РАСЧЕТ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ПОТОКОМ ВОЗДУХА С УЧЕТОМ РАВНОВЕСНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

С. М. ГИЛИНСКИЙ, Н. Е. МАКАРОВА

(Москва)

Рассматривается обтекание с отошедшей ударной волной затупленных осесимметричных тел с гладким контуром потоком воздуха в предположении равновесности физико-химических превращений. Для расчета течения в дозвуковой и трансзвуковой области применяется метод Г. Ф. Теленина [1].

§ 1. Пусть на тело набегает поток невязкого нетеплопроводного газа с параметрами M_∞, p_∞, T_∞. Адиабатическое течение в рассматриваемом случае описывается двумя уравнениями Эйлера, уравнением неразрывности и сохранения энтропии.

При расчетах использовалась аналитическая аппроксимация плотности и энтальпии как функции давления и температуры из [2], максимальная погрешность которой по ρ составляет $\sim 1.5\%$, по $h \sim 3\%$.

Целесообразно ввести дифференциальное соотношение, связывающее температуру и давление вдоль линии тока

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\rho^{-1} - \partial h/\partial p}{\partial h/\partial T} \tag{1.1}$$

и исключить при помощи (1.1) энтропию.

Если в качестве основной системы искомых функций взять компоненты вектора скорости, давление и температуру и решать краевую задачу, интегрируя систему уравнений газовой динамики от ударной волны к телу, как делается в работе [3], то соответствующая аппроксимирующая система имеет на поверхности тела особенность вида 0 : 0. Эта особенность в процессе численного решения вызывает определенные вычислительные трудности, поскольку при получении решения вблизи тела и на его поверхности необходима экстраполяция. Последнее приводит к необходимости запоминания определенного количества материала на нескольких предыдущих слоях разностной сетки, а также требует нестандартного счета в окрестности тела, что заметно усложняет программу расчета. Кроме того, при существенно затупленной головной части изменение параметров от ударной волны к телу в трансзвуковой области становится более резким, и использование экстраполяции может привести к заметным погрешностям.

Преобразуем систему уравнений газовой динамики в общепринятой форме к новым переменным, радиальной и трансверсальной составляющим вектора скорости u, v, давлению p и функции тока ψ. При помощи этого преобразования исключается вышеуказанная особенность, и полученная система уравнений является обобщением (4.4—4.7) в [1] на случай реального газа.

Опуская для краткости промежуточные выкладки и не приводя описания численного метода решения (см. [1]), выпишем окончательную аппроксимирующую систему уравнений:

$$\frac{du_i}{d\xi} = \Big[\frac{\varepsilon(r_T + \xi\varepsilon)}{\Delta}\{b(v + c(r_T + \xi\varepsilon)^2) + (uv - b)u' + (v^2 - a^2)v' - a^2(2u + v\operatorname{ctg}\theta)\}\Big]_i \tag{1.2}$$

$$\frac{dv_i}{d\xi} = \left[\varepsilon\left\{\frac{1}{r_T+\xi\varepsilon}\left(u' - \frac{r_T' + \xi\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}\right) - \frac{v}{r_T+\xi\varepsilon} - c\,(r_T + \xi\varepsilon)\right\}\right]_i$$

$$\frac{dp_i}{d\xi} = \left[\varepsilon\rho\left\{\frac{v^2}{r_T+\xi\varepsilon} - \frac{v}{r_T+\xi\varepsilon}\left(u' - \frac{r_T'+\xi\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}\right) - \frac{u}{\varepsilon}\frac{du}{d\xi}\right\}\right]_i$$

$$\frac{d\psi_i}{d\xi} = [\varepsilon\rho v \sin\theta\,(r_T + \xi\varepsilon)]_i \quad (i = 0, 1, 2, \ldots m)$$

$$\frac{dv_0{}^0}{d\xi} = \varepsilon_0\left[\frac{2u_1{}^0 - v_0{}^0}{r_{T_0} + \xi\varepsilon_0} - \frac{r_{T_0}'' + \xi\varepsilon_0''}{\varepsilon_0\,(r_{T_0} + \xi\varepsilon_0)}\frac{du_0}{d\xi} - (r_{T_0} + \xi\varepsilon_0)\,T_0\left(\frac{dS}{d\psi}\right)_0\rho_0\right]$$

