

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Ю. А. БУЕВИЧ, Ю. П. ГУПАЛО

(Москва)

Впервые задача о волновом движении слоя жидкости была рассмотрена П. Л. Каницей [1, 2], который дал приближенный анализ свободного течения и течения в прикосновении с потоком газа и оценил влияние процессов теплопередачи на течение. Задача об устойчивости такого течения подробно исследовалась Бруком Бенджаминем [3] и И Цзя-шунем [4, 5]. Эти авторы предложили искать решение получающегося уравнения Орра-Зоммерфельда в виде ряда по малому параметру и разработали соответствующий метод последовательных приближений. В качестве малого параметра в работах [3-5] было использовано произведение волнового числа возмущения на число Рейнольдса. В этих исследованиях касательное напряжение на свободной поверхности принималось равным нулю, а жидкая пленка всегда рассматривалась как существенно плоская. В то же время существует определенный круг задач, представляющих значительный практический интерес, в которых оба эти предположения не выполняются. Хорошим примером может служить задача об устойчивости кольцевого режима двухфазного течения в трубах и капиллярах, когда основной поток одной жидкости отделен от стенок трубы кольцевым слоем иной жидкости. Поверхность раздела имеет в этом случае конечный радиус кривизны, а касательное напряжение на ней может быть существенно отлично от нуля.

В данной работе задача об устойчивости течения слоя жидкости по отношению к малым возмущениям граничной поверхности рассмотрена с учетом как конечного радиуса кривизны граничной поверхности, так и отличного от нуля гидродинамического трения на ней. Жидкая пленка предполагается достаточно тонкой. Это позволяет, во-первых, считать малым число Рейнольдса и использовать общий метод работы [6], а во-вторых, считая толщину пленки достаточной малой по сравнению с радиусом кривизны подложки, на которой эта пленка находится, воспользоваться для суждений об устойчивости ламинарного течения искривленной пленки результатами, полученными для плоской пленки, с учетом членов, зависящих от кривизны подложки.

В предыдущих работах рассматривались, как правило, только одномерные возмущения граничной поверхности. В данной работе в первом приближении устойчивость рассмотрена по отношению к двумерным возмущениям этой поверхности, соответствующим объемным возмущениям течения.

Для примера полученные в работе общие результаты применены к исследованию устойчивости свободного течения слоя жидкости по наклонной плоскости под действием только силы тяжести.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим движение слоя жидкости толщины h_* по наклонной поверхности (фиг. 1). Уравнения Навье-Стокса для невозмущенного движения можно записать в виде

$$\frac{d^2 u_*}{dy_*^2} = -\frac{1}{\mu} (n_* + \rho g \sin \beta), \quad \frac{\partial p_*}{\partial y_*} = \rho g \cos \beta \quad (1.1)$$

Здесь ρ и μ — плотность и вязкость жидкости, а величина n_* равна

$$n_* = -\frac{\partial p_*}{\partial x_*}$$

Граничные условия имеют вид

$$u_*(h_*) = 0, \quad \frac{du_*}{dy_*} = -\frac{\tau_*}{\mu}, \quad y_* = 0$$

Здесь τ_* — касательное напряжение на граничной поверхности слоя $y_* = 0$. Решение (1.1) удобно записать в безразмерной форме

$$u_0(y) = a(1 - y^2) + \tau(1 - y), \quad p_0 = n_1 y - n_2 x \quad (1.2)$$

Здесь введены безразмерные параметры и переменные

$$t = t_* u^\circ / h_*, \quad (x, y, z) = \frac{(x_*, y_*, z_*)}{h_*}, \quad u_0 = \frac{u_*}{u^\circ}, \quad p_0 = \frac{p_*}{\rho (u^\circ)^2}$$

$$\tau = \frac{\tau_* h_*}{\mu u^\circ}, \quad a = \frac{(n_* + \rho g \sin \beta) h_*^2}{2\mu u^\circ}, \quad n_1 = \frac{g h_* \cos \beta}{(u^\circ)^2}, \quad n_2 = n_* / \rho (u^\circ)^2 \quad (1.3)$$

