

## К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ ПОД УГЛОМ АТАКИ

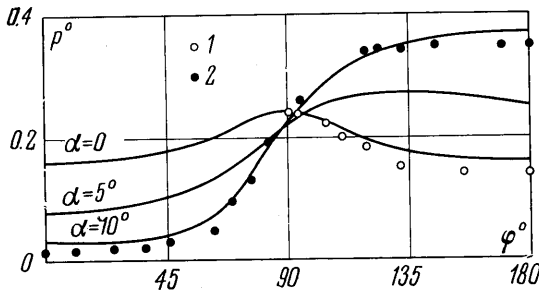
Н. А. МАХИН, В. Ф. СЯГАЕВ

(Москва)

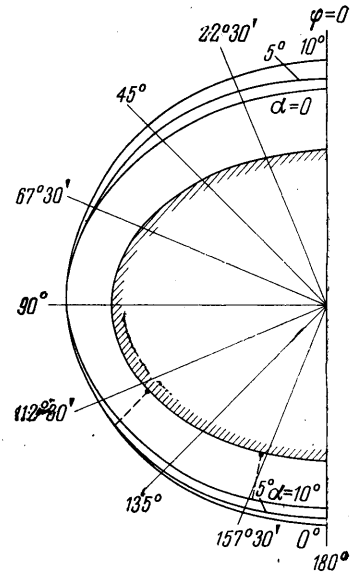
При расчете обтекания произвольного гладкого конического тела, например, эллиптического конуса под углом атаки, методом, предложенным в [1], возникают большие затруднения, связанные с образованием дополнительных особенностей и неизвестным положением критической точки на теле.

Кроме того, использованное в [1] предположение о том, что на твердом теле энтропийная функция принимает максимальное значение, в общем случае не является очевидным.

Возможности метода существенно расширяются, если вместо сферических координат  $\theta, \varphi$  ввести новые координаты  $\xi, \varphi$  и вместо энтропийной функции  $s$  в качестве искомых рассматривать плотность и давление.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Система уравнений, описывающая конические течения однородного нетеплопроводного газа в переменных  $\varphi, \xi$ , может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -\frac{\varepsilon}{K_2 \sin \theta} \left[ w \frac{\partial u}{\partial \varphi} - (v^2 \mp w^2) \sin \theta \right] & \frac{\partial w}{\partial \xi} &= -\frac{1}{K_2 \sin \theta} \left( \varepsilon K_3 \mp K_1 K_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= -\frac{\varepsilon}{K_2 (\sin \theta \mp K_1 K_5)} \left[ \frac{K_2 K_4 \sin \theta}{(a^2 - v^2) \sin \theta \mp K_1 v w} \mp K_3 K_5 \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi} = -\frac{\rho}{K_2 \sin \theta} \left[ \varepsilon \left( \frac{w}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \mp 2u \sin \theta \mp v \cos \theta \right) + \frac{\partial v}{\partial \xi} \sin \theta - K_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\rho \left[ K_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} \left( w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mp uv \sin \theta - w^2 \cos \theta \right) \right]$$

$$K_1 = \xi e'(\varphi) \mp \theta''(\varphi),$$

$$\varepsilon(\varphi) = \theta_*(\varphi) - \theta'(\varphi),$$

$$K_2 = v - \frac{w}{\sin \theta} K_1$$

$$K_3 = w \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{K_1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mp u \sin \theta \mp K_2 \cos \theta \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \mp K_1 u v$$

$$K_4 = (a^2 - w^2) \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \mp u (2a^2 - v^2 - w^2) \sin \theta \mp v a^2 \cos \theta$$

$$K_5 = \frac{v w \sin \theta \mp (a^2 - w^2) K_1}{(a^2 - v^2) \sin \theta \mp v w K_1} \quad \xi = \frac{\theta - \theta''}{\theta_* - \theta'}$$

Здесь  $u, v, w$  — безразмерные скорости по осям сферических координат, отнесенные к  $V_\infty$ ;  $\rho$  — плотность, отнесенная к  $\rho_\infty$ ;  $p$  — давление, отнесенное к  $\rho_\infty M_\infty^2$ ;  $M_\infty$  — число  $M$  невозмущенного потока;  $\theta'' = \theta''(\varphi)$  — уравнение заданного тела,  $\theta_* = \theta_*(\varphi)$  — уравнение задаваемой ударной волны; верхний индекс ' обозначает величины, относящиеся к телу, нижний индекс \* к ударной волне, штрих — дифференцирование по аргументу.