Здесь

$$\xi = \frac{r - r_T}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = r_c - r_T, \quad \varepsilon' = -(r_T + \varepsilon)\operatorname{ctg}(\sigma + \theta) - r_T'$$

$$c = T\frac{dS}{d\psi}\rho\sin\theta, \quad a^2 = \left(\rho_p + \rho_T\frac{dT}{dp}\right)^{-1} \quad b = \frac{r_T' + \xi\varepsilon'}{r_T + \xi\varepsilon}(v^2 - a^2) - uv \tag{1.3}$$

$$\Delta = (r_T + \xi\varepsilon)^2(a^2 - u^2) + 2uv\,(r_T' + \xi\varepsilon')(r_T + \xi\varepsilon) + (r_T' + \xi\varepsilon')^2(a^2 - v^2)$$

Индекс i указывает, что параметры берутся на луче $\theta = \theta_i$, r, θ — полярная система координат в меридиональной плоскости с полюсом в точке оси симметрии на некотором расстоянии l от центра тела, $r_c = r_c(\theta)$ и $r_T = r_T(\theta)$ — уравнение ударной волны и контура тела. Штрих означает дифференцирование по θ, a — скорость звука.

Производные по θ от газодинамических функций определяются непосредственным дифференцированием интерполяционных полиномов

$$u = \sum_{j=0}^{m} u_j{}^\circ\theta^{2j}, \qquad v = \sum_{j=0}^{m} v_j{}^\circ\theta^{2j+1} \qquad r_c = \sum_{j=0}^{m} r_j{}^\circ\theta^{2j} \tag{1.4}$$

Температура при фиксированных значениях u, v, p определяется из уравнения Бернулли

$$^1/_2\,(u^2 + v^2) + h\,(p, T) = h_0 \tag{1.5}$$

где h_0 — энтальпия торможения, а величина $dS\,/\,d\psi$ при заданном ψ рассчитывается по соотношениям на ударной волне

$$\psi = {}^1/_2\rho_\infty V_\infty r_c{}^2\sin^2\theta, \qquad \frac{dS}{d\psi} = \frac{V_\infty{}^2\sin\sigma\cos\sigma\,(1 - \rho_\infty/\rho_c)^2\,d\sigma/d\theta}{T_c\,(d\psi/d\theta)_c} \tag{1.6}$$

Индекс ∞ относится к параметрам набегающего потока, c — непосредственно за ударной волной, σ — угол наклона ударной волны к оси симметрии.

Очевидно, для совершенного газа система (1.2) — (1.3) переходит в (4.4) — (4.7) из [1].

Следует отметить, что аппроксимирующая система во всей рассматриваемой области не имеет особенностей. Действительно,

$$\Delta = r^2\left[a^2 - u^2 + \frac{2uv}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_{\xi=\text{const}} + \frac{a^2 - v^2}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \xi = \text{const}\right] =$$

$$= \frac{r^2}{\sin^2(\chi + \theta)}\left[a^2 - \{u\sin(\chi + \theta) + v\cos(\chi + \theta)\}^2\right] = \frac{r^2\,(a^2 - V_n{}^2)}{\sin^2(\chi + \theta)} \tag{1.7}$$

Здесь χ — угол наклона линии $\xi = \text{const}$ к оси симметрии, V_n — нормальная составляющая скорости к линии $\xi = \text{const}$. Из (1.7) следует, что условие $\Delta > 0$ выполняется на контуре ($V_n = 0$), на ударной волне и в дозвуковой области ($V_n{}^2 < a^2$). Во внутренних точках трансзвуковой области это условие также выполняется, поскольку величина Δ может обратиться в нуль в точках, где линия $\xi = \text{const}$ касается характеристики. В трансзвуковой области последнее не имеет места при обтекании тел с выпуклым контуром головной части.