В качестве характерной скорости u° принимают обычно скорость жидкости у граничной поверхности или же среднюю скорость [5]; легко видеть что при определенных значениях параметров n_* , τ_* , β обе эти скорости могут обратиться в нуль. Поэтому во избежание недоразумений будем в дальнейшем подразумевать под u° максимальную скорость жидкости в сечении слоя. Она совпадает со скоростью на поверхности слоя при одинаковых знаках величин a и τ и со скоростью на глубине $y_0 = -\tau / 2a$, если a и τ имеют разные знаки.

Предполагаем далее, что безразмерное давление p' в области $y < 0$ при $y \rightarrow -0$ отлично от $p_0(0)$ на величину Δp . Если Δp обусловлено поверхностным натяжением на граничной поверхности, то

$$\Delta p = p'(0) - p_0(0) = T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad T = \frac{\sigma}{\rho h_* (u^\circ)^2} \quad (1.4)$$

Здесь r_1 и r_2 — главные радиусы кривизны поверхности (безразмерные), а σ — коэффициент поверхностного натяжения. Из (1.4) видно, что положительные значения r_1 и r_2 соответствуют пленке, расположенной на вогнутой поверхности. Заметим, что выражение для Δp может быть записано в виде (1.4) независимо от того, в какой плоскости — (x, y) или (y, z) — искривлена пленка или сразу в обеих.

Уравнения для возмущений имеют вид

$$\Delta u = R \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{du_0}{dy} v + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\Delta v = R \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \right), \quad \Delta w = R \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (1.5)$$

Через R обозначено число Рейнольдса

$$R = h_* u^\circ / \nu, \quad \nu = \mu / \rho$$

Рассмотрим условия, налагаемые на решение системы (1.5). При $y = 1$ имеем

$$u \equiv v \equiv w \equiv 0, \quad y = 1 \quad (1.6)$$

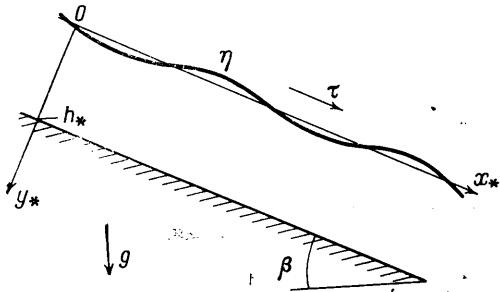
При $y = \eta(t, x, z)$, где $\eta(t, x, z)$ — малое возмущение граничной поверхности, имеем условие непрерывности касательного напряжения

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$y = \eta(t, x, z) \quad (1.7)$$

Запись этих условий в форме (1.7) фактически означает предположение о том, что вязкость среды, находящейся в области $y < 0$, намного меньше вязкости жидкости в слое. В этом случае изменение касательного напряжения τ_* на граничной поверхности можно считать очень малым. Это соответствует, например, движению жидкой пленки в газообразной среде.

Кроме того, на возмущенной поверхности должно выполняться условие непрерывности нормального напряжения. Предполагая для простоты,



Фиг. 1

что невозмущенная поверхность имеет лишь один главный радиус кривизны, используем известную формулу для изменения перепада давления при возмущении поверхности раздела [6]

$$p_{\sigma} = -\sigma \left(\frac{\eta}{r^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right)$$

С учетом (1.4) получаем тогда

$$\frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - p + T \left(\frac{\eta}{r^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) = 0, \quad y = \eta(t, x, z) \quad (1.8)$$

Здесь параметр T определяется соотношением (1.4). Условия (1.7) и (1.8) нужно привести к виду, пригодному при $y = 0$. Учитывая (1.2) и предполагая, что плотность среды в области $y < 0$ намного меньше ρ (т. е. давление при $y < 0$ слабо зависит от y), получаем вместо (1.7) и (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 2a\eta, & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - p &= \eta n_1 - T \left(\frac{\eta}{r^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right), & y &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

На граничной поверхности имеем кинематическое условие

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + (a + \tau) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad y = 0 \quad (1.10)$$

Таким образом, из вышеизложенного явствует, что малая кривизна слоя жидкости учитывается лишь в том случае, если она умножается на параметр T . Поэтому необходимо выполнение условия $T \gg 1$. Из определения (1.4) величины T легко усмотреть, что при неравном нулю коэффициенте σ и достаточно малой h_* (или u^*) это условие всегда выполняется.

