ОБТЕКАНИЕ ПРОНИЦАЕМОГО КОНУСА ПОД УГЛОМ АТАКИ

Е. М. КАЛИНИН *(Москва)*

1. Рассмотрим тонкий конус, поверхность которого равномерно проницаема, движущийся со сверхзвуковой скоростью при некотором угле атаки. Под коэффициентом проницаемости σ понимается доля свободных участков в единице площади поверхности. Сделаем следующие предположения:

1) Угол атаки α мал.

2) Давление внутри конуса p_1 постоянное, причем $p_1 < p_{2\,\min}$, здесь $p_{2\,\min}$ — минимальное давление на поверхности непроницаемого конуса при том же режиме обтекания. В силу предположения (1) уравнение для потенциала возмущений в цилиндрической системе координат x, r, θ (ось x направлена по оси конуса) имеет вид:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (1.1)$$

На поверхности конуса (соответствующие параметры обозначены индексом 2) перепад давления связан со скоростью протекания условием [2]:

$$p_2 - p_1 = \zeta\rho_2 V_{2n} V_\infty \qquad (1.2)$$

Здесь ζ — коэффициент, зависящий от σ, а

$$V_{2n} = \left(V_\infty + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\cos(nx) + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\cos(nr) + \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\cos(n\theta)$$

В соответствии с линейной теорией

$$p_2 = p_\infty + \triangle p = p_\infty - \rho_\infty V_\infty \frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$p_\infty - p_1 - \rho_\infty V_\infty \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \zeta\rho_\infty V_\infty\left[\vartheta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + V_\infty\right) - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right]$$

$$\left(a\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=x\vartheta} = b \qquad \left(a = -\frac{1}{\zeta},\ b = V_\infty\vartheta - \frac{p_\infty - p_1}{\zeta\rho_\infty V_\infty}\right) \qquad (1.3)$$

Здесь 2ϑ — угол раствора конуса.

2. Ход решения сформулированной выше задачи принципиально не отличается от рассмотренной ранее ([1]) задачи обтекания непроницаемого конуса. Поэтому, опуская подробные выкладки, отметим основные моменты решения.

Потенциал Φ представим в виде суммы трех членов [1]:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 \qquad \begin{array}{l} \Phi_1 = V_\infty\alpha r\cos\theta, \qquad \Phi_2 = \displaystyle\int_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}}\,d\xi \\ \Phi_3 = -\dfrac{\cos\theta}{r}\displaystyle\int_0^{x-kr} c_2(\xi)\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}}\,d\xi \end{array} \qquad (k^2 = M_\infty^2 - 1)$$

Здесь Φ_1 — потенциал плоско-параллельного потока, движущегося со скоростью $-V_\infty\sin\alpha$ параллельно плоскости, проходящей через направление V_∞ и ось конуса; Φ_2 — потенциал осесимметричного обтекания конуса, не зависящий от θ; Φ_3 — потенциал, который учитывает неосесимметричность обтекания. Таким образом,

$$\Phi = V_\infty\alpha r\cos\theta + \int_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}} - \frac{\cos\theta}{r}\int_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}} \qquad (2.1)$$

Неизвестные функции $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ находятся из граничного условия (1.3)

$$\left\{a\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}}\right) + \right.$$

$$\left. + V_\infty\alpha\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\int_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\int_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 - k^2r^2}}\right\}_{r=x\vartheta} = b$$

Выделяя члены, содержащие θ, имеем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{x-kr}\frac{ac_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}+\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}\right\}_{r=x\vartheta}=b$$

$$V_\infty\alpha-\left\{\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\int\limits_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}\right\}_{r=x\vartheta}=0$$

