

**НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ СКОльзяЩЕГО КРЫЛА С ПЕРЕГОРОДКОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ И ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА**

А. И. ГОЛУБИНСКИЙ, А. Н. ИВАНОВ  
(Москва)

Известны отдельные примеры тел пространственной формы, для которых удается построить решение задачи обтекания, например, тела звездообразного (многоугольного) поперечного сечения [1, 2], или тела вращения (конус, эллипсоид) под углом атаки и т. д. Роль таких отдельных решений существенно для выяснения характерных особенностей пространственного обтекания тел.

Применение гиперзвукового метода малых возмущений [3], сводящего задачу о неустойчивом движении газа в двух измерениях, а также использование одного известного семейства точных решений плоской задачи о неустойчивом движении [4] дает возможность исследовать обтекание скользящего крыла с концевой перегородкой гиперзвуковым потоком в некоторых частных случаях.

В настоящей работе построен более широкий класс пространственных тел такого типа (комбинации скользящего или треугольного крыла с концевой перегородкой, направленной параллельно набегающему потоку), для которых удается построить простые точные решения задачи обтекания сверхзвуковым и гиперзвуковым потоком без применения метода малых возмущений. В частном случае эти решения описывают обтекание двух взаимно пересекающихся скользящих крыльев.

На примере обтекания этих тел обнаруживается интересное явление сильной интерференции при больших скоростях, когда в результате интерференции возникают местные давления, намного превосходящие давления на изолированном крыле.

1. Рассмотрим обтекание участка треугольного (или стреловидного) крыла, подобного изображенному на фиг. 1, сверхзвуковым потоком газа, направленным навстречу оси координат  $x$ .

На конце крыла установлена плоская перегородка  $ODF$ , параллельная набегающему потоку и наклоненная под углом  $\xi$  к оси  $y$ . Профиль крыла имеет форму клина с углом  $\delta$  (по нормали к передней кромке). Угол передней кромки  $OA$  относительно направления набегающего потока обозначим через  $\alpha$ .

Попытаемся найти такие соотношения геометрических параметров  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\xi$  и числа Маха  $M_0$  потока, при которых на крыле может иметь место следующая простейшая картина обтекания: скачок уплотнения  $AOD$ , присоединенный к передней кромке, падает на перегородку  $DOF$  и, отразившись от нее, падает на верхнюю поверхность крыла под прямым углом. Тогда нового отражения скачка не происходит, а всю картину течения легко рассчитать до конца при помощи известных соотношений для косых скачков уплотнения.

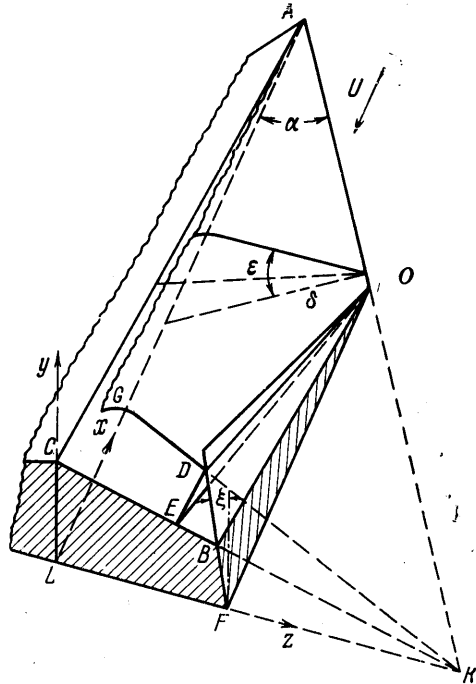
Обозначим нормальную к передней кромке крыла составляющую потока через

$$M_1 = M_0 \sin \alpha \tag{1.1}$$

Для присоединенного к крылу скачка уплотнения имеем [5]

$$\operatorname{ctg} \delta = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{M_1^2 \sin^2 \varepsilon - 1} - 1 \right] \operatorname{tg} \varepsilon \tag{1.2}$$

где  $\varepsilon$  — угол между присоединенным скачком и плоскостью  $xz$ ,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей газа.



