О ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ

Т. А. ГИРШОВИЧ (*Москва*)

Решения задачи о струе в сносящем потоке сводятся обычно к определению искривленной оси струи [1-6].

Ниже предлагается приближенная постановка задачи о плоской струе, вытекающей из бесконечно тонкой щели и распространяющейся под некоторым углом к безграничному потоку, причем определяются скорость на оси, внешняя и внутренняя границы и другие параметры струи. Из решения, как частный случай, получаются известные результаты для обычной затопленной струи. Основная трудность при постановке задачи о струе в сносящем потоке состоит в задании граничных условий.

По предложению Г. Н. Абрамовича, считается, что на внешней (передней к потоку) границе струи скорость и давление равны скорости и давлению, получающимся при обтекании твердой стенки, имеющей такую же форму, как и изогнутая ось струи. Иначе говоря, скорость и давление получаются из рассмотрения обтекания полутела, образованного двумя струями, вытекающими под углами $\pm\alpha_0$ к набегающему потоку. Ось симметрии этого полутела параллельна направлению набегающего потока. На внутренней (задней к потоку) границе струи скорость в первом приближении считается равной нулю, а статическое давление — постоянным. Следует заметить, что этим граничным условием схематизируется течение в застойной области за струей, в которой, как показывают эксперименты, возникают циркуляционные зоны, несколько увеличивающие расширение струи.

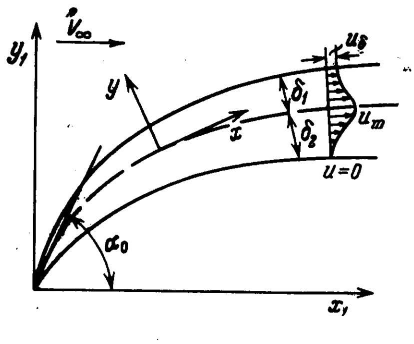
С уменьшением угла наклона струи к потоку величина застойной области уменьшается. Очевидно, что при некотором малом угле наклона струи к потоку циркуляционные зоны исчезнут. С другой стороны, при некотором большом угле наклона струи к сносящему потоку радиус кривизны оси струи на ее начальном участке становится сравнимым с шириной струи. В обоих случаях принятая здесь постановка задачи будет неверна. Предельные углы, для которых она еще применима, необходимо определить экспериментально.

Кроме того, принимаются следующие допущения: 1) искривленная ось струи есть линия тока, 2) касательные напряжения на оси струи равны нулю, 3) путь смешения поперек искривленной оси струи постоянен.

Задача решается в криволинейных ортогональных координатах; за ось абсцисс принимается искривленная ось струи, а за ось ординат — нормаль к этой оси. Такой выбор системы координат позволяет использовать для струи в сносящем потоке уравнения пограничного слоя. Таким образом, в криволинейных координатах решается задача о струйном пограничном слое в потоке с переменной спутной скоростью.

Решение получено при помощи интегрального метода, известного в теории пограничного слоя; в теории струй этот метод применен А. С Гиневским [7].

Пусть плоская турбулентная струя вытекает под углом к безграничному потоку, вытекающему из бесконечно тонкой щели. В этом случае струю можно рассматривать как пограничный слой. Схема такой струи со всеми обозначениями показана на фигуре. Показано [8], что если радиус кривизны стенки значительно больше толщины пограничного слоя, то уравнения пограничного слоя в выбранных выше криволинейных координатах будут иметь вид



$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{u^2}{R(x)},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (1)$$

Здесь $R(x)$ — радиус кривизны; $R>0$, если стенка обращена выпуклостью наружу. Для решения задачи необходимо решить систему уравнений (1) при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} &u=u_\delta, && \frac{\partial u}{\partial y}=0, && p=p_\delta \text{ при } y=\delta_1 \\ &v=0, && u=u_m && \text{при } y=0 \\ &u=0, && \frac{\partial u}{\partial y}=0, && p=0 \text{ при } y=\delta_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

(давление отсчитывается от давления в области за струей p_0)

Вводя новую переменную

$$\eta_i = \frac{y}{\delta_i} \quad \begin{pmatrix} i = 1 \text{ для верхней половины струи} \\ i = 2 \text{ для нижней половины струи} \end{pmatrix} \tag{3}$$