§ 2. Условие устойчивости в первом приближении. Будем рассматривать тонкую пленку (такую, что при данных τ , a и т. д. число Рейнольдса $R \ll 1$). Следуя [5], рассмотрим в качестве первого приближения случай $R \approx 0$. Уравнения (1.5) примут в этом случае вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= R \frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= R \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= R \frac{\partial p}{\partial z}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что в уравнениях (2.1) нельзя пренебречь членами с давлением как бы ни было мало R . Действительно, из (1.9) следует, что p имеет порядок u , v или w , деленных на R , так что члены с p и с v в (2.1) имеют при малых R один порядок величины. Кроме того, при $R \nabla p = 0$ система (2.1) становится переопределенной. Предположим, что

$$(u, v, w, \eta) = (\varphi, \psi, \chi, \eta_0) \exp(\alpha t + ikx + ilz)$$

Тогда из (2.1) получаем систему (2.2)

$$\begin{aligned} \varphi'' - (k^2 + l^2)\varphi - ikR\pi &= 0 & \psi'' - (k^2 + l^2)\psi - R\pi' &= 0 \left(\frac{d}{dy} \right) \\ \chi'' - (k^2 + l^2)\chi - ilR\pi &= 0, & ik\varphi + il\chi + \psi' &= 0 \end{aligned}$$

Решение системы (2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \left(U^+ + \frac{ik}{m} P^+ y \right) e^{my} + \left(U^- - \frac{ik}{m} P^- y \right) e^{-my} \\ \psi(y) &= (V^+ + P^+ y) e^{my} + (V^- + P^- y) e^{-my} \\ \chi(y) &= \left(W^+ + \frac{il}{m} P^- y \right) e^{my} + \left(W^- - \frac{il}{m} P^+ y \right) e^{-my} \\ \pi(y) &= \frac{2P^+}{R} e^{my} + \frac{2P^-}{R} e^{-my}, \quad m^2 = k^2 + l^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из уравнения неразрывности для $U^\pm, P^\pm, V^\pm, W^\pm$ имеем два соотношения

$$ikU^+ + ilW^+ + mV^+ + P^+ = 0, \quad ikU^- + ikW^- - mV^- + P^- = 0 \quad (2.4)$$

Из условий (1.6) получаем уравнения

$$\begin{aligned} U^+e^m + U^-e^{-m} + \frac{ik}{m}P^+e^m - \frac{ik}{m}P^-e^{-m} &= 0 \\ V^+e^m + V^-e^{-m} + P^+e^m + P^-e^{-m} &= 0 \\ W^+e^m + W^-e^{-m} + \frac{il}{m}P^+e^m - \frac{il}{m}P^-e^{-m} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Кинематическое условие (1.10) приводит к соотношению

$$\eta = \frac{V^+ + V^-}{\alpha + ik(a + \tau)} = \omega(V^+ + V^-) \quad (2.6)$$

С учетом (2.6) из (1.9) получаем

$$\begin{aligned} ilV^+ + ilV^- + mW^+ - mW^- + \frac{il}{m}P^+ - \frac{il}{m}P^- &= 0 \\ mU^+ - mU^- + (ik - 2a\omega)V^+ + (ik - 2a\omega)V^- + \frac{ik}{m}P^+ - \frac{ik}{m}P^- &= 0 \\ (s\omega - m)V^+ + (s\omega + m)V^- = 0, \quad s = \frac{R}{2} \left[n_1 + T \left(m^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Характеристическое уравнение системы (2.4), (2.5) и (2.7) имеет вид

$$s\omega (sh2m - 2m) + 2iakm\omega + m(ch2m + 1 + 2m^2) = 0 \quad (2.8)$$

Условие устойчивости движения заключается в требовании отрицательности действительной части величины α . Из (2.6) легко видеть, что оно эквивалентно условию отрицательности действительной части ω .