Численный алгоритм, по которому проводится расчет, следующий.

1. Воздух перед ударной волной считается совершенным газом с $\gamma = 1.405$, так что по значениям M_∞, p_∞, T_∞ все остальные газодинамические параметры здесь вычисляются по формулам совершенного газа.

2. Производится расчет начальных данных за ударной волной в узлах $\theta = \theta_i$, для чего в каждом узле решается система двух трансцендентных уравнений относительно p_{ci}, T_{ci} $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$

$$p_{ci} = p_\infty + V_{\infty ni}^2 \rho_\infty (1 - \rho_\infty/\rho_c)$$
$$h_{ci} = h_\infty + {}^1/_2 V_{\infty ni}^2 (1 - \rho_\infty{}^2/\rho_c{}^2) \tag{1.8}$$

и затем определяются u_{ci}, v_{ci}, ... и т. д. Расчет $h(p, T)$ и $\rho(p, T)$ за ударной волной ведется по аналитическим формулам [2].

3. Зависимость $T_c = T_c(\theta)$ и $\rho_c = \rho_c(\theta)$ аппроксимируется интерполяционными полиномами по рассчитанным значениям T_{ci}, ρ_i

$$T_c = \sum_{j=0}^{m} T_{cj}{}^\circ \theta^{2j}, \quad \rho_c = \sum_{j=0}^{m} \rho_{cj}{}^\circ \theta^{2j} \tag{1.9}$$

Аппроксимация (1.9) не является необходимой, поскольку зависимость температуры и плотности от θ непосредственно за ударной волной можно определять из решения уравнения типа (1.8) для промежуточных значений θ, однако (1.9) позволяет значительно экономить машинное время. Анализ показывает, что погрешность вследствие использования (1.9) мала.

4. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) численно интегрируется методом Рунге-Кутта от начальных данных при $\xi = 1$ с некоторым шагом $\Delta\xi$. Так как решается система относительно u, v, p, ψ, то на последующем шаге интегрирования первоначально известны только эти функции.

Вычисление правых частей (1.2) в точке $\xi_k = k|\Delta\xi|$ ведется в следующем порядке: а) из (1.5) находится итерациями $T(\xi_k, \theta_i)$; б) из первого уравнения (1.6) итерациями определяется $\theta = \theta_k$, т. е. определяется точка на ударной волне, откуда приходит в рассчитываемую точку области линии тока, и при помощи второго уравнения (1.6) и (1.9) вычисляется $dS(\xi_k, \theta_i) / d\psi$; в) при расчете величины $a^2(p, T)$ производные ρ_p, h_p, ... определяются численно по простейшей схеме.

Последующий алгоритм совпадает со случаем совершенного газа, и его повторять не будем.

§ 2. По описанной схеме была составлена программа для ЭЦВМ и проведены расчеты обтекания эллипсоидов вращения с отношением полуосей $\delta = b / a = 1, 2, 3$ (фиг. 3) и тела, образующая передней части которого задается уравнением

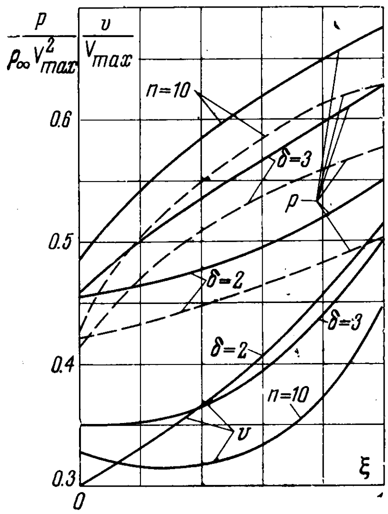
$$|x|^n + |y|^n = 1 \tag{2.1}$$

при $n = 10$.

