ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ОКРУЖНОСТИ НА ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ

(К ВОПРОСУ О ТЕЧЕНИЯХ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТАХ)

О. В. ГОЛУБЕВА

(Москва)

1. При фильтрации упругой жидкости или газа силы тяжести, как правило, не играют роли [1]. Установившиеся ламинарные движения таких жидкостей описываются законом Дарси

$$v = \frac{k}{\mu}\operatorname{grad} P \tag{1.1}$$

и уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \rho v = 0 \tag{1.2}$$

где k — коэффициент проницаемости, μ — коэффициент вязкости, P — давление. Если жидкость баротропна, то P, k, μ в общем случае будут функциями давления. Введем потенциал массовой скорости [1]

$$\varphi = \int \frac{k\rho}{\mu} dP \tag{1.3}$$

относительно которого (1.2) обращается в уравнение Лапласа.

Если течение двумерное, то имеет место функция тока ψ, и компоненты массовой скорости определяются в виде

$$\rho v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \rho v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.4}$$

2. Предположим, что k терпит разрыв на поверхности L, по одну сторону которой $k = k_1$ (и $\varphi = \varphi_1$) и по другую $k = k_2$ (и $\varphi = \varphi_2$). Пусть $k_2 / k_1 = \alpha = \mathrm{const}$. На границе L должно быть непрерывно давление и плотность, следовательно, из (1.3) имеем

$$[\alpha\varphi_1]_L = [\varphi_2]_L \tag{2.1}$$

также непрерывны на границе L должны быть массовые расходы или на основании (1.4) имеем

$$\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right]_L = \left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right]_L \tag{2.2}$$

В случае плоских течений условия на границе L, которым должны удовлетворять функции тока ψ, можно получить из (1.4), (2.1) и (2.2) в виде

$$\left[\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right]_L = \left[\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\right]_L, \qquad \psi_1 = \psi_2 \tag{2.3}$$

3. Пусть на основании (1.4) фильтрация в безграничном пласте с проницаемостью k_1 определяется комплексным потенциалом $w = f(z)$, причем особые точки $f(z)$ располагаются только вне (или только внутри) окружности $|z| = a$. Заполним далее внутренность (или внешность) этой окружности грунтом проницаемости k_2, тогда искаженное течение вне (или внутри) окружности, описываемое w_1, и течение внутри (или вне) окружности, описываемое w_2, имеют вид

$$w_1 = f(z) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\bar f\left(\frac{a}{z}\right) = f(z) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\overline{f\left(\frac{a^2}{\bar z}\right)}, \quad w_2 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} f(z) \tag{3.1}$$

Решение (1.3) сформулированной задачи представляет собой обобщение на фильтрационные течения теоремы об окружности [2]. Теорема об окружности вытекает из (3.1) как частный случай при $k_2 = 0$ или $\alpha = 0$.

Доказательство справедливости формул (3.1) осуществляется путем проверки выполнения условий (2.1) и (2.2) (или (2.3, 2.4)). Именно

$$[\varphi_1]_{r=a} = \left[\varphi(r, \theta) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\varphi\left(\frac{a^2}{r}\theta\right)\right]_{r=a} = \frac{2}{1+\alpha}\varphi(a, \theta)$$

$$[\varphi_2]_{r=a} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\varphi(a, \theta)$$

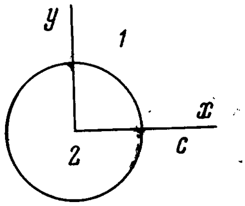
$$\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right]_{r=a} = \left[\frac{\partial\varphi(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial\varphi(u, \theta)}{\partial u}\right]_{r=a} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\partial\varphi(a, \theta)}{\partial a}, \quad u = \frac{a^2}{r}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right]_{r=a} = \frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\partial\varphi(a, \theta)}{\partial a}$$

Из последних равенств очевидно, что (3.1) удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2).