Выражения в скобках (2.8) всегда положительны. Поэтому условие устойчивости имеет вид

$$s \sim n_1 + T \left(m^2 - \frac{1}{r^2} \right) > 0 \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, во-первых, что «поперечные» (соответствующие волновому числу k) и «продольные» (число l) возмущения совершенно одинаково влияют на устойчивость течения пленки; во-вторых, при данном k (или l) наиболее неустойчивым движением оказывается по отношению к возмущениям с $l = 0$ (или $k = 0$), что соответствует известной теореме Сквайра. Из (2.6) и (2.8) имеем

$$\alpha = -sA(m) - ik[(B(m) + 1)a + \tau] \\ A(m) = 2(ch2m + 1 + 2m^2)^{-1}, \quad B(m) = (sh2m - 2m)A(m) / 2m \quad (2.10)$$

Отсюда видно, что коэффициент затухания, помимо параметра s , зависит только от «среднеквадратичного» волнового числа m . Однако, волновое движение возможно лишь для «поперечных» возмущений. При этом скорость распространения волны зависит не только от k , но и от m (или l), т. е. возможна дисперсия синусоидальной «поперечной» волны, отвечающей какому-либо $k = \text{const}$.

При рассмотрении течения жидкости в слое искривленность слоя фактически не учитывалась и движение считалось плоским. Это соответствует пренебрежению величиной $1/r$ по сравнению с единицей в выражении для скорости среднего движения, а также в уравнениях и граничных условиях для возмущений. Легко видеть, что учет этой величины при постановке задачи приводит к появлению в условии (2.9) членов порядка m/r и т. п. Эти члены малосущественны в (2.9), если параметр T достаточно велик.

Рассмотрим теперь влияние физических параметров на устойчивость пленки. Подставляя в (2.9) выражения n_1 из (1.3) и T из (1.4), получаем

$$m^2 > \frac{1}{r^2} - \frac{\rho g h_*^2 \cos \beta}{\sigma} \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что в случае $\beta \leq \pi / 2$ существует критическое значение радиуса кривизны искривленной пленки

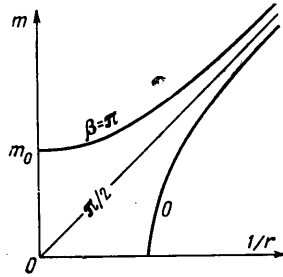
$$r^* = \left(\frac{\sigma}{\rho g h_*^2 \cos \beta} \right)^{1/2}, \quad \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.12)$$

При $r > r^*(\beta)$ пленка, расположенная под углом β к горизонтальной поверхности, устойчива по отношению к возмущениям произвольной длины волны.

Наоборот, при $1/2\pi < \beta \leq \pi$ (пленка находится на нижней стороне подложки) устойчивость имеет место лишь по отношению к возмущениям достаточно малых длин волн. Для критической длины волны возмущения λ^* , соответствующей нейтральной устойчивости, в данном случае имеем

$$\lambda^* \approx \frac{2\pi}{m^*} = 2\pi \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\rho g h_*^2 |\cos \beta|}{\sigma} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi$$



Фиг. 2]

В частности, при $r = \infty, \beta = \pi$ величина λ^* совпадает фактически со значением, вычисленным Беллманом и Пеннингтоном [7] при исследовании устойчивости жидкой пленки на нижней стороне горизонтальной пластины

$$m_0^* = (\rho g / \sigma)^{1/2}, \quad \lambda_0^* = 2\pi (\sigma / \rho g)^{1/2}, \quad \beta = \pi, \quad r \rightarrow \infty$$

Кривые нейтральной устойчивости в координатах m и $1/r$, соответствующие значениям $\beta = 0, 1/2\pi, \pi$, приведены на фиг. 2. Область устойчивости расположена сверху и слева от этих кривых.