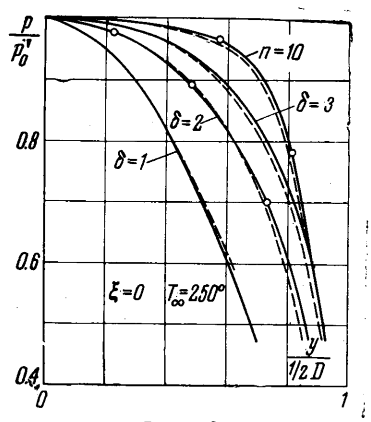
Геометрия тел с контуром (2.1) рассмотрена в работе [4]. Заметим, что при $n > 2$ — это тело типа торца со скруглением углов, при $n = 10$ отношение радиуса скругления к диаметру $r / D \approx 0.07$. Параметры в набегающем потоке изменялись в диапазонах

$$4 \leqslant M_\infty \leqslant 50, \; 10^{-4} \text{ атм} \leqslant p_\infty \leqslant 1 \text{ атм}, \; 200^\circ \text{ K} \leqslant T_\infty \leqslant 300^\circ \text{ K}$$

Во всех вариантах применялась девятиточечная аппроксимация производных по θ $(m = 4)$ с узлами в нулях полинома Чебышева. Аппроксимация производных по ξ проводилась с шагом $\Delta\xi = -0.1$. Следует отметить, что объем памяти, занимаемый программой расчета обтекания равновесным воздухом, лишь незначительно превосходит объем памяти, соответствующий случаю совершенного газа, а необходимое машинное время (при $\Delta\xi = -0.1$) возрастает лишь в 1.5 раза. Программа составлена таким образом, что для проведения расчета обтекания равновесным потоком какого-либо другого газа (например углекислого) требуется замена одного независимого блока — подпрограммы вычисления $\rho\,(p, T)$ и $h\,(p, T)$. Результаты расчетов содержатся в таблицах, где приводятся распределения газодинамических и термодинамических параметров от ударной волны до тела вдоль пяти лучей интегрирования и коэффициенты интерполяционных полиномов по известным из решения значениям функций в узлах, которые позволяют определять характеристики течения в любой промежуточной точке дозвуковой и трансзвуковой областей. При оценке точности численного решения используются те же соотношения, что и в случае совершенного газа, за исключением интеграла Бернулли, участвующего в расчетной схеме.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для примера в табл. 1 проводится сравнение результатов для p и v, полученных при пятиточечной аппроксимации по θ ($m = 2$) и девятиточечной ($m = 4$) для сферы (данные по пятиточечной аппроксимации взяты из [3]).

Таблица 1

($\delta = 1,\ \theta = 0.625,\ l = 0,\ M_\infty = 10\ p_\infty = 1$ *атм* $T_\infty = 250°$ K)

	m	$\zeta = 1.0$	$\zeta = 0.8$	$\zeta = 0.6$	$\zeta = 0.4$	$\zeta = 0.2$	$\zeta = 0$
$\frac{p}{\rho_\infty V^2_{\max}}$	2	0.628	0.616	0.601	0.587	0.572	0.557
	4	0.62914	0.61605	0.60166	0.58689	0.57212	0.55746
$\frac{v}{V_{\max}}$	2	0.493	0.453	0.414	0.378	0.344	0.312
	4	0.49279	0.45269	0.41445	0.37832	0.34442	0.31284

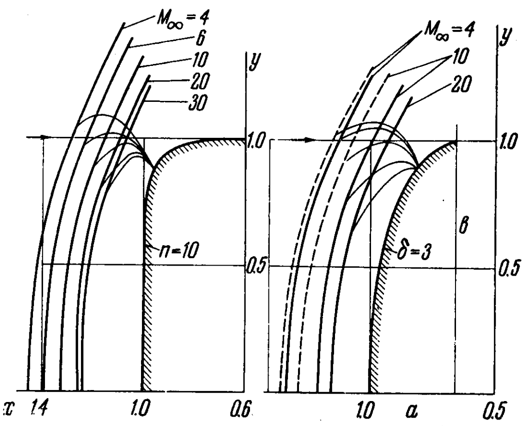
При этом для значений отхода ударной волны ε сравнение дает:

$\theta = 0$	0.3125	0.625	
$\varepsilon = 0.0981$	0.1052	0.1305	при $m = 2$
$\varepsilon = 0.098058$	0.10525	0.13071	при $m = 4$

Из табл. 1 видно, что максимальное расхождение результатов различных приближений не превышает 0.3%. Оценка максимальной величины численных погрешностей показывает, что она значительно ниже погрешности аналитической аппроксимации [2].

