

ТЭЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ТЕЛЕ

А. А. ЗАЙЦЕВ

(Москва)

Неустойчивость Тэйлора возникает в слоистых течениях, когда массовая сила действует по направлению от более тяжелой жидкости к более легкой [1]. Существует мнение, что увеличение завихренности течения может действовать стабилизирующим образом на неустойчивость Тэйлора [2]. При исследовании гидродинамической устойчивости вязкой пленки на теле в потоке маловязкой жидкости [3] была обнаружена некоторая стабилизация тэйлоровской неустойчивости с увеличением числа Рейнольдса и было высказано предположение о том, что возможны случаи полной стабилизации течения относительно двумерных возмущений при некотором увеличении числа Рейнольдса. В настоящем исследовании в результате расчетов обнаружены случаи, в которых с увеличением числа Рейнольдса неустойчивость Тэйлора переходит в неустойчивость Гельмгольца, увеличивающуюся с увеличением числа Рейнольдса, а также обнаружены случаи, в которых неустойчивость Тэйлора совсем исчезает при некотором значении числа Рейнольдса, а неустойчивость Гельмгольца еще не появляется, т. е. случаи полной стабилизации течения относительно двумерных возмущений в результате увеличения числа Рейнольдса.

Как известно [3], задача об устойчивости течения вязкой пленки на теле, обтекаемом маловязкой жидкостью, в первом приближении сводится к исследованию собственных значений уравнения Орра-Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R \{ (U - c) (\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U'\varphi \} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} (0) = \varphi'(0) = U''(1) + \varphi''(1) - \alpha^2 [U(1) - c] = \varphi(1) + U(1) - c = 0 \\ \varphi'''(1) - \{ 3\alpha^2 + i\alpha R [U(1) - c] (1 - r) \} [U'(1) + \varphi'(1)] = \\ = i\alpha (G + \alpha^2 T) \end{aligned} \quad (2)$$

При этом введены следующие обозначения:

$$U = ay^2 + by, \quad a = \frac{h^2}{2\mu U_0} (A + \rho g \sin \theta) \quad b = \frac{h}{\mu U_0} [\tau_0 - (A + \rho g \sin \theta) h]. \\ R = \frac{U_0 h \rho}{\mu}, \quad r = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad G = -\frac{(\rho - \rho_1) g \cos \theta}{\mu U_0}, \quad T = \frac{\sigma}{\mu U_0}$$

Здесь h — толщина пленки, U_0 — характерная скорость, μ — вязкость, ρ — плотность пленки, A — градиент давления вдоль основного течения, g — массовая сила, θ — угол, который составляет массовая сила с внешней нормалью к поверхности тела, τ_0 — касательное напряжение на поверхности пленки, ρ_1 — плотность жидкости, обтекающей тело, R — число Рейнольдса, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Величина $G < 0$, когда массовая сила направлена от более тяжелой жидкости к более легкой. Общее решение уравнения (1) имеет вид

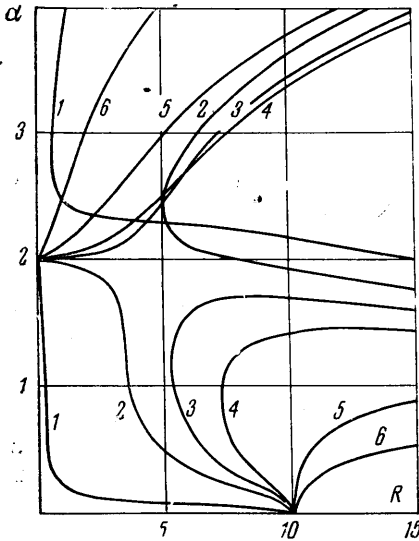
$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4$$

где c_k — произвольные постоянные. Граничные условия (2) приводят к пяти линейным неоднородным уравнениям относительно произвольных постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 . Для совместности этой системы необходимо, чтобы определитель ее расширенной матрицы равнялся нулю. Таким образом, получается характеристическое уравнение. Отделяя действительную и

мнимую части, получаем систему двух уравнений

$$F_r(\alpha, R, c_r, c_i) = 0 \quad F_i(\alpha, R, c_r, c_i) = 0 \quad (c = c_r + ic_i) \quad (3)$$