Выполняя дифференцирование, получим для определения $c_1(\xi)$ и $c_2(\xi)$ следующие интегральные уравнения:

$$\left\{\int\limits_0^{x-kr}\frac{dc_1}{d\xi}\frac{a\vartheta x-(x-\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}\,d\xi\right\}_{r=x\vartheta}=b\vartheta x \tag{2.2}$$

$$\left\{\int\limits_0^{x-kr}\frac{dc_2}{d\xi}\frac{a\vartheta x(x-\xi)-(x-\xi)^2}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}\,d\xi\right\}_{r=x\vartheta}=V_\infty\alpha\vartheta^2x^2 \tag{2.3}$$

Легко видеть, что решением каждого из уравнений (2.2) и (2.3) будет константа. Полагая $dc_1/d\xi=K_1$, $dc_2/d\xi=K_2$, находим, что

$$K_1=\frac{1}{k}\,\frac{b}{ak^{-1}\operatorname{arch}\varphi-\sqrt{\varphi^2-1}},\qquad K_2=-\frac{1}{k^2}\,\frac{2V_\infty\alpha}{(\varphi-2ak^{-1})\sqrt{\varphi^2-1}+\operatorname{arch}\varphi}$$

$$\left(\varphi=\frac{1}{k\vartheta}\right) \tag{2.4}$$

Определим аэродинамические силы, действующие на конус. Из уравнения Бернулли

$$V_\infty\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\Delta p}{\rho_\infty}=0$$

находим

$$\Delta p=-\rho_\infty V_\infty\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3)=-\rho_\infty V_\infty\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_2+\Phi_3)$$

Используя полученное решение (2.1) имеем:

$$\Delta p=-\rho_\infty V_\infty\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{x-kr}\frac{c_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^{x-kr}\frac{c_2(\xi)(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}}\right\}=$$

$$=-\rho_\infty V_\infty(K_1\operatorname{arch}\varphi-K_2k\sqrt{\varphi^2-1}\cos\theta)$$

Отсюда

$$\Delta p=\Delta p_1+\Delta p_2\cos\theta,\quad \Delta p_1=-\rho_\infty V_\infty K_1\operatorname{arch}\varphi,\quad \Delta p_2=\rho_\infty V_\infty K_2k\sqrt{\varphi^2-1}$$

Для нормальной силы, действующей на конус, получим:

$$Y=2\int\limits_0^l\int\limits_0^\pi(\Delta p_1+\Delta p_2\cos\theta)\,x\vartheta\cos\theta\,d\theta\,dx=\frac{\pi}{2}\vartheta l^2\Delta p_2$$

Безразмерный коэффициент подъемной силы в случае проницаемого конуса оказывается равным

$$C_y^0=\frac{Y}{{}^1/_2\,\rho_\infty V_\infty^2\pi l^2\vartheta^2}=-\frac{2\alpha\varphi\sqrt{\varphi^2-1}}{(\varphi-2ak^{-1})\sqrt{\varphi^2-1}+\operatorname{arch}\varphi}$$

Для лобового сопротивления конуса имеем:

$$X=2\int\limits_0^l\int\limits_0^\pi(\Delta p_1+\Delta p_2\cos\theta)\,\vartheta^2x\,d\theta\,dx=\pi l^2\vartheta^2\,\Delta p_1$$

$$C_x^0=\frac{X}{{}^1/_2\,\rho_\infty V_\infty^2\pi l^2\vartheta^2}=\frac{2}{kV_\infty}\,\frac{b\operatorname{arch}\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}\,ak^{-1}\operatorname{arch}\varphi}$$

Подставляя вместо a и b выражения (1.3), получим:

$$C_y{}^0 = -\frac{2\alpha\varphi\sqrt{\varphi^2-1}}{(\varphi+2/k\zeta)\sqrt{\varphi^2-1}+\operatorname{arch}\varphi} \tag{2.5}$$

$$C_x{}^0 = \frac{2(\vartheta-\zeta^{-1}P)\operatorname{arch}\varphi}{k\sqrt{\varphi^2-1}+\zeta^{-1}\operatorname{arch}\varphi}\left(P=\frac{p_\infty-p_1}{\rho_\infty V_\infty{}^2}\right) \tag{2.6}$$