Система уравнений (1.1) интегрируется численно от задаваемой ударной волны  $\theta_* = \theta_*(\varphi)$  ( $\xi = 1$ ) до заданного тела  $\theta^0 = \theta^0(\varphi)$  ( $\xi = 0$ ) при следующих граничных условиях на ударной волне ( $\alpha$  — угол атаки)

$$u_* = u, \quad w_* = w + (v - v_*) \operatorname{tg} \beta_*$$

$$v_* = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1 + 2(\kappa - 1)^{-1} M_\infty^{-2} - u^2 - (w + v \operatorname{tg} \beta_*)^2 \cos^2 \beta_*}{v - w \operatorname{tg} \beta_*} + \frac{(w + v \operatorname{tg} \beta_*) \operatorname{tg} \beta_* \cos^2 \beta_*}{v - w \operatorname{tg} \beta_*}$$

$$p_* = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left[ 1 + \frac{2}{(\kappa - 1) M_\infty^2 (v - w \operatorname{tg} \beta_*)^2 \cos^2 \beta_*} \right]^{-1} \quad (1.2)$$

$$p_* = \frac{2}{\kappa - 1} (v - w \operatorname{tg} \beta_*)^2 \cos^2 \beta_* - \frac{\kappa - 1}{\kappa M_\infty^2 (\kappa + 1)}$$

$$\operatorname{tg} \beta_* = \frac{1}{\sin \theta_*} \frac{d\theta_*}{d\varphi}, \quad u = (\cos \alpha \operatorname{ctg} \theta_* + \sin \alpha \cos \varphi) \sin \theta_*, \\ v = (\sin \alpha \operatorname{ctg} \theta_* \cos \varphi - \cos \alpha) \sin \theta_*$$

$$w = -\sin \alpha \sin \varphi$$

В результате подбора величин  $\varepsilon(\varphi)$  должно быть удовлетворено с требуемой точностью граничное условие на заданном теле ( $\xi = 0$ )

$$v_n = v \cos \beta^0 - w \sin \beta^0 = 0 \quad (1.3)$$

Входящие в уравнения (1.1) производные по углу  $\varphi$  в проведенных расчетах определялись численно по формуле Стирлинга [2].

2. В качестве примера на фиг. 1÷4 приведены результаты расчетов обтекания эллиптического конуса с параметрами  $\lambda = -1.66; K_9 = 1.39$  при числе  $M_\infty = 6$ .

Система уравнений (1.1) интегрировалась при этом в первом приближении методом Эйлера с шагом интегрирования  $\Delta \xi = 1/64$  и шагом  $\Delta \varphi = \pi/8$ . Расчеты проведены при значениях углов атаки  $\alpha = 0, 5^\circ, 10^\circ$ .

Результаты расчетов коэффициентов давления  $p^0$  на конусе при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 10^\circ$  сравниваются на фиг. 1 с экспериментальными данными для близкого овалообразного конуса [3].

Приведенные на фиг. 2 сечения плоскостью, нормальной к оси конуса, дают представление о форме и положении присоединенной конической ударной волны, а также о положении критических точек на теле при исследованных углах атаки.

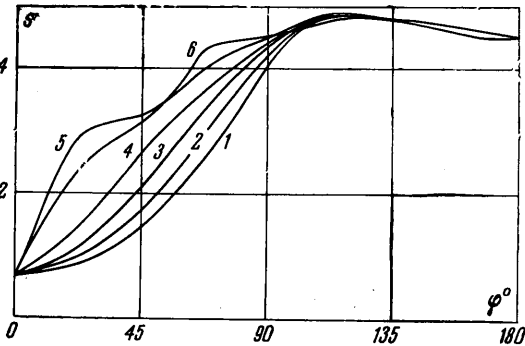
На фиг. 3 для случая угла атаки  $\alpha = 5^\circ$  приведен график изменения энтропийной функции

$$S = \frac{1}{\kappa(\kappa - 1)} \ln \frac{\kappa M_\infty^2 p}{\rho^\kappa}$$

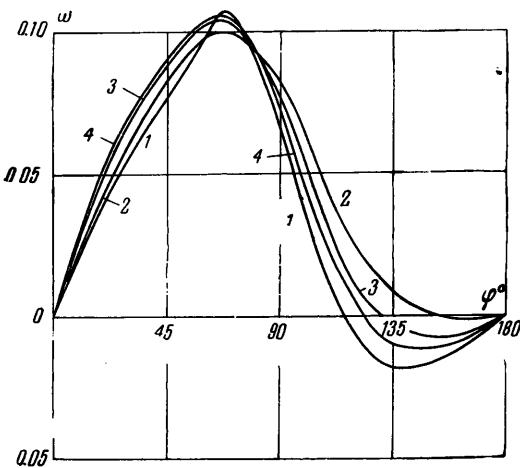
кривые 1—6 соответствуют параметру  $\xi = 1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0325, 0$ .

Видно, что при приближении к телу ( $\xi = 0$ ) значения энтропийной функции выравниваются, однако не становятся постоянными на теле, видимо, вследствие погрешностей расчета, возникающих вблизи тела ( $\xi < 0.03125$ ) в окрестностях особенности ( $\varphi = 22.5^\circ$  и  $\varphi = 45^\circ$ ).