и следуя методу [7], представим распределение касательных напряжений в виде

$$\tau_i = B_0 + B_1\eta_i + B_2\eta_i^2 + B_3\eta_i^3 \tag{4}$$

Коэффициенты этого полинома определяются из следующих граничных условий:

$$\tau_i = 0, \quad \frac{\partial \tau_i}{\partial \eta_i} = \rho\delta_i \left[u_m u_m' + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{y=0} \right] = A\rho\delta_i \text{ при } \eta_i = 0 \tag{5}$$

$$\tau_i = 0, \quad \frac{\partial \tau_i}{\partial \eta_i} = 0 \quad \text{при } \eta_i = 1$$

Таким образом, получается следующее выражение для τ_i:

$$\tau_i = \rho\delta_i A \eta_i (1 - \eta_i)^2 \tag{6}$$

Профиль скорости определяется при помощи формулы Прандтля для касательных напряжений [1]

$$\tau_i = \mp \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{7}$$

После приравнивания выражения (6) выражению (7) получим

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_i} = -\left(\pm \frac{\delta_i^3 A}{l^2} \right)^{1/2} (\eta_i^{1/2} - \eta_i^{3/2})$$

Интегрирование полученного уравнения от 0 до η_i дает следующую формулу для профиля скорости в струе:

$$u = u_m - \left(\mp \frac{\delta_i^3 A}{l^2} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{3} \eta_i^{3/2} - \frac{2}{5} \eta_i^{5/2} \right) \tag{8}$$

Здесь u_m — скорость на оси струи.

Из первого условия (2) и из (8) получается уравнение

$$u_m - u_{\delta, i} = \frac{4}{15} \left(\mp \frac{\delta_i^3 A}{l^2} \right)^{1/2} \tag{9}$$

Совместное решение (8) и (9) позволяет получить относительный профиль избыточной скорости

$$\frac{u - u_{\delta, i}}{u_m - u_{\delta, i}} = 1 - \frac{5}{2} \eta_i^{3/2} + \frac{3}{2} \eta_i^{5/2} \tag{10}$$

Из (10) видно, что продольный и поперечный градиенты давления не влияют на форму относительного профиля скорости. Этот факт для осесимметричной струи подтвержден экспериментально [9]. Выражение (9) для внутренней и наружной частей струи записывается по отдельности следующим образом:

$$u_m = \frac{4}{15} \left(\frac{\delta_2^3 A}{l^2} \right)^{1/2}, \quad u_m - u_\delta = \frac{4}{15} \left(-\frac{\delta_1^3 A}{l^2} \right)^{1/2} \tag{11}$$

Из (11) после несложных преобразований получаем простое алгебраическое соотношение между ординатами внутренней и наружной границ струи

$$\delta_1 = -\delta_2 \left(1 - \frac{u_\delta}{u_m} \right)^{2/3} \tag{12}$$

Как видно из (12), при скорости сносящего потока, равной нулю, имеет место соотношение $\delta_1 = -\delta_2$, т. е. получается обычная затопленная струя.

Для определения трех неизвестных величин u_m, δ_1 и δ_2 имеется уравнение (12) и одно из уравнений (11). Третье уравнение получается при помощи интегрирования поперек внутренней части струи первого уравнения системы (1) с использованием уравнения неразрывности. В результате получим

$$\int_0^{\delta_2} \left(u^2 + \frac{p}{\rho} \right) dy = -K_2 \tag{13}$$

[1] При очень большой кривизне струи формула Прандтля, по-видимому, требует уточнения.

Величина константы $K_2 = mK$ неизвестна. По-видимому, не будет большой ошибкой считать K_2 половиной кинематического импульса струи ($m = 1/2$). Более точно величину K_2 можно будет определить из решения для начального участка плоской струи, вытекающей из щели конечной толщины. В результате интегрирования в выражении (13) с использованием второго уравнения системы (1) получим

$$u_m^2 = -\frac{K_2}{\delta_2}\left(\frac{33}{112} - \frac{5}{84}\frac{\delta_2}{R}\right)^{-1} \tag{14}$$

При $R \to \infty$ уравнение (14) дает выражение для скорости на оси обычной затопленной струи.