На фиг. 1—5 приводятся некоторые результаты расчетов. Пунктирные линии, рассчитанные по схеме [4], соответствуют обтеканию потоком совершенного газа с $\gamma = 1.4$. Фиг. 1 иллюстрирует влияние формы тела на распределение трансверсальной составляющей скорости и давления от ударной волны до тела в трансзвуковой области. Здесь построены зависимости этих величин от ξ вдоль лучей $\theta = 1.29$ ($l = 0$) для эллипсоида $\delta = 2$, $\theta = 0.857$ ($l = {}^2/_3$) для $\delta = 3$, $\theta = 0.751$ ($l = 0$) для тела $n = 10$ при фиксированных параметрах набегающего потока $M_\infty = 10$, $p_\infty = 0.01$

атм, $T_\infty = 250°$ K (для совершенного газа число $M_\infty = 10$). Распределение давления по поверхности тел в зависимости от ординаты y при тех же параметрах набегающего потока представлено на фиг. 2. Из графиков видно, что диссоциация, играющая в этом диапазоне параметров набегающего потока основную роль, относительно слабо влияет на давление $\sim 5 - 10\%$. Интересно отметить, что с увеличением затупленности тела меняется характер распределения давления по телу. Для сферы вследствие диссоциации отношение p / p_0' в фиксированной точке уменьшается, а для $\delta = 3$ и $n = 10$ — увеличивается. Анализ результатов показывает, что отношение p / p_0' по поверхности тела слабо зависит от параметров набегающего потока. Это следует из табл. 2, где проводится сравнение отношения p / p'_0 для сферы и эллипсоида в точках, соответствующих дозвуковой и трансзвуковой областям (данные для сферы взяты из [3]).



Фиг. 3

В окрестности линии торможения изменение давления и плотности во всей области от ударной волны к телу невелико и эффективный показатель адиабаты здесь мало отличается от постоянной величины. Причем для сильно затупленных тел этим свойством обладает большая часть дозвуковой области, поэтому здесь результаты расчета для воздуха хорошо совпадают с результатами для совершенного газа с показателем адиабаты, близким к эффективному. На фиг. 2 точки 1, соответствующие $M_\infty = 10$ и $\gamma = 1.2$, близки к кривой для воздуха. Фиг. 3 иллюстрирует влияние формы тела и числа M_∞ на геометрическую картину течения при $p_\infty = 0.01$ *атм* и $T_\infty = 250°$ K. Из графиков видно, что диссоциация приводит к более интенсивному уплотнению в ударном слое, и положения ударных волн и звуковых линий отличаются от кривых для совершенного газа с $\gamma = 1.4$ на $\sim 20 - 30\%$. На фиг. 4 построены кривые зависимости отхода ударной волны вдоль оси симметрии от числа M_∞ для различных тел. Немонотонный характер зависимости от M_∞ объясняется немонотонностью степени сжатия в прямом скачке ρ_∞ / ρ_c от M_∞, а при гиперзвуковом обтекании тела заданной формы отход ударной волны однозначно связан с коэффициентом сжатия. Для сферы это показано в работе [3]. Из фиг. 5,