Неизвестными можно считать действительную и мнимую части числа c при заданных значениях α и R . По знаку мнимой части c можно судить об устойчивости течения при выбранном числе Рейнольдса относительно возмущений с заданным волновым числом α ; неравенство $c_i > 0$ свидетельствует о неустойчивости течения. Ниже приводятся результаты расчета нейтральных кривых в плоскости $R\alpha$, на которых c_i обращается в ноль и которые разделяют плоскость на области устойчивости и неустойчивости. При этом расчете считались неизвестными c_r и R при заданном α , или c_r и α при заданном R . Для решения системы (3) был использован метод Ньютона [4]. Для подсчета левых частей уравнений (3) рассчитывалась по стандартной программе Рунге-Кутты система линейно независимых решений уравнения (1) с начальными данными



Фиг. 1

$$\Phi_k^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & (n = k - 1) \\ 0 & (n \neq k - 1) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Точность решения уравнений (3) задавалась шагом по c_r и R или по c_r и α , при котором левые части уравнений меняли знак. Предварительно проводился анализ возможного расположения корней.

Расчеты были проведены для течений, нейтральные кривые которых проходят через точки $\alpha = 0, R = 10$ и $\alpha = 2, R = 0$. Как известно [3], нейтральные кривые должны проходить через точки

$$\left(\alpha = 0, \quad R = -\frac{G}{(\frac{4}{5} - r) ab} \right)$$

$$\left(\alpha = \sqrt{-G/T}, \quad R = 0 \right)$$

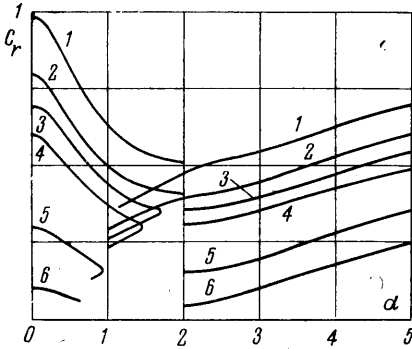
Вычисления велись с пренебрежением величиной r . Значения параметров, характеризующих течения,

№№	a	b	G	T
1	0.005	0.009	-0.0396	0.0099
2	0.1	0.8	-0.64	0.16
3	0.15	0.7	-0.84	0.21
4	0.2	0.6	-0.96	0.24
5	0.35	0.3	-0.84	0.21
6	0.45	0.1	-0.936	0.09

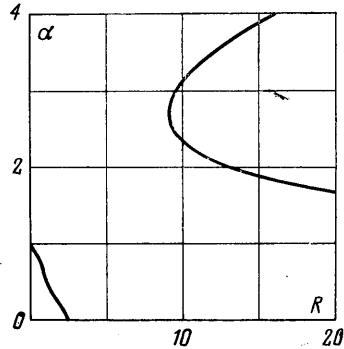
для которых произведен расчет устойчивости, указаны в таблице, а результаты расчетов приводятся на фиг. 1 и фиг. 2. В случае течений 1 и 2 нейтральные кривые ограничивают области неустойчивости различной природы. Область неустойчивости, лежащая ниже нейтральной кривой, соединяющей точки $\alpha = 2, R = 0$ и $\alpha = 0, R = 10$, является областью тейлоровской неустойчивости, которая существует и при отсутствии движения ($R = 0$). В рассматриваемом случае эта область неустойчивости уменьшается с увеличением числа Рейнольдса R и исчезает вовсе при $R = 10$. Между тем, с увеличением числа Рейнольдса возникает другая область неустойчивости, лежащая справа от верхней четверти нейтральной кривой. Эта область неустойчивости Гельмгольца, которая растет с увеличением числа Рейнольдса. В случае течений 1 и 2 области неустойчиво-

сти Тэйлора и Гельмгольца перекрываются: не успела исчезнуть неустойчивость Тэйлора, а уже появилась неустойчивость Гельмгольца и таким образом течение всегда неустойчиво.

Однако возможны течения (и один такой пример приводится на фиг. 3 и фиг. 4 при значениях параметров $a = 0.1, b = 0.8, G = -0.16, T = 0.16$), когда неустойчивость Тэйлора полностью исчезает, а неустойчивость Гельмгольца еще не наступила. При этих значениях числа Рейнольдса течение неустойчиво только относительно трехмерных возмущений.

