16. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1959, № 1.
17. Черный Г. Г. Обтекание тел газом при большой сверхзвуковой скорости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 6.
18. Чушкин П. И., Щенников В. В. Расчет некоторых конических течений без осевой симметрии. Инж.- физ. ж., 1959, № 7.
19. Cheng H. K. Hypersonic flows past a yawed circular cone and other pointed bodies. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 2.
20. Мхитарян А. М., Овсянников М. П. К определению линеаризованных потоков возмущений при гиперзвуковом обтекании неосесимметричных конических тел. Изв. высш. учебн. завед., Авиационная техника, 1965, № 1.
21. Willi F., Jacobs A. Simplified Approximate Method for the colculation of the Pressure around conical bodies of arbitrary shape in supersonic and hypersonic flow. J. Aerospase Sci., 1961, vol. 38, No. 12.

ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ

Я. Г. САПУНКОВ

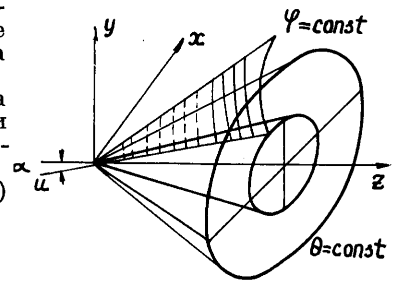
(Саратов)

В работах [1,2] А. Л. Гонор рассматривал задачу об обтекании конических тел потоком несовершенного невязкого газа с большой сверхзвуковой скоростью. Для решения применялся метод разложения по малому параметру. В качестве малого параметра использовалось отношение плотностей в невозмущенном потоке и за ударной волной. Однако в окрестности поверхности конуса это решение не дает возможности определить поле скоростей.

В настоящей работе эта задача решается методом, изложенным в [3], основанным на использовании метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го (ПЛГ). Получено нулевое приближение, годное во всей области течения, включая и «вихревой слой». Вне этого слоя решение переходит в решение А. Л. Гонора [1,2].

1. Рассмотрим обтекание произвольного конического тела гиперзвуковым потоком произвольного равновесного невязкого газа.

Выберем ортогональную систему координат [1,2], в которой: а) первое координатное семейство есть сферы (r = const), б) поверхность тела совпадает с одной из координатных поверхностей второго семейства (θ = const), в) третье семейство образуют конические поверхности, натянутые на ортогональные траектории к поверхностям второго семейства (φ = const) (фигура).



Обозначим через u, v, w проекции вектора скорости на оси θ, φ, через p, ρ — давление и плотность, $h(p, \rho)$ — энтальпия, $S(p, \rho)$ — энтропия.

Введем вспомогательную функцию $\psi(\theta, \varphi)$

$$\frac{v}{A_1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{w}{A_2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0$$

Здесь A_1 и A_2 — коэффициенты Ляме, вычисленные на поверхности единичной сферы.

Если в качестве независимых переменных выбрать φ и ψ, то уравнения количества движения, неразрывности, энергии примут вид [1,2]

$$\frac{w}{A_2}\frac{\partial u}{\partial\varphi} - v^2 - w^2 = 0, \quad \frac{w}{A_2}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + uv + \frac{vw}{A_2}\frac{\partial \ln A_1}{\partial\varphi} - \frac{w^2}{A_1}\frac{\partial \ln A_2}{\partial\theta} = -\frac{1}{\rho A_1\theta_\psi}\frac{\partial p}{\partial\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[h + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right] = 0, \qquad \frac{\partial S(p,\rho)}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(\rho A_1\theta_\psi w)}{\partial\varphi} + 2\frac{u}{w}A_2 = 0, \qquad \frac{w}{A_2}\theta_\varphi = \frac{v}{A_1}$$

Решение уравнений ищется при следующих граничных условиях: на поверхности конуса $v = 0$ при $\theta = \theta_k$ = const, на поверхности ударной волны $\theta = \theta^+(\varphi)$ выполняются соотношения

$$\rho^\circ u^\circ_n = \rho^+ u_n^+, \quad u_{\tau_1}{}^\circ = u_{\tau_1}{}^+, \quad u_{\tau_2}{}^\circ = u_{\tau_2}{}^+$$

$$p^+ = p^\circ + \rho^\circ [1 - \rho^\circ (\rho^+)^{-1}] u_n^{02}, \quad h(p^+, \rho^+) = h(p^\circ, \rho^\circ) + {}^1/_2 [1 - \rho^{02} (\rho^+)^{-2}] u_n^{02}$$

Верхний индекс ° относится к параметрам потока перед волной, а индекс плюс — за волной.

