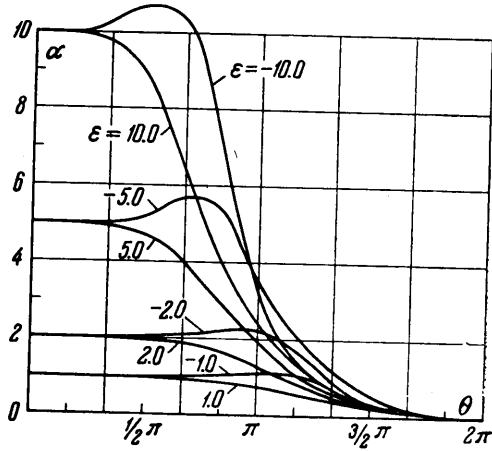
$$+ \sin \tau_1' (2\pi - \theta - \sin \theta \cos \theta)] + B_1' [\cos \tau_1' (2\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta) - \sin \tau_1' \sin^2 \theta] \left. \right\} \quad (11)$$

Первые пять уравнений системы (10) совпадают по форме с уравнениями для абсолютно жестких труб, приведенными в [1], но в отличие от последних неизвестными здесь будут не коэффициенты Фурье  $C, A, B$ , а отношения этих коэффициентов к величине  $H$ , также неизвестной. Вместо параметра  $\eta$  входит отношение  $\eta / H$ , вместо  $\tau_1 - \tau_1 + \varphi$ , где  $\varphi$  — неизвестный сдвиг фазы между скоростями колонны труб в верхнем и нижнем сечениях.

Из первых пяти уравнений (10) величины  $\eta', C', \tau_1'$  выражаются в виде функций параметра  $\varepsilon = \mu^{-1} \operatorname{tg} \mu$  и  $\theta$  по формулам (6.3), (6.4) работы [1],

$$A_1' = \frac{\eta' - \sin \tau_1'}{\Omega}$$

$$B_1' = \frac{1}{\Omega} \left( \eta_1 \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta} - \cos \tau_1' \right)$$



Фиг. 2

Из двух последних уравнений (10) и равенств (11) можно получить соотношения для коэффициентов Фурье  $D_1$  и  $E_1$

$$\frac{(D_1^2 + E_1^2) \cos^2 v + 2E_1 \cos v \sin v + \sin^2 v}{(D_1^2 + E_1^2) \sin^2 v - 2E_1 \cos v \sin v + \cos^2 v} = \alpha^2 \delta^2 v^2$$

$$\frac{(D_1^2 + E_1^2) \sin v - E_1 (\cos^2 v - \sin^2 v) - \sin v \cos v}{D_1} = \beta \quad (12)$$

Здесь

$$\alpha^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 = \pi^{-2} \{ 2\eta^2 (1 - \cos \theta) +$$

$$+ \frac{1}{\mu^2} \sin^2 \mu [A_1^2 (\sin^4 \theta + (2\pi - \theta - \sin \theta \cos \theta)^2) +$$

$$+ B_1^2 [(2\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta)^2 + \sin^4 \theta] - 4A_1 B_1 (2\pi - \theta) \sin^2 \theta \} +$$

$$+ \mu^{-1} \sin \mu \eta (2\pi - \theta - \sin \theta) [A_1 \sin \theta + B_1 (1 - \cos \theta)], \quad \beta = \Phi_2 / \Phi_1$$

На фиг. 2 и 3 представлены зависимости  $\alpha$  и  $\beta$  от  $\theta$  при различных значениях  $\varepsilon$ . Обозначив  $\alpha \delta v$  через  $\alpha'$ , найдем из (12)

$$D_1 = \frac{(I \mp K)(1 + \operatorname{tg}^2 v)}{R}, \quad E_1 = \frac{M \pm N}{R} \quad (13)$$

Здесь

$$I = 2\alpha'^2 \beta \operatorname{tg} v, \quad K = (1 + \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v) \alpha' \sqrt{1 + \beta^2}$$

$$M = \operatorname{tg} v [(\alpha'^2 - 1)(1 + \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v) - \beta^2 (1 + \alpha'^2)(1 - \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v)]$$

$$N = (1 - \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v)(1 + \operatorname{tg}^2 v) \alpha' \beta \sqrt{1 + \beta^2}$$

$$R = (1 + \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v)^2 + (1 - \alpha'^2 \operatorname{tg}^2 v)^2 \beta^2$$

Нетрудно показать, что физический смысл в (13) имеют верхние знаки. При  $\theta=0$  задача переходит в линейную (колебания тяжелой упругой жидкости в упругой трубе, закрытой с одного конца). В этом случае  $\alpha = |\varepsilon|$ ,  $\beta = -\infty$  ( $\varepsilon < 0$ ),  $\beta = \infty$  ( $\varepsilon > 0$ ) и из (13) получается

$$D_1 = 0, \quad E_1 = \frac{\pm \delta v |\varepsilon| - \operatorname{tg} v}{1 \pm \delta v |\varepsilon| \operatorname{tg} v} \quad (14)$$

С другой стороны, решение линейной задачи можно получить и непосредственно. Оно дает для  $E_1$  выражение (14) с верхними знаками.