4. Если окружность, являющаяся границей изменения проницаемости, вырождается в прямую, вдоль которой направим ось x, то (3.1) заменяются формулами вида

$$w_1 = f(z) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\overline{f(\bar{z})}, \qquad w_2 = \frac{2\alpha}{1+\alpha}f(z) \tag{4.1}$$



Фиг. 1

Выполнение граничных условий (2.1) и (2.2) при $y = 0$ проверяются аналогично тому, как это выполнено для равенств (3.1).

5. Теореме (3.1) можно дать геометрическую интерпретацию, что иногда полезно в приложениях. Как известно, $f(z)$ определяется своими особыми точками. Если они лежат в области 1 (или 2) (фиг. 1), то для построения течения в этой области следует внести дополнительные особые точки в области 2 (или 1), расположение и характер которых соответствуют преобразованию инверсии (изображению относительно окружности особых точек $f(z)$) и множитель дополнительных точек изменен в $1 - \alpha / 1 + \alpha$ раз. Течение в области *2* (или *1*) определяется особыми точками $f(z)$, множитель которых изменен в $2\alpha / (1 + \alpha)$ раз.

Подобным же образом можно геометрически интерпретировать (4.1), где внесение дополнительных особых точек будет соответствовать зеркальному изображению относительно оси x особых точек $f(z)$.

6. Так как (3.1) и (4.1) справедливы для расположения особых точек $f(z)$ вне и внутри окружности и прямой, то эти теоремы позволяют построить течения для $f(z)$, особые точки которой расположены произвольным образом.

7. Конформные отображения позволяют перевести внутреннюю и внешние области, границей которых служит окружность или полуплоскости, разделяемые осью x, во внешнюю и внутреннюю области, границей которых служат кривые достаточно широкого класса. Поэтому при помощи формул (3.1) или (4.1), используя конформное отображение, можно принципиально получить произвольные течения в плоских слоях с произвольной границей изменения проницаемости грунта от k_1 до k_2. Следует заметить, что так как при конформных отображениях, как правило, вся плоскость преобразуется в часть плоскости или в многолистую поверхность, то в конкретных задачах приходится отображать внешнюю область окружности и ее внутреннюю область на внешние и внутреннюю области, разделяемые заданной кривой, т. е. дважды применять конформное отображение. Сказанное также относится к полуплоскостям.

8. Тривиальным частным случаем формул (3.1) является классическая формула обтекания несжимаемым поступательным потоком круглого цилиндра, что соответствует $f(z) = v_0 z$, $k_2 = 0$ и ρ, k, μ постоянным. При $f(z) = v_0 z$ и $k_1 = \infty$ из (3.1) получим обтекание поступательным потоком каверны. В литературе можно указать ряд частных случаев (3.1) и (4.1), которые получены тем или иным путем. Например, обтекание поступательным несжимаемым потоком полупроницаемого цилиндра, полученное методом разложения по малому параметру искомого решения [1]; течение несжи-

[1] Кочина Н. Н. Некоторые вопросы неустановившихся течений в пористой среде. Дис., 1953.

маемой жидкости, вызванное источником при прямолинейной границе изменения проницаемости, полученное методом изображения особенностей [3], течение несжимаемой жидкости, вызванное стоками, расположенными вне и внутри круглого цилиндра, проницаемость которого отлична от окружающей, полученное методом распределения вдоль границ z особых точек [4] и т. д.

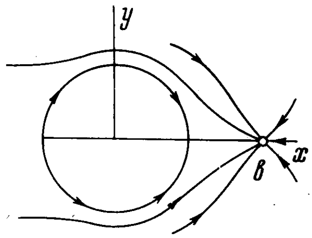
В качестве примера применения формул (3.1) рассмотрим фильтрацию газа, которая возникает в результате работы совершенной эксплуатационной скважины, расположенной в точке $z = b$ в безграничном пласте проницаемости $k = k_1$. У этого пласта внутри $|z| = a < b$ проницаемость $k = k_2$ (фиг. 1). Так как скважина имитируется стоком, то

$$f(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln(z-b) \tag{8.1}$$

и из (3.1) имеем

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = -\frac{Q}{2\pi}\left\{\ln(z-b) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ln\left(\frac{a^2}{z} - b\right)\right\}' \tag{8.2}$$