Для этого же угла атаки  $\alpha = 5^\circ$  на фиг. 4 показано изменение составля-



Фиг. 3



Фиг. 4

щей скорости, нормальной к меридиональной плоскости  $\varphi = \text{const}$ . Кривые 1—4 соответствуют параметру  $\xi = 0, 1, 0, 5, 0, 25$ . Отмеченная выше погрешность расчета при  $\varphi = 22,5^\circ$  и  $\varphi = 45^\circ$  при  $\xi = 0$  проявляется также в зависимости  $w = w(\varphi)$ .

3. Расчеты по указанной выше схеме так же представлялись достаточно сложными, поскольку в отличие от изложенной в [1] данная схема допускает переход через особенность при расчете промежуточных обратных задач. Это могло вызвать некоторые затруднения при подборе углов раствора скачка в плоскостях  $\varphi = \text{const}$ , прилегающих к плоскости особого луча. Надо заметить, что в практическом отношении эти затруднения оказались не столь велики, поскольку углы растворов скачка и в названных плоскостях удавалось подбирать без каких-либо дополнительных условий по сравнению с методикой подбора углов раствора скачка в других плоскостях  $\varphi = \text{const}$  при умеренных требованиях к точности удовлетворения граничных условий на заданном теле.

Однако в целом пробные расчеты показали, что при расчете обтекания конусов, отличных от круглых (например, эллиптических), и при этой схеме расчета возникают дополнительные трудности, которые выражаются в том, что достигаемая при расчете точность удовлетворения граничного условия на теле при этом существенно падает. Так, расчеты обтекания круглых и эллиптических конусов по одной и той же расчетной схеме с использованием простейшей методики интегрирования системы уравнений (1.1) позволили удовлетворить граничные условия на круглом конусе с точностью до  $|\Delta v_n| = 0,001$ , а на эллиптическом — лишь с точностью до  $|\Delta v_n| \approx 0,01$ . Очевидно, это объясняется влиянием дополнительной особенности, а также более сложными граничными условиями на эллиптическом конусе (в случае круглого конуса условие (1.3) имеет вид:  $v_n = v^\circ = 0$ ), усложняющими подбор углов раствора скачка.

Поступило 17 III 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С я г а е в В. Ф. Метод численного решения задачи об обтекании конических тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. П а н о в Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат, 1951.
3. A. F e r r i. Preprint of paper to read of the First International Congress in the Aeronautical Sciences. Madrid, Spain, 1958, 13. Sept.

### АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

М. Д. ЛАДЫЖЕНСКИЙ, А. В. ЛИПИН

(Москва)

Для определения оптимальных форм крыльев в вязком гиперзвуковом потоке проведены экспериментальные исследования аэродинамических характеристик прямоугольных пластин одинаковой площади  $s$ , различных значений удлинения  $\lambda$  и толщины  $d$  при числе Маха невозмущенного потока  $M = 5,15$ , числе Рейнольдса  $R \approx 2 \cdot 10^2$  и углах атаки  $\alpha$ , изменяющихся от 0 до  $40^\circ$ . Удлинение  $\lambda$  пластины изменялось в диапазоне 0,1—9, а их относительная толщина  $\delta = d / \sqrt{s}$  — в диапазоне 0,025—0,16.

Установлено, что при фиксированных значениях площади и толщины прямоугольной пластины зависимость ее максимального аэродинамического качества  $K_m(\lambda)$  в исследованном диапазоне углов атаки имеет максимум в области значений  $\lambda = 0,4—0,8$ .

§ 1. Рассмотрим обтекание тонких прямоугольных крыльев фиксированной площади и различных удлинений, считая, что температура поверхности крыла много меньше температуры торможения в набегающем потоке, что характерно для гиперзвуковых полетов в атмосфере. Всегда найдутся такие значения удлинения крыла  $\lambda \ll 1$  и  $\lambda \gg 1$ , при которых реализуется свободномолекулярный режим обтекания крыла. Принимая отражение молекул от поверхности тела полностью диффузным, получим, что в рассматриваемых предельных случаях  $\lambda \ll 1$  и  $\lambda \gg 1$  при  $M \rightarrow \infty$  значение  $K_m$  сколь угодно мало.

Если характерная площадь крыла  $s$  такова, что число Кнудсена  $K = L / \sqrt{s} \ll 1$  ( $L$  — средняя длина свободного пробега молекул в невозмущенном потоке), то при удлинениях порядка единицы обтекание крыла будет подчиняться законам сплошной среды. В этом случае, как известно,  $K_m \neq 0$ . Таким образом, в вязком гиперзвуковом потоке можно ожидать наличия максимума значения  $K_m$  при изменении удлинения крыла от значений  $\lambda \ll 1$  до  $\lambda \gg 1$ , в то время как в области больших чисел Рейнольдса  $K_m$  растет с увеличением  $\lambda$ . Границы, при которых имеет место обтекание, близкое к свободномолекулярному, сближаются по мере увеличения  $K$ .