С использованием равенств (11), (13) множитель  $H$  и сдвиг фазы  $\varphi$  представляются в виде

$$H = \frac{(L^2 + Q^2)^{1/2}}{R |\cos v|}$$

$$\cos \varphi = \frac{L}{(L^2 + Q^2)^{1/2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{Q}{(L^2 + Q^2)^{1/2}}$$

$$L = 1 + \alpha_1^2 + (1 - \alpha_1^2) \beta (\beta - \alpha_1 \sqrt{1 + \beta^2}) \quad (15)$$

$$Q = \alpha_1 [2\alpha_1 \beta - (1 + \alpha_1^2) \sqrt{1 + \beta^2}]$$

$$\alpha_1 = \alpha' \operatorname{tg} v$$

Имея зависимости  $C'$ ,  $A_1'$ ,  $B_1'$ ,  $\eta'$ ,  $\tau_1'$  от  $\varepsilon$  и  $\theta$  и соотношения (15), можно определить средний безразмерный расход жидкости  $C = C'H$ , коэффициенты Фурье  $A_1$ ,

$B_1$ , параметр  $\eta = \eta'H$ , фазу внешнего возмущения  $\tau_1 = \tau_1' - \varphi$  в виде функций определяющих параметров  $\delta$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  и неизвестного интервала нелинейности  $\theta$ . Равенства (13) дают зависимость коэффициентов  $D_1$  и  $E_1$  от тех же величин.

Подача жидкости может быть вычислена по формулам

$$M' = \rho u_0 \omega C \quad \text{или} \quad M' = \frac{\rho q}{\omega} R(\theta)$$

где

$$R(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{1 - \cos \theta} + 1 - \cos \theta \right]$$

— функция, монотонно меняющаяся от 0 до  $\infty$  с ростом  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ .

Для координаты  $x_m$  сечения максимального напряжения и амплитуды напряжения в этом сечении  $\sigma_m$  получаются соотношения

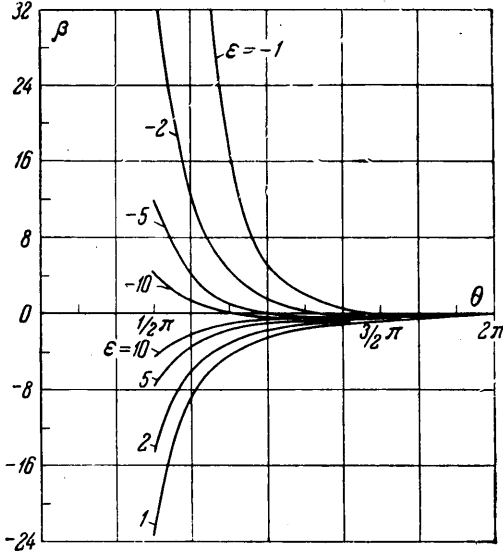
$$\cos 2vx_m = \frac{D_1^2 + E_1^2 - 1}{\sqrt{r}}, \quad \sin 2vx_m = \frac{-2E_1}{\sqrt{r}}$$

$$\sigma_m = \rho' u_0 \omega^2 l \frac{1}{v^2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_m} = \rho' u_0 \omega^2 l \left\{ \left( \frac{D_1^2 + E_1^2 + 1 + \sqrt{(D_1^2 + E_1^2 - 1)^2 + 4E_1^2}}{2} \right)^{1/2} + G \right\}$$

2. Основной среди полученных зависимостей является связь между  $\eta = \eta'H$  и  $\theta$ ,  $\varepsilon$ ,  $v$ ,  $\delta$ ; она определяет интервал нелинейности — время открытого клапана как функцию заданных параметров. Величина  $\theta$  однозначно связана с расходом жидкости и, кроме того, существенным образом входит в выражение всех коэффициентов Фурье.

На фиг. 4 показаны зависимости  $\eta$  от  $\theta$ , вычисленные<sup>1</sup> по формуле (15) для  $\varepsilon = -1$ ,  $\delta = 0.3$  и значений  $v$  от 0 до  $1/2\pi$ .

<sup>1</sup> Расчеты выполнила Г. В. Шап



Фиг. 3

Случай  $\nu = 0$  отвечает абсолютно жестким трубам. С ростом  $\nu$  кривые вначале остаются монотонными, затем появляется внутренний минимум и максимум  $\eta$  по  $\theta$ .