Из приведенных выше соотношений следует интересный вывод, что устойчивость не зависит от того, в какой плоскости искривлена пленка — в плоскости движения (x, y) или же в плоскости (y, z) . Кроме того, условия (2.9) и (2.10) не зависят также от знака радиуса кривизны r : устойчивость искривленной пленки с данным r оказывается одинаковой для пленок, расположенных на выпуклой и вогнутой сторонах подложки.

Таким образом, уже в первом приближении по R радиус кривизны слоя жидкости существенно влияет на устойчивость его движения. Наоборот, наличие тангенциального градиента давления и трения на граничной поверхности сказываются в этом приближении только на скорости распространения возмущений и не влияют на устойчивость.

§ 3. Второе приближение. В первом приближении устойчивость по отношению к «продольным» и «поперечным» возмущениям совершенно одинакова. Уместно поэтому рассматривать устойчивость во втором приближении, учитывая лишь возмущения одного типа и полагая в дальнейшем, например, $l \equiv 0$ и $w \sim \chi(y) \equiv 0$. Согласно теореме Сквайра этот случай будет соответствовать наиболее неустойчивому состоянию при любом данном k .

Будем искать решение в виде суммы $\varphi(y), \psi(y)$ и $\pi(y)$ из (2.3) и малых поправок φ_1, ψ_1 и π_1 . С учетом (1.2) и (2.3) получаем из (1.5) следующие уравнения для φ_1, ψ_1 и π_1 :

$$\varphi_1'' - k^2 \varphi_1 - ikR\pi_1 = R \left(e^{ky} \sum_{j=0}^3 a_j^+ y^j + e^{-ky} \sum_{j=0}^3 a_j^- y^j \right)$$

$$\psi_1'' - k^2 \psi_1 - R\pi_1' = R \left(e^{ky} \sum_{j=0}^3 b_j^+ y^j + e^{-ky} \sum_{j=0}^3 b_j^- y^j \right)$$

$$ik\varphi_1 + \psi_1' = 0 \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0^\pm &= [\alpha + ik(a + \tau)]U^\pm - \tau V^\pm \\ a_1^\pm &= -iktU^\pm - 2aV^\pm + \{\pm [i\alpha - k(a + \tau)] - \tau\} P^\pm \\ a_2^\pm &= -ikaU^\pm + (\pm k\tau - 2a)P^\pm, \quad a_3^\pm = \pm kaP^\pm \\ b_0^\pm &= [\alpha + ik(a + \tau)]V^\pm, \quad b_2^\pm = -ikaV^\pm - ik\tau P^\pm \\ b_1^\pm &= -iktV^\pm + [\alpha + ik(a + \tau)]P^\pm, \quad b_3^\pm = -ikaP^\pm \end{aligned} \quad (3.2)$$

Достаточно найти частное решение системы (3.1). Исключая из первых двух уравнений величину $\pi_1(y)$ после введения функции тока $\theta(y)$, можно получить для $\theta(y)$ уравнение типа уравнения Орра-Зоммерфельда. Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\theta(y) = e^{ky} \sum_{j=0}^3 c_j^+ y^{j+2} + e^{-ky} \sum_{j=0}^3 c_j^- y^{j+2}$$

Коэффициенты c_j^+ и c_j^- представляют собой функции от a_j^+ , a_j^- и b_j^+ , b_j^- из (3.2); все они оказываются пропорциональными числу Рейнольдса.