А. Л. Гонором [1,2] получено нулевое приближение методом разложения в степенные ряды по малому параметру, равному отношению плотностей в невозмущенном потоке и за ударной волной. Однако вблизи поверхности конуса этот метод не проходит. Ниже для решения задачи предлагается способ, аналогичный [3].

Решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2), & v &= \varepsilon v_0 + \varepsilon^2 v_1 + O(\varepsilon^2) \\ w &= w_0 + \varepsilon w_1 + O(\varepsilon^2), & p &= p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2) \\ \rho &= \varepsilon^{-1} [\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + O(\varepsilon^2)], & \theta &= \theta_k + \varepsilon \theta_0 + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $u_i, v_i, w_i, p_i, \rho_i, \theta_i$ имеют порядок $O(1)$ и являются функциями φ, ψ и параметра ε. Параметр ε — постоянная величина, имеющая порядок отношения плотности однородного потока к плотности за ударной волной.

2. Так как порядок $v \sim O(\varepsilon)$, то из первого уравнения (1.1) следует, что

$$A_2^{-1} \partial u / \partial \varphi = w + O(\varepsilon^2)$$

Введем новую переменную

$$z = \int_{\varphi^+}^{\varphi} A_2 d\varphi$$

где φ^+ — значение φ на линии пересечения поверхности тока $\psi = \mathrm{const}$ с ударной волной. Тогда из третьего уравнения системы (1.1) имеем

$$u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 2h_\infty + u_\infty{}^2 - 2h^+ - 2\int_0^z \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz + O(\varepsilon^2) \tag{2.1}$$

Функцию $h(p^+, \rho^+)$ разложим в ряд по ε

$$h(p^+, \rho^+) = h(p_0{}^+, \rho_0{}^+) + \varepsilon h_1{}^+(\psi) + O(\varepsilon^2)$$

Введем обозначения

$$2h_\infty + u_\infty{}^2 - 2h(p_0{}^+, \rho_0{}^+) = \Delta_0{}^2(\psi), \quad -\int_0^z \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} dz - h_1{}^+(\psi) = \Delta_0(\psi) f(z, \psi)$$

Тогда уравнение (2.1) с точностью до $O(\varepsilon)$ включительно примет вид

$$u^2 + (\partial u / \partial z)^2 = \Delta_0{}^2(\psi) + \varepsilon 2 \Delta_0(\psi) f(z, \psi) \tag{2.2}$$

Переменная ψ рассматривается как параметр. Это уравнение имеет в качестве одного из решений

$$x = \Delta_0(\psi) + \varepsilon f(z, \psi) + O(\varepsilon^2)$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее нашим граничным условиям, будем искать его в виде $u = x \sin y(z, \psi)$. Тогда для y получим уравнение

$$y'^2 + 2\varepsilon f_z{}'(z, \psi) \operatorname{tg} y \Delta_0^{-1}(\psi) y' = 1$$

Штрих означает производную по z. Это уравнение решаем методом ПЛГ, полагая

$$y = y_0(\zeta) + \varepsilon y_1(\zeta) + \ldots, \quad z = \zeta + \varepsilon z_1(\zeta) + \ldots$$

Решением будет

$$y = \zeta + \alpha(\psi) \qquad \left(\alpha(\psi) = \operatorname{arc\,tg} \frac{u_0{}^+}{w_0{}^+}\right)$$

$$z = \zeta + \varepsilon \left(\int_0^\zeta \frac{f_\zeta{}'}{\Delta_0(\psi)} \operatorname{tg}[\zeta + \alpha(\psi)] d\zeta + C_1\right) + \ldots \tag{2.3}$$

Здесь C_1 определяется из граничного условия для u_1. Таким путем будем иметь

$$u_0 = \Delta_0(\psi)\sin[\zeta+\alpha(\psi)], \quad u_1 = f(z,\psi)\sin[\zeta+\alpha(\psi)]$$

$$w_0 = \Delta_0(\psi)\cos[\zeta+\alpha(\psi)]\,\partial\zeta/\partial z \tag{2.4}$$

$$w_1 = f_z'(z,\psi)\sin[\zeta+\alpha(\psi)] + f(z,\psi)\cos[\zeta+\alpha(\psi)]\,\partial\zeta/\partial z$$

Из формул (2.3) и (2.4) видно, что нулевое приближение вне вихревого слоя переходит в нулевое приближение А. Л. Гонора.