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = -\frac{Q}{2\pi}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln(z-b)] \tag{8.3}$$



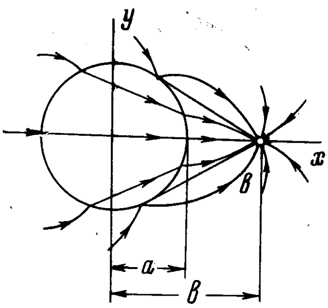
Фиг. 2

Так как (8.1) имеет особые точки, сток при $z = b$ и источник при $z = \infty$, то используя геометрический метод построения течений, указанный в п.5, w_1 можно записать в виде:

$$w_1 = -\frac{Q}{2\pi}\left\{\ln(z-b) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ln\frac{z - a^2/b}{z}\right\} \tag{8.4}$$

Нетрудно убедиться, что (8.2) и (8.4) отличаются на постоянную, что несущественно, ибо комплексные потенциалы определяются с точностью до const.

При $k_2 = 0$ или $\alpha = 0$ выражения (8.2) или (8.4) определяют обтекание стоком непроницаемого цилиндра (фиг. 2), при $k_2 = \infty$ или $\alpha = \infty$ формула (8.2) определяет обтекание каверны (фиг. 3), причем критические точки течения лежат на $|z| = a$ и определяются углом $\alpha = \arcsin a / b$, как было показано аспиранткой Бариновой.



Фиг. 3

Если $k_2 < k_1$, то включение раздвигает линии тока, и при $k_2 > k_1$ включение втягивает линии тока.

Предположим далее, что скважина расположена внутри окружности $|z| = a$ $(b < a)$ и k_1 — проницаемость внутренней области окружности, а k_2 внешней. Формулы (3.1) в этом случае непосредственно неприменимы, ибо $f(z)$, определяемая (8.1), имеет особые точки внутри окружности $(z = b)$ и вне ее $(z = \infty)$. Используя геометрическую интерпретацию и тот факт, что (3.1) применимы для областей 1 $(k = k_2)$ и 2 $(k = k_1)$ (фиг. 1), искомые течения найдем в виде

$$w_1 = -\frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{2\alpha}{1+\alpha}\ln(z-b) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ln z\right\} \tag{8.5}$$

$$w_2 = -\frac{Q}{2\pi}\left\{\ln(z-b) + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ln\left(z - \frac{a^2}{b}\right)\right\} \tag{8.6}$$

Первый член (8.5) является заданным стоком, напряжение которого изменено в связи с переходом из области с проницаемостью k_1 в область с проницаемостью k_2, и второй член есть изображение относительно окружности источника в бесконечности, ибо w_1 определяет течение вне окружности. Уравнение (8.6) описывает течение внутри окружности, вызванное заданным источником, его изображением относительно окружности и источником в бесконечности, обладающим мощностью $Q\pi^{-1}/1+\alpha$. При $k_2 = \infty$ уравнение (8.6) описывает работу скважины с круговой областью питания [1].

При изотермическом режиме фильтрации газа уравнение состояния имеет вид

$$\rho = \frac{\rho_c}{P_c}P \tag{8.7}$$

Тогда согласно (1.3) при k, μ постоянных имеем

$$\frac{\varphi}{\varphi_c} = \frac{k}{k_c}\frac{P^2}{P_c^2} \tag{8.8}$$

где P_c, ρ_c, k_c, φ_c — значения соответствующих характеристик фильтрующегося газа и грунта в точке C (фиг. 1). При этом поле скоростей в областях с проницаемостью k_1 и k_2 будет

$$\bar{v}_1 = \operatorname{grad} \frac{k_2}{\mu} P_c \left(\frac{k_1}{k_c} \frac{\varphi_1}{\varphi_c}\right)^{1/2}, \quad \bar{v}_2 = \operatorname{grad} \frac{k_2}{\mu} P_c \left(\frac{k_2}{k_c} \frac{\varphi_2}{\varphi_c}\right)^{1/2} \tag{8.9}$$