Далее, из первого уравнения (3.1) и выражения для $\theta(y)$ легко получить представления для $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$ и $\pi_1(y)$. Учитывая их в граничных условиях (1.6) и (1.9) и снова используя (2.4) при $m \equiv k$, $l \equiv 0$, получим новую систему уравнений для определения постоянных U^+ , U^- , V^+ и V^- , коэффициенты которой будут отличаться от коэффициентов системы (2.4), (2.5), (2.7) слагаемыми, пропорциональными R . Получение этой системы, вычисление и исследование ее характеристического уравнения и представляет, по сути дела, решение задачи об устойчивости. Однако все эти выкладки оказываются весьма громоздкими даже в простейших случаях. Достаточно сказать, что исследование гораздо более простой задачи (при $\tau_* = n_* = \sigma = 0$, $r \rightarrow \infty$ и т. п.) потребовало в [3] утомительных численных расчетов; в более поздней работе [5] также не было получено сколь-нибудь удобного критерия устойчивости, пригодного с точностью, соответствующей второму приближению по R .

В то же время, все основные выводы об устойчивости и влиянии на нее физических параметров задачи можно сделать, исходя из упрощенной постановки задачи. Действительно, критические значения волнового числа, следующие из рассмотрения первого приближения, определяются величинами $-r^{-2}$ и $\rho gh_*^2 |\cos \beta| / \sigma$. Первая из них мала по определению (было предположено, что радиус кривизны пленки намного больше ее толщины h_*). Вторая величина пропорциональна h_*^2 и при достаточно малых h_* также мала. С другой стороны, учет малых членов в уравнениях не должен значительно сказаться на критических значениях волнового числа. Поэтому можно считать в дальнейшем $k \ll 1$.

Ограничиваясь в выражениях для поправок $\varphi_1(y)$, $\psi_1(y)$ и $\pi_1(y)$ только членами нулевого порядка по k , получим в результате решения (3.1)

$$\psi_1(y) = 0, \quad \varphi_1(y) = R \sum_{j=0}^2 \frac{a_j y^{j+2}}{(j+1)(j+2)}, \quad \pi_1(y) = - \sum_{j=0}^1 \frac{b_j y^{j+1}}{j+1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha(U^+ + U^-) - \tau(V^+ + V^-) \\ a_1 &= -2a(V^+ + V^-) + (i\alpha - \tau)P^+ - (i\alpha + \tau)P^- \\ a_2 &= -2a(P^+ + P^-), \quad b_0 = \alpha(V^+ + V^-), \quad b_1 = \alpha(P^+ + P^-) \end{aligned}$$

Условия (1.6) и (1.9) с учетом соотношений (2.4) и в пренебрежении членами $\sim R^2$ и $\sim kR$ запишутся в виде

$$\begin{aligned} U^+ \left[e^k \left(1 + k \right) + \frac{\alpha R}{2} \right] + U^- \left[e^{-k} \left(1 - k \right) + \frac{\alpha R}{2} \right] - \\ - V^+ \left[ike^k + R \left(\frac{\tau}{2} + \frac{a}{3} \right) \right] - V^- \left[ike^{-k} + R \left(\frac{\tau}{2} + \frac{a}{3} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$ike^k U^+ + ike^{-k} U^- + (1 - k)e^k V^+ - (1 + k)e^{-k} V^- = 0$$

$$kU^+ - kU^- - a\omega V^+ - a\omega V^- = 0, \quad (s\omega - k)V^+ + (s\omega + k)V^- = 0$$

После подстановки ω из (2.6) характеристическое уравнение системы (3.3) принимает вид

$$\alpha^2 R k (\operatorname{ch} k - k \operatorname{sh} k) + \alpha \left\{ k (\operatorname{ch} k + 1 + 2k^2) - sR (k \operatorname{ch} k - \operatorname{sh} k) - \right. \\ \left. - iakR \operatorname{sh} k + ik^2 R \left[\frac{a}{3} \operatorname{ch} k - k (a + \tau) \operatorname{sh} k \right] \right\} + s (\operatorname{sh} 2k - 2k) + \\ + 2iak^2 + ik^2 (a + \tau) (\operatorname{ch} 2k + 1 + 2k^2) + k^3 R (a + \tau) \left(\frac{2}{3} a + \tau \right) \operatorname{ch} k = 0$$