Фиг. 1

Обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно углы падающего и отраженного скачков с плоскостью перегородки. Нетрудно видеть, что

$$\omega_1 = \arccos(\cos \varepsilon \sin \xi + \sin \varepsilon \cos \xi \cos \alpha) \quad (1.3)$$

Угол  $\omega_2$  выражается через  $\omega_1$  и интенсивность падающего скачка  $\eta$ , равную отношению давлений  $p_2/p_1$  на скачке, следующим образом [6]:

$$\tau_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad \tau_1 = \operatorname{ctg} \omega_1, \quad \tau_2 = \operatorname{ctg} \omega_2$$

$$A = s[(\nu - 1)s - (\nu - 2)](\tau_1^2 + 1) - 1, \quad \nu = (\gamma + 1)/(\gamma - 1) \quad (1.4)$$

$$B = -(\nu - 1)\tau_1[s^2(\tau_1^2 + 1) - 1], \quad C = \nu[s(\tau_1^2 + 1) - 1]$$

$$s = \frac{\nu\eta + 1}{(\nu - 1)(\eta - 1)}, \quad \eta = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_1^2 \sin^2 \varepsilon - \frac{1}{\nu}$$

Необходимо отметить, что «плюс» перед корнем в уравнении (1.4) соответствует слабому, а «минус» — сильному отражению. Наконец, из условия перпендикулярности отраженного скачка к верхней поверхности крыла, а также учитывая, что плоскости падающего и отраженного скачков принадлежат одному пучку плоскостей (протянувшихся через линию  $OD$ ), можно получить

$$\cos(\varepsilon - \delta) = (\tau_1 + \tau_2) \sin \omega_1 (\cos \delta \sin \xi + \sin \delta \cos \xi \cos \alpha) \quad (1.5)$$

Уравнения (1.2) — (1.5) дают связь между семью параметрами  $M_0, \alpha, \delta, \varepsilon, \xi, \omega_1, \omega_2$ . Поэтому можно задавать независимо три параметра, например, геометрию тела ( $\alpha$  и  $\delta$ ) и число  $M_0$ . Четвертый параметр  $\xi$  (угол наклона перегородки) зависит от этих параметров. Отметим, что разрешить приведенную систему уравнений в явном виде не удается, за исключением случая, рассмотренного ниже в п. 3.

2. Область существования рассматриваемых течений можно определить из следующих физических условий.

(а) Угол передней кромки должен удовлетворять неравенству

$$\alpha > \arcsin \frac{1}{M_0} \quad (2.1)$$

(б) Угол клина  $\delta$  должен быть меньше предельного значения  $\delta_*$ , определяемого из уравнения (1.2) при

$$\sin^2 \varepsilon_* = \frac{1}{\gamma M_1^2} (1/4(\gamma + 1) M_1^2 - 1 + \sqrt{(\gamma + 1)[1 + 1/2(\gamma - 1)M_1^2 + 1/16(\gamma + 1)M_1^4]}) \quad (2.2)$$

(в) Для существования правильного отражения необходимо, чтобы в уравнении (1.4) дискриминант  $B^2 - 4AC \geq 0$ , что соответствует  $\omega_1 \leq \omega_{**}$ , где  $\omega_{**}$  зависит от  $p_2/p_1$  и  $\gamma$ .

(г) Из рассмотрения не исключаются случаи сильного отражения скачков, хотя реализация сильного отражения на практике подвергается сомнению некоторыми авторами [4, 7].

Предположим, однако, что сильное отражение скользящих скачков от перегородки может реализоваться при условии, если суммарная скорость за отраженным скачком будет сверхзвуковой, т. е. при  $M_3 > 1$ .

Ввиду невозможности разрешения уравнений в явном виде границы области существования, соответствующие условиям (в) и (г), могут быть найдены только численными расчетами.

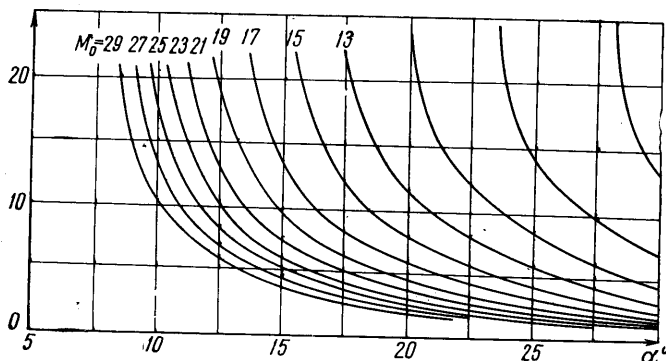
3. Известно, что уравнение (1.4), связывающее углы падения и отражения скачка, имеет одно характерное решение, когда эти углы одинаковы, не зависят от отношения давлений и равны [6]