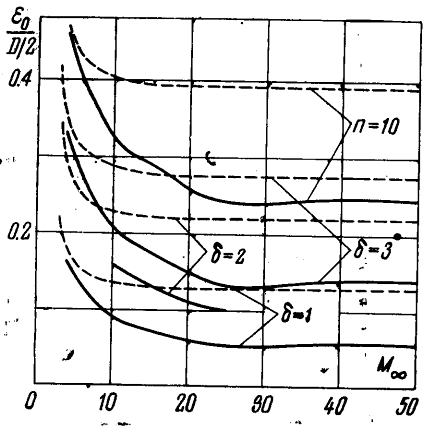
Таблица 2

p_∞, *атм* / T_∞, °K		0.01 / 250			10^{-4} / 250	0.01 / 300
	θ_i	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 10$	$M_\infty = 50$	$M_\infty = 10$	$M_\infty = 10$
$\delta = 1$	0.3125	0.896	0.889	0.883	0.888	—
$l = 0$	0.625	0.642	0.620	0.593	0.618	—
	0.297	0.977	0.979	0.980	0.980	0.980
$\delta = 3$	0.559	0.894	0.901	0.903	0.903	0.901
$l = {}^2/_3$	0.753	0.710	0.722	0.719	0.726	0.723
	0.857	0.488	0.505	0.490	0.510	0.505

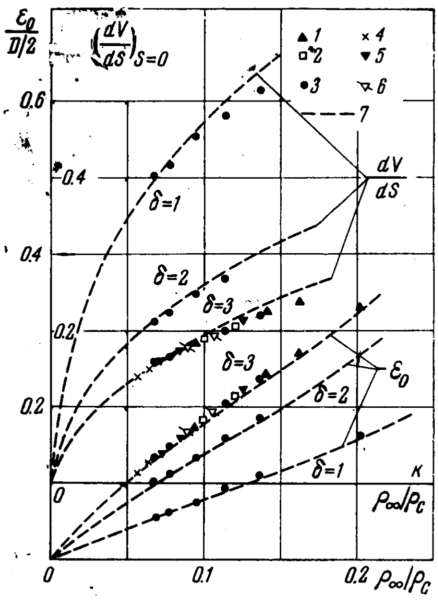
Таблица 3

Точки	M_∞	p_∞ *атм*	T_∞, °K
1	4—25	1.0	250
2	10—25	0.1	250
3	4—50	0.01	250
4	10—25	0.0001	250
5	10—25	0.01	200
6	10—25	0.01	300
7	совер. газ $\gamma = 1.4$		

где построены зависимости ε_0 от ρ_∞/ρ_c для эллипсоидов $\delta = 1, 2, 3$, следует, что это свойство сохраняется и для тел различной формы, причем кривые для воздуха располагаются вблизи кривой для совершенного газа. Обозначения, соответствующие различным условиям в набегающем потоке, указаны в табл. 3. Чтобы не усложнять чертежа, нанесена лишь часть рассчитанных вариантов. На той же фигуре построена зависимость градиента скорости dV/ds при $s = 0$ (в долях $2V_{\max}/D$, в критической точке от ρ_∞ / ρ_c. В случае совершенного газа определяющим параметром для градиента скорости служит не ρ_∞ / ρ_c, как для ε, а $k = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$ и этот график строится по верхней шкале. Используя универсальность кривых для воздуха, можно с хорошей точностью определять указанные величины при произвольной в данном диапазоне комбинации параметров набегающего потока.



Фиг. 4



Фиг. 5

Исследования показывают, что подобие течений, установленное при обтекании тел различной формы совершенным газом, имеет место и при наличии диссоциации. Укажем, в частности, что распределение давления вдоль оси симметрии с точностью до 1% не зависит от формы тела при фиксированных условиях в набегающем потоке.

Авторы благодарят Г. Ф. Теленина за внимание и помощь, проявленные к данной работе.

Поступило 15.I 65

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
2. Крайко А. Н. Аналитическое представление термодинамических функций воздуха. Инж. ж., 1964, т. 4, № 3.
3. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Исследование сверхзвукового обтекания сферы воздухом и углекислым газом при термохимическом равновесии. Докл. АН СССР, 1964, № 1, стр. 159.
4. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1964, № 5.