Пользуясь снова предположением о малости k и оставляя для простоты в каждом из коэффициентов уравнения члены лишь низшего порядка по k , получаем отсюда

$$\alpha^2 + \alpha \left(\frac{2}{R} - i \frac{2}{3} ak \right) + \frac{4}{3} \frac{sk^2}{R} + k^2 (a + \tau) \left(\frac{2}{3} a + \tau \right) + i \frac{2k}{R} (2a + \tau) = 0 \quad (3.4)$$

Для вывода условия устойчивости воспользуемся следующим методом. Известно [8], что число корней многочлена $f(x)$ с комплексными коэффициентами, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в последовательности чисел $1, A_2, A_4, \dots, A_{2n}$, где n — степень многочлена, а A_{2j} — миноры, стоящие в левом верхнем углу матрицы

$$\begin{Bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}$$

Эта матрица составлена из коэффициентов многочлена $f(ix)$ (или $if(ix)$ — так, чтобы $b_0 \neq 0$)

$$f(ix) = \sum_{j=0}^n (a_{n-j} + ib_{n-j}) x^j$$

В рассматриваемом случае при помощи этого метода получаем следующее условие устойчивости:

$$s > Ra \left(\frac{9}{4} \tau + \frac{7}{2} a \right) \quad (3.5)$$

Это условие определяет границы области устойчивости в зависимости от значений различных физических параметров задачи.

§ 4. Устойчивость свободного течения жидкой пленки. Рассмотрим устойчивость свободного движения плоского слоя жидкости, стекающей по наклонной плоскости под действием только силы тяжести.

В этом случае $\tau \equiv n_* \equiv 0$, $r \rightarrow \infty$ и условие (3.5) принимает следующую форму (учитываем определение параметров из (1.3), (1.4) и (2.7))

$$T k^2 > \frac{7}{4} \left(\frac{\rho g h_*^2 \sin \beta}{\mu u^0} \right)^2 - \frac{g h_* \cos \beta}{(u^0)^2}$$

Введем в рассмотрение безразмерное число Фруда

$$F = u^0 / (g h_*)^{1/2}$$

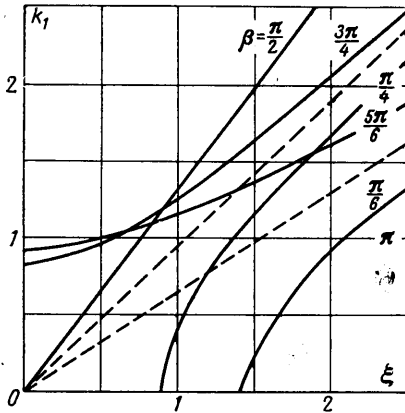
Тогда условие устойчивости можно переписать в виде

$$k_1^2 = T F^2 k^2 > \frac{7}{4} \left(\frac{R}{F} \right)^2 \sin^2 \beta - \cos \beta \quad (4.1)$$

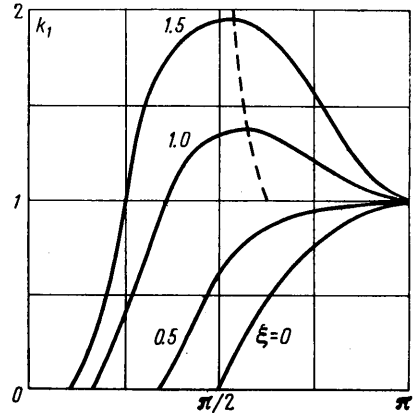
Соответствующие (4.1) кривые нейтральной устойчивости в координатах k_1 и $\xi = R/F$ при разных β приведены на фиг. 3 (область устойчивости находится слева и сверху от этих кривых). В диапазоне $0 \leq \beta \leq 1/2 \pi$ кривые фиг. 3 начинаются в точках $\xi = (4 \cos \beta / 7)^{1/2} \sin^{-1} \beta$, $k_1 = 0$ и при $\xi \rightarrow \infty$ приближаются к асимптотам $k_1 \approx 1,32 \xi \sin \beta$ (пунктир на фиг. 3). Кривая нейтральной устойчивости, отвечающая значению $\beta = 1/2 \pi$, вырождается в прямую $k_1 \approx 1,32 \xi$. В интервале $1/2 \pi \leq \beta \leq \pi$ кривые начинаются в точках $\xi = 0$, $k_1 = \cos^{1/2} \beta$ и при $\xi \rightarrow \infty$ стремятся к тем же асимптотам, что и кривые, соответствующие углам наклона $\pi - \beta$. Таким образом,