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega^* = \arccos \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

В этом частном случае симметричного отражения перепад давлений на косом отраженном скачке такой же, как при прямом отражении, причем решение зависит лишь от двух параметров, так как для пяти неизвестных ( $M_0, \alpha, \delta, \varepsilon, \xi$ ) имеются три уравнения (1.2), (1.3), (1.5). Для этого случая удается разрешить систему в явном виде, если задать в качестве независимых параметров  $M_1$  и  $\varepsilon$ . Тогда  $\delta$  определяется по (1.2) и далее

$$\sin \xi = \frac{\sin \varepsilon \cos(\varepsilon - \delta) - 1/2(\gamma + 1) \sin \delta}{\sqrt{\gamma + 1} \sin(\varepsilon - \delta)}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{\gamma + 1}}{2 \sin \varepsilon \cos \xi} - \operatorname{ctg} \varepsilon \operatorname{tg} \xi \quad (3.2)$$

На фиг. 2 в качестве иллюстрации] приведены зависимости  $\xi = \xi(\alpha)$  при различных  $M_0$  для случая  $\gamma = 1.4$  (углы  $\xi, \alpha$  в градусах).



Фиг. 2

4. Область существования решения в симметричном случае при независимых переменных  $M_1$  и  $\varepsilon$  легко определить из условий (а), (б), (г) п. 2, а также из условия

$$\varepsilon \geq \arcsin \frac{1}{M_1}$$

В результате получим

$$\arcsin \frac{1}{M_1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \tag{4.1}$$

где  $\varepsilon_*$  определяется уравнением (2.2); а также  $\varepsilon \geq \arcsin k_+$  или  $\varepsilon \leq \arcsin k_-$ , где

$$k_{\pm} = \frac{1}{(\gamma - 1) M_1^2 + 2} \left\{ \frac{(\gamma - 1) \sqrt{(\gamma \pm 1)}}{2 \sqrt{3 - \gamma}} M_1^2 \pm \pm \left[ \frac{(\gamma - 1)^2 (\gamma + 1)}{4(3 - \gamma)} M_1^4 - 2(\gamma - 1) M_1^2 - 4 \right]^{1/2} \right\} \tag{4.2}$$

Построенные по этим условиям области существования решения в симметричном

случае для  $\gamma = 1.4$  и  $\gamma = 1.67$  приведены на фиг. 3. Линии  $AB$  и  $BD$  соответствуют условию (4.1), линия  $DE$  — условию (4.2). Линия  $FG$  разделяет область слабого (слева), и сильного отражений для  $\gamma = 1.4$ . Она находится из условия [7]

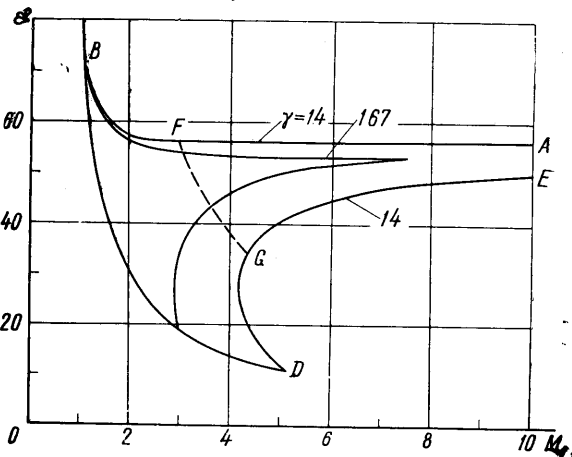
$$p_2 / p_1 = 7.02 \tag{4.3}$$

Следует отметить, что, согласно расчетам, в пределах указанной области существования условие (г) выполняется автоматически.

5. Если угол стреловидности  $\alpha \rightarrow 0$ , а  $M_0 \rightarrow \infty$ , но так, что  $M_1 = M_0 \alpha > 1$ , то уравнения (1.3) и (1.5) упрощаются и приобретают вид

$$\omega_1 = 1/2 \pi - \varepsilon - \xi$$

$$\omega_2 = \delta + \xi$$



Фиг. 3

Получившаяся в результате система уравнений полностью совпадает с системой уравнений, описывающих обтекание клина, пронизывающего неподвижную наклонную стенку (фиг. 4). Таким образом, в данном случае подтверждается известный закон плоских сечений.