Для аэродинамического момента относительно вершины конуса имеем:

$$M = 2\int\limits_0^l\int\limits_0^\pi(\triangle p_1+\triangle p_2\cos\theta)\,\vartheta x^2\cos\theta\,d\theta\,dx = \frac{\pi}{3}l^3\vartheta\triangle p_2$$

$$C^0{}_m = \frac{M}{{}^1/_2\rho_\infty V_\infty{}^2\pi\vartheta^2 l^3} = -\frac{4}{3}\,\frac{\varphi\sqrt{\varphi^2-1}\;\alpha}{(\varphi+2/k\zeta)\sqrt{\varphi^2-1}+\operatorname{arch}\varphi}$$

Легко видеть, что случаю обтекания непроницаемого конуса [1] отвечает значение $\zeta\to\infty$.

Поступило 14 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, 1948, т. II.
2. Рахматулин Х. А. Обтекание проницаемого тела. Вестн. Моск. ун-та, 1950, № 3.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КОНУСОВ

А. И. ШВЕЦ *(Москва)*

Приводится описание экспериментальных исследований пространственного обтекания эллиптических конусов. Результаты экспериментов сравниваются с теоретическими расчетами и данными других авторов.

Эллиптический конус занимает промежуточное положение между круглым конусом и треугольной пластинкой и может служить образцом при сравнении обтекания тел, не имеющих осевой симметрии. За последние годы опубликовано значительное количество теоретических (С. Маслен, Р. Вальо-Лаурин, Р. Джонс, Ф. Мур, Д. Харлей и др.) и экспериментальных (А. Ферри, У. Рэге, В. Г. Табачников, Эггерс и Аллен и др.) работ, посвященных обтеканию конических неосесимметричных тел.

Испытания проводились в аэродинамической трубе кратковременного действия при числах Маха $M = 0.58$, 0,97, 1.19, 1.47 и 3.0. Во время проведения испытаний измерялись величины распределения давления по поверхности моделей и величины, характеризующие параметры потока в рабочей части. Числа Рейнольдса, отнесенные к 0.1 *м* и рассчитанные по параметрам набегающего потока, изменялись от $1.2\cdot10^6$ при $M = 0.58$ до $3.0\cdot10^6$ при числе $M = 3.0$. Испытания проводились в диапазоне углов атаки $\alpha = 0 \div 15°$ при углах крена $\varphi = 0$ и 45°, а также при углах скольжения $\beta = 0, 5, 10$ и 15°.

Для выполнения экспериментов были изготовлены из стали шесть моделей эллиптических конусов. В качестве характерных параметров эллиптических конусов были выбраны следующие величины: отношение полуосей эллипса $t = b\,/\,a$ и величина полуугла при вершине конуса в плоскости большой оси ε (фиг. 1). Модели *1, 2, 3, 4* имели постоянную величину полуугла $\varepsilon = 30°$, но разные отношения полуосей: $t = 0.66$, 0.5, 0.33, 0.2. В моделях *2,5,6* отношение полуосей сохранялось постоянным $t = 0.5$, а полуугол имел значения $\varepsilon = 30°$, 22°30′ и 15°. Для всех моделей большая ось эллипса в основании конуса была равна 70 *мм*. На каждом конусе было изготовлено 21 дренажное отверстие диаметром 0.5 *мм*. Дренажные точки размещались на восьми образующих конуса, расположенных так, чтобы распределение давления около плоскости большой оси могло быть измерено, по возможности, наиболее точно. Кроме того, для проверки коничности потока дренажные точки размещались на образующих в трех сечениях по длине конуса l (0.58 l, 0,74 l, 0,9 l).

Экспериментальные значения коэффициента давления c_p для всех испытанных моделей при $M = 3.0$ представлены на фиг. 1. На нулевом угле атаки возникает повышенное давление в районе образующих, лежащих около плоскости большой оси эллиптических сечений конуса ($\psi = 90°$). По мере уменьшения толщины конуса и угла ε происходит снижение давления на боковой поверхности моделей. На фиг. 1