в области $\beta > \frac{1}{2}\pi$ кривые нейтральной устойчивости пересекаются как между собой, так и с кривыми, отвечающими области $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi$. При $\beta = \pi$ кривая нейтральной устойчивости представляет собой прямую $k_1 = 1 = \text{const}$.

Кривые нейтральной устойчивости в координатах k_1, β при различных значениях $\xi = R/F$ построены на фиг. 4. Из рассмотрения этой фигуры следует интересный вывод: имеется критическое число ξ^* , такое, что при $\xi > \xi^*$ кривые нейтральной



Фиг. 3



Фиг. 4

устойчивости имеют максимум, соответствующий углу наклона плоскости β^* , равному

$$\beta^* \approx \pi - \arccos(0.286 / \xi) \quad (4.2)$$

Положения, соответствующие $\beta = \beta^*$, являются наиболее неустойчивыми. В частности, при больших ξ наиболее неустойчивым оказывается ламинарное течение по вертикальной пластине. Критические углы β^* показаны на фиг. 4 пунктирной линией.

Критическое значение ξ^* легко получается из (4.1), либо прямо из фиг. 3

$$\xi^* = (R/F)^* \approx 0.75 \quad (4.3)$$

Существованием критических значений β^* и ξ^* и объясняется пересечение кривых нейтральной устойчивости на фиг. 3.

Кривые нейтральной устойчивости ламинарного течения плоской пленки со свободной поверхностью для случая $\beta \leq \frac{1}{2}\pi$ строились ранее в [3]. Позднее И Цяшунь показал [5], что эти кривые построены неверно, и предложил некие иные кривые нейтральной устойчивости в координатах k, R . Однако построение кривых в работе [5] основывалось больше всего на интуиции ее автора и не было подтверждено прямыми расчетами. Поэтому получить выводы, касающиеся точной формы кривых нейтральной устойчивости, существования критических значений ξ^* и β^* , оказалось по результатам [5] невозможным. Тем не менее, сравнение кривых фиг. 3 с соответствующими кривыми работы [5] показывает, что многие особенности их (пересечение с осью абсцисс при конечных ξ , примерная их форма и т. п.) были отмечены в работе [5] правильно.

Поступило 20 IX 1965

ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости I. Свободное течение II. Течение в соприкосновении с потоком газа и теплопередача. Ж. эксп. и теор. физ., 1948, т. 18, № 1, стр. 3, 20.
- Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости III. Опытное изучение волнового режима течения. Ж. эксп. и теор. физ., 1949, т. 19, № 2, стр. 105.
- Benjamin T. B. Wave Formation in Laminar Flow down an Inclined Plane. J. Fluid Mech., 1957, v. 2, N 6, p. 554.
- Iih C.— S. Stability of Parallel Laminar Flow with a Free Surface. Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Amer. Soc. Mech. Eng., N.— Y., 1955, p. 623.
- Iih C.— S. Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane. Phys. Fluids, 1963, v. 6, N 3, p. 32. (Русск. пер. Механика, Сб. пер. и оба. иностр. период. лит-ры, 1963, № 5).
- Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
- Bellman R., Pennington R. H. Effect of Surface Tension and Viscosity on Taylor Instability. Quart. Appl. Math., 1954, v. 12, No 2, p. 151.
- Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953.