Точка максимума стремится к  $2\pi$  при  $\nu$ , стремящемся к  $1/2\pi$ .

Таким образом, зависимость  $\theta$  от  $\eta$  или зависимость расхода от параметра тяжести становится неоднозначной. При этом реальный процесс должен осуществляться с гистерезисом.

Пусть частота фиксирована и амплитуда внешних колебаний растет, начиная от нуля ( $\eta = g / u_0 \omega^2$  уменьшается от  $\infty$ ). Расход жидкости равен нулю вплоть до значения  $\eta$ , соответствующего  $\theta = 0$ . При последующем росте амплитуды  $\theta$  (и расход) монотонно увеличивается до величины, отвечающей точке минимума  $\eta$  по  $\theta$ .

Если уменьшать  $\eta$  дальше, то  $\theta$  скачком переходит на вторую убывающую ветвь кривой  $\eta(\theta)$  (для  $\nu = 1/2\pi$  эта ветвь представляет собой отрезок вертикали  $\theta = 2\pi$ ).

При выходе на рабочий режим от больших амплитуд ( $\eta$ , близких к нулю),  $\theta$  монотонно убывает до значения в точке максимума  $\eta$ . Далее — скачок на левую ветвь. В частности, если правый максимум выше значения  $\eta$  при  $\theta = 0$ , то перескок происходит сразу в область нулевой подачи жидкости.

Частота  $\nu = 1/2\pi$ , вблизи которой возникает эффект неоднозначности, является резонансной для линейной задачи о колебаниях колонны со свободным концом.

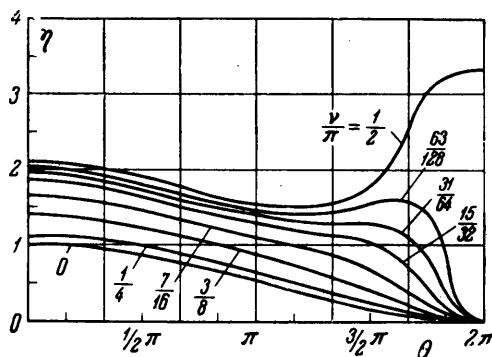
На фиг. 5 показано, как зависит  $\eta$  от  $\theta$  при изменении  $\nu$  от  $1/2\pi$  до  $\pi$  ( $\epsilon$  и  $\delta$  те же). Кривая  $\nu = \pi$  совпадает с кривой  $\nu = 0$ . Около  $\nu = \pi$  зависимость  $\eta$  от  $\theta$  монотонна. Характерной является величина  $\nu_p$ , определяемая равенством

$$\nu_p \operatorname{tg} \nu_p = \frac{1}{\epsilon \delta}$$

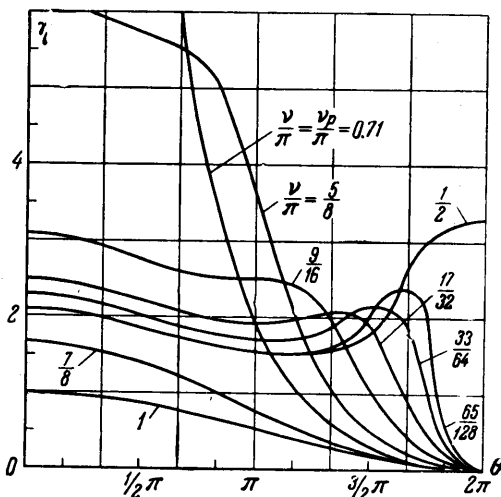
— резонансная частота линейной задачи о колебаниях закрытой с одного конца трубы, заполненной жидкостью.

Очевидно, если взять большее отношение масс жидкости и труб  $\delta$  или относительную частоту  $\nu$  в пределах от  $k\pi$  до  $(k+1)\pi$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , то качественный вид зависимостей  $\eta$  от  $\theta$  сохранится. С увеличением  $\nu\delta$  область максимумов вблизи  $\nu = 1/2(2k+1)\pi$  расширяется, а величина максимума  $\eta$  убывает.

Частотный параметр жидкой колонны  $\epsilon$  существенно влияет на вид кривой  $\eta(\theta)$  при значениях  $\nu$ , близких к  $0, \pi, 2\pi$  и т. д. ( $\eta(0) = |\epsilon|$  для  $\nu/\pi = 0, 1, 2, \dots$ ). В то же время при  $\nu = 1/2\pi$  кривая  $\eta(\theta)$  одинакова для всех значений  $|\epsilon|$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Поступило 10 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкина О. Э. О вибрационном подъеме жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.