Если $\varphi = \varphi_0$ на границе скважины радиуса $\delta \ll c$, то дебит скважины Q определяется формулой

$$Q = 2\pi (\varphi_c - \varphi_0) \left(\ln \frac{c-b}{\delta} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \ln \frac{b}{c} \frac{bc-a^2}{b^2-a^2}\right)^{-1} \tag{8.10}$$

Положим $a > 1$ и воспользуемся конформным преобразованием

$$z_1 = z + 1/z \tag{8.11}$$

тогда, заменяя в (8.2) z через z_1, получим картину течения вне элипса с полуосями $a + 1/a$ и $a - a^{-1}$, вызванную стоком, расположенным в грунте $k = k_1$. Внутри эллипса, где $k = k_2$, для получения картины течения следует отобразить внутренность окружности $|z| = a$ на внутренность эллипса z_2 (что определяется довольно громоздкими формулами) и заменить в (8.3) z на z_2.

9. Геометрическую картину построения течений, указанную выше (п. 5), можно использовать для построения пространственных течений в грунтах, изменяющих скачком проницаемость на поверхности сферы и плоскости. Кроме того, можно обобщить (3.1) и (4.1) на случай течений в слоях, проницаемости которых меняются скачком на двух концентрических окружностях и двух прямых, параллельных оси x. Однако при этом обобщении элементарно простые формулы (3.1) и (4.1) значительно усложняются. В последнем можно убедиться на примерах течений, вызванных источником, которые помещены в грунте с постоянной проницаемостью k_1, k_2, $k_3 = \infty$ меняющихся скачком на концентрических окружностях [5], на параллельных прямых [3] и эллипсах [6].

10. Но в частном случае, когда $f(z) = v_0 z$ описывает поступательный поток и $k = k_1$ при $|z| > a$, $k = k_2$ при $b < |z| < a$ и $k = k_3$ при $|z| < b$, комплексные потенциалы течений w_1, w_2, w_3 в областях с постоянной проницаемостью k_1, k_2, k_3 имеют следующий простой вид (как показано аспиранткой Костициной):

$$w_1 = v_0 \left(z + \frac{A_1}{A} \frac{a^2}{z}\right), \quad w_2 = \frac{A_2}{A} \left(z + \frac{1-\beta}{1+\beta} \frac{b^2}{z}\right), \quad w_3 = \frac{A_3}{A} v_0 z$$

$$A = a^2 (1 + \alpha)(1 + \beta) + b^2 (1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$A_1 = a^2 (1 - \alpha)(1 + \beta) + b^2 (1 + \alpha)(1 - \beta)$$

$$A_2 = 2a^2\alpha (1 + \beta), \quad A_3 = 4a^2\alpha\beta$$

$$\alpha = \frac{k_2}{k_1} \quad \beta = \frac{k_3}{k_2}$$

При $b = a$ и $k_2 = k_3$ формулы (10.1) обращаются в (3.1) при $f = v_0 z$. Если $a > b > 1$ и $k_3 = 0$, то ($w_3 = 0$) окружность $|z| = 1$ непроницаема. Используя при этом конформное преобразование (8.11) и заменяя в формулах (10.1) z на z_1, найдем течение, вызванное поступательным потоком вне и внутри эллипса, который служит границей изменения проницаемости от k_1 до k_2.

11. Коэффициент k можно рассматривать как закон изменения толщины слоя [7]. Поэтому приведенные формулы также описывают течение в однородном грунте с прерывно изменяющейся толщиной или одновременно в грунтах с прерывно изменяющимися проницаемостью и толщиной.

Поступило 1 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
2. Мили Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. Изд. «Мир», 1964.
3. Коллинз Р. Течение жидкостей через пористые материалы. Изд. «Мир», 1964.
4. Гусейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. Изд. «Недра», 1965.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
6. Голубев Г. В. Определение поля давлений в кусочно-однородном пласте, состоящем из софокусных эллипсов при наличии контура питания. Уч. зап. КТУ, 1957, т. 17, вып. 2.
7. Голубева О. В. Некоторые задачи ламинарной фильтрации в неоднородных искривленных слоях переменной толщины. Изд-во АН СССР, 1953, т. 27, вып. 4.