Подстановка (14) в первое уравнение (11) и небольшие преобразования приводят к следующему дифференциальному уравнению для внутренней границы струи δ_2:

$$\delta_2' = \frac{{}^{225}/_8\beta^2R^2\,({}^{33}/_{112} - {}^5/_{84}\delta_2R^{-1}) - 0.1133\delta^2{}_2R'}{R^2\,({}^{10}/_{84}\delta_2R^{-1} - {}^{33}/_{112} - {}^5/_{84}\delta_2{}^2R^{-2})} \qquad \left(\beta^2 = \frac{l^2}{\delta_2^2}\right) \tag{15}$$

При $R \to \infty$ отсюда $\delta_2' = -{}^{225}/_8\,\beta^2 = -c$ или $\delta_2 = -cx$, т. е. получается известное уравнение границы турбулентной затопленной струи.

Уравнение (15) можно решить методом последовательных приближений. Для k-го приближения имеет место формула

$$\delta_{2,k} = \int\limits_0^x \frac{{}^{225}/_8\beta^2R^2\,({}^{33}/_{112} - {}^5/_{84}\delta_{2,\,k-1}R^{-1}) - 0.1133\delta^2{}_{2,\,k-1}R'}{R^2\,({}^{10}/_{84}\delta_{2,\,k-1}R^{-1} - {}^{33}/_{112} - {}^5/_{84}\,(\delta_{2,\,k-1})^2\,R^{-2})}\,dx \tag{16}$$

При приближенных расчетах можно принять δ_2 равным δ для обычной затопленной струи с несколько увеличенным коэффициентом c. Тогда остальные характеристики струи легко находятся из соотношений (12) и (14).

Для полного решения задачи осталось найти форму оси струи. Для этой цели можно применить еще не использованное условие, состоящее в том, что давление на внешней границе струи должно равняться давлению, полученному из обтекания струи как твердой криволинейной стенки безграничным потоком. Это условие имеет вид:

$$\frac{p_\delta}{\rho} = -\frac{33}{112}\frac{\delta_2}{R}u_m^2 + \frac{\delta_1}{R}u_m^2\left[\frac{7}{16}\frac{u_\delta^2}{u_m^2} + \frac{15}{56}\frac{u_\delta}{u_m} + \frac{33}{112}\right] \tag{17}$$

Обтекание твердой криволинейной стенки можно получить, например, методом наложения потоков.

Наложение однородного потока, параллельного оси x_1, на поток от системы источников (стоков), непрерывно распределенных вдоль той же оси в некотором промежутке с интенсивностью $q(\xi)$, дает функцию тока суммарного течения вида

$$\psi = V_\infty y_1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b q(\xi)\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y_1}{x_1 - \xi}\,d\xi \tag{18}$$

Приравнивание функции тока ψ нулю дает уравнение стенки (оси струи). При помощи (18) вычисляются скорость и давление на стенке и принимается, что они равны скорости и давлению на границе струи. Затем полученные выражения подставляются в (17), из которого и определяется распределение источников $q(\xi)$.

Поступило 20 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Гостехиздат, 1960.
2. Батурин В. В., Шепелев И. А. Воздушные завесы. Отопление и вентиляция, 1936, № 5.
3. Вахламов С. В. Расчет траектории струи в сносящем потоке. Инж.-физ. ж., 1964, т. 7, № 10.
4. Волынский М. С. О форме струи жидкости в газовом потоке. Оборонгиз, 1958.
5. Иванов В. С. О форме средней линии осесимметричной веерной струи в сносящем потоке. Изв. высш. учебн. завед., Авиационная техника, 1963, № 4.
6. Костерин В. А., Ржевский Е. В. О расчете траектории и дальнобойности веерных и парных плоских струй в ограниченнном плоском потоке. Изв. высш. учебн. завед., Авиационная техника, 1964, № 1.
7. Гиневский А. С. Турбулентные след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
9. Keffer G. F., Baines W. D. The round turbulent jet in a cross-wind. J. Fluid Mechn., 1963, 15, apriel.