3. Вместо θ введем величину $\vartheta = (\theta-\theta_k)\,\varepsilon^{-1}$. Из пятого уравнения системы (1.1) имеем

$$\vartheta = \int\limits_{\psi_0}^{\psi} \frac{A_1{}^+\rho^+w^+\vartheta_\psi{}^+}{A_1\rho w}\exp\left(-2\int\limits_{\varphi+}^{\varphi}\frac{uA_2}{w}\,d\varphi\right)d\psi \tag{3.1}$$

Здесь ψ_0 — поверхность конуса. Отсюда легко получить, что w имеет порядок $O(\varepsilon)$, если ϑ будет порядка $O(\varepsilon^2)$. Это согласуется с результатами, полученными для обтекания круглого конуса под малым углом атаки. Но тогда значение для θ_0, полученное А. Л. Гонором, как и в случае круглого конуса [3], верно с точностью до $O(\varepsilon)$ всюду, так как w_0, u_0 переходят вне окрестности поверхности конуса в решение А. Л. Гонора [1,2]. Из второго уравнения видно, что p_0, определенное в [1,2], верно всюду, включая и «вихревой слой».

Если в (3.1) вместо w подставить $w_0+\varepsilon w_1$, а вместо остальных величин — нулевое приближение, то полученная формула будет определять линии тока и в нулевом приближении всюду, включая и вихревой слой.

4. Можно определить поведение линий тока вблизи поверхности конуса. Из уравнения неразрывности следует, что при

$$\vartheta = O(\varepsilon^2), \qquad v_0 = -2u_0(\psi,\varphi)A_1\vartheta + O(\varepsilon,\vartheta) \qquad (u_0(\psi,\varphi) = \Delta_0(\psi)+O(\varepsilon))$$

При $\zeta+\alpha(\psi) = {}^1/_2\pi - o(\varepsilon)$ имеем

$$w = -\frac{\varepsilon}{\rho_0A_2\Delta_0(\psi)}\frac{\partial p_0(\theta_k,\psi)}{\partial\varphi} + o(\varepsilon)$$

Тогда линии тока вблизи поверхности конуса в переменных ϑ, φ имеют вид

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)^{\varepsilon}\exp\left(2\Delta_0(\psi)A_2\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi}\frac{d\varphi}{w_1}\right) = 1$$

где ϑ_1 и φ_1 — точка, принадлежащая линии тока $\psi = \mathrm{const}$ и находящаяся в слое $\vartheta = O(\varepsilon^2)$.

Таким образом, построено нулевое приближение, годное всюду между поверхностью ударной волны и поверхностью конуса, включая и «вихревой слой».

В работе [7] решается задача также методом ПЛГ, но авторы использовали другие переменные, что не позволило им получить единого решения вплоть до границы тела. Это решение найдено в настоящей статье.

Пользуясь случаем, заметим, что в статье автора [3] имеются опечатки: в п. 9 — в знаменателе выражения для n_1 вместо 52 надо читать 2, в п. 12 — в знаменателе выражения для $X_1(z,\psi)$ вместо суммы надо читать произведение: $2\rho_0{}^+X_0(\psi)$, в п. 14 — в выражении для w_+ упущен множитель p_0^+/ρ_0^+.

Автор благодарит Б. М. Булаха за обсуждение работы.

Поступило 6 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
2. Гонор А. Л. Несимметричные конические течения газа за сильной ударной волной. Сб. научн. тр. Всесоюзн. заочн. машиностроительного ин-та, 1961, вып. 3.
3. Сапунков Я. Г. Круговой конус под углом атаки в гиперзвуковом потоке газа. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Melnik R. E., Sheuing R. A. Shock layer structure and entropy layers in hypersonic conical flows. Progr. Astronaut. and Rocketry, vow York-London. Acad. Press, 1962, vol. 7, p. 379—420.