При указанном переходе число определяющих параметров сокращается до двух ( $M_1, \delta$ ), тем не менее не удается получить решение уравнений в явном виде. Однако

при достаточно больших  $M_1$ , таких, что  $M_1^2 \sin^2 \varepsilon \gg 1$  (т. е. когда можно пренебречь начальным давлением  $p_1$ ), решение существенно упрощается. Действительно, при

$$\delta = \omega^* = \arcsin \left( \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \right)^{1/2}$$

получаем

$$\varepsilon = 1/2 \pi - \omega^*, \quad \xi = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega^*$$

что соответствует симметричному случаю. Для  $\delta \neq \omega^*$  можно получить решение в виде разложения относительно симметричного случая по степеням  $\xi$ , необходимо только записать соотношения для падающего и отраженного скачка в форме [7].

Для первых двух членов разложения имеем

$$\begin{aligned} \delta &= \omega^* - \frac{(2 - \gamma)(5\gamma + 1)}{4\gamma(3 - \gamma)} \xi, & \varepsilon &= 1/2 \pi - \omega^* - \frac{5\gamma + 1}{4\gamma(3 - \gamma)} \xi \\ \omega_1 &= \omega^* + \frac{4\gamma^2 - 7\gamma + 1}{4\gamma(3 - \gamma)} \xi, & \omega_2 &= \omega^* + \frac{\gamma^2 + 3\gamma - 2}{4\gamma(3 - \gamma)} \xi \\ \eta_3 &= \frac{p_3}{p_2} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma - 1} + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \xi \end{aligned}$$

где  $p_3/p_2$  — отношение давлений на отраженном скачке.

Представляет интерес сравнить подъемную силу  $Y_1$  для участка крыла  $BE$  (фиг. 4), примыкающего к перегородке (учитывая и силы, действующие на перегородку), с подъемной силой  $Y_2$  для участка крыла  $KB$  при отсутствии перегородки. Нетрудно видеть, что

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{p_3 \operatorname{tg}(\varepsilon - \delta)}{p_2 \cos(\delta + \varepsilon)} \left[ \sin(\delta + \varepsilon) - \frac{\sin \xi}{\cos \delta} \right] \quad (5.1)$$

Это при разложении по  $\xi$  дает

$$\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{3\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{1}{\gamma + 1} \left[ 2\gamma - \frac{(3\gamma - 1)(5\gamma + 1)}{\gamma(3 - \gamma)} \right] \left( \frac{3 - \gamma}{\gamma + 1} \right)^{1/2} \xi$$

Рассмотрим это решение при  $\xi = 0$ , когда  $\gamma \rightarrow 1$ . В этом случае область повышенного давления сужается, а само давление растет так, что  $Y_1/Y_2 \rightarrow 1$ . Таким образом, при  $\xi = 0$ ,  $M_1 \rightarrow \infty$  и  $\gamma \rightarrow 1$  в месте сопряжения крыла с перегородкой возникает сосредоточенная подъемная сила, равная силе, действующей на отсеченный участок крыла.

Отметим, что появление значительной сосредоточенной подъемной силы в месте сопряжения крыла с перегородкой трудно объяснить в рамках известной ньютоновской теории для гиперзвукового обтекания тел и, по-видимому, непосредственно связано с наличием сильного отражения головного скачка от перегородки. Поэтому представляет принципиальный интерес экспериментальное исследование найденных течений при больших сверхзвуковых скоростях. Заметим, что при значениях  $\gamma > 1$  дополнительные силы, создаваемые концевой перегородкой, оказываются соизмеримыми с силами, действующими на отсеченную перегородкой часть крыла (фиг. 5).

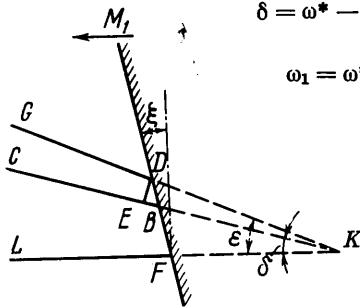
Следует отметить, что при гиперзвуковом переходе поток за отраженной ударной волной остается сверхзвуковым. Действительно, при  $M_1 \rightarrow \infty$  для  $\xi = 0$  имеем

$$M_3^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[ \frac{\gamma + 1}{(3\gamma - 1) \sin^2 \alpha} - 1 \right]$$

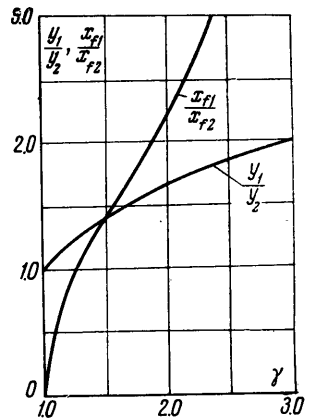
т. е. в рассматриваемом случае, когда  $\alpha \rightarrow 0$ , получаем  $M_3 \rightarrow \infty$ . Таким образом, при гиперзвуковом переходе можно предполагать, что сильное отражение головного скачка от перегородки реализуется.

6. Оценим силы сопротивления, действующие на участок крыла с перегородкой в гиперзвуковом потоке.

Отметим, что при  $\alpha \rightarrow 0$  сила волнового сопротивления  $X_w$  также стремится к нулю, и сопротивление тела определяется силой трения. В связи с этим сравним силу



Фиг. 4



Фиг. 5

трения  $X_{f1}$ , действующую на участок крыла с перегородкой (включая и силу трения, действующую на перегородку), с силой трения  $X_{f2}$ , действующей на отсеченную часть крыла.

Для оценки сил трения воспользуемся приближенной формулой, предложенной В. А. Башкиным, согласно которой для пластины при ламинарном пограничном слое,  $M_1 \gg 1$  и сильном теплообмене на поверхности тела, а также при степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры  $\mu \sim T^\omega$  сила трения равна

$$X_f = c_f F^{1/2} \rho u^2 = 1.33 \sqrt{\lambda / Rl} F^{1/2} \rho u^2, \quad \lambda \approx [(\gamma - 1) M_1^2 f(P)]^{\omega-1} \quad (6.1)$$

Здесь  $P$  — число Прандтля,  $F$  — площадь пластины,  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость потока на внешней границе пограничного слоя,  $R$  — число Рейнольдса при длине пластины, равной  $l$ .

Подставляя в уравнение (6.1) выражения для всех входящих в него переменных, нетрудно получить

$$\frac{X_{f1}}{X_{f2}} = \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{1/2} \operatorname{tg}(\varepsilon - \delta) \frac{1 + \sin \omega_2}{\cos \omega_2}$$

что в разложении дает

$$\frac{X_{f1}}{X_{f2}} = \frac{\sqrt{(3\gamma - 1)(\gamma - 1)}}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3 - \gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1/2}} \left[ \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \left( \frac{3 - \gamma}{(3\gamma - 1)(\gamma + 1)} \right)^{1/2} - \frac{1}{\gamma} \left( \frac{3\gamma - 1}{3 - \gamma} \right)^{1/2} - \frac{\gamma^2 - \gamma + 10}{2\gamma(3 - \gamma)^2} \sqrt{3\gamma - 1} \right] \xi$$

Зависимость  $X_{f1} / X_{f2}$  от  $\gamma$  при  $\xi = 0$  приведена на фиг. 5.

Авторы благодарят В. В. Струминского, В. В. Сычева и В. Н. Жигулева за обсуждение результатов настоящей работы.

Поступило 19 VII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М а й к а п а р Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. ПММ, т. 23, вып. 2.
2. Г о н о р А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа, ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
4. Г о л у б и н с к и й А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
5. Ф е р р и А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1952.
6. М и з е с Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Изд-во иностр. лит., 1961.
7. К у р а н т Г., Ф р и д р и х К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд-во иностр. лит., 1950.

#### СМЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЛАМИНАРНЫХ СТРУЙ

Л. М. СИМУНИ (Ленинград)

Рассматривается истечение вязкой несжимаемой жидкости из периодически расположенных отверстий в плоской стенке (фиг. 1). Система уравнений Навье — Стокса обычным образом сводится к уравнению для функции тока

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \tau} + R \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \eta} \right) = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \quad (1)$$

Здесь

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad u = \frac{v_x}{V}, \quad V = \frac{v_y}{V}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \xi = \frac{x}{h}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \tau = \frac{tv}{h^2 R}, \quad R = \frac{Vh}{\nu}, \quad V = \text{const}$$

$$u = 1 - e^{-k\tau} \quad (k = \text{const}), \quad v = 0 \quad \text{на } 0N$$

и что для достаточно больших  $\xi$  вследствие действия вязкости  $u = \text{const}$ ,  $v = 0$ .