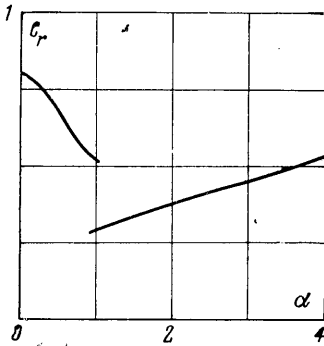


Фиг. 2

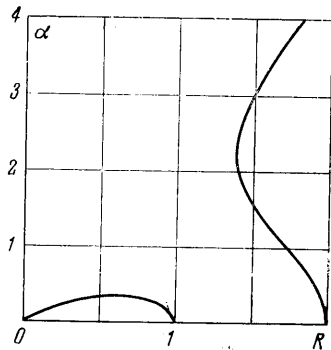


Фиг. 3

В случае течений 3, 4, 5, 6 области неустойчивости Тэйлора и Гельмгольца сливаются вместе и эта общая область неустойчивости лежит между ветвью нейтральной кривой, выходящей из точки $\alpha = 2, R = 0$ и ветвью, выходящей из точки $\alpha = 0, R = 10$. Увеличение числа Рейнольдса теперь не действует стабилизирующим образом.



Фиг. 4



Фиг. 5

Можно поставить вопрос о толщине устойчивой пленки (в гидродинамическом смысле) при заданных параметрах внешнего течения $\tau_0, A, g, \theta, \rho_1$ и заданных свойствах жидкости, образующей пленку, μ, ρ, σ . Если $\tau_0 \neq 0$, то в качестве характерной скорости можно взять $U_0 = \sqrt{\tau_0 / \rho}$. Удобно ввести безразмерные параметры

$$R = \frac{h}{\mu} \sqrt{\tau_0 \rho}, \quad T = \frac{\sigma \sqrt{\rho}}{\mu \tau_0}, \quad a^* = \frac{\mu (A + \rho g \sin \theta)}{2 \sqrt{\rho} \tau_0^{3/2}}, \quad G^* = -\frac{(\rho - \rho_1) g \mu \cos \theta}{\sqrt{\rho} \tau_0^{3/2}}$$

из которых только R зависит от толщины пленки h . Выражая h через R , получим следующие выражения для прежних безразмерных параметров

$$a = R^2 a^*, \quad b = R (1 - 2a^* R), \quad G = R^2 G^*$$

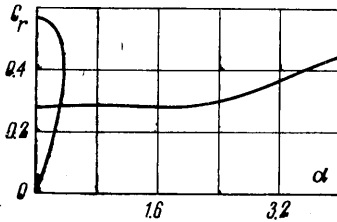
Для анализа формы нейтральных кривых при постоянных значениях параметров a^* , G^* , T используем тот же прием, что в работе [3]. Первые коэффициенты разложения $c = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots$ числа c по степеням α имеют вид

$$c_0 = R(1 - 2a^*R)$$

$$c_1 = -\frac{1}{3}iR^2 \{(a^*R^2 - 2a^{*2}R^3) (\frac{4}{5} - r) + G^*\}$$

Отсюда легко видеть, что линия $\alpha = 0$ является ветвью кривой нейтральной устойчивости, а точки ее разветвления определяются уравнением

$$R^2 \{(a^*R^2 - 2a^{*2}R^3) (\frac{4}{5} - r) + G^*\} = 0 \quad (4)$$



Фиг. 6

Для коэффициента c_{0R} разложения собственного числа $c = c_{0R} + c_{1R}R + c_{2R}R^2 + \dots$ по степеням числа Рейнольдса R легко получить следующее выражение

$$c_{0R} = -\frac{i}{\alpha} \frac{\text{sh } \alpha \text{ ch } \alpha - \alpha}{\text{ch}^2 \alpha + \alpha^2} T \quad (5)$$

Проведем анализ кривой нейтральной устойчивости при значениях параметров $a^* = 3/14$, $G^* = -48/490$, $T = 0.01$. Числа $-2/3$, 0 , 0 , 1 , 2 будут корнями уравнения (4). Отрицательное число Рейнольдса не имеет смысла, а точки 0 , 1 , 2 являются точками бифуркаций нейтральной кривой. Из (5) видно, что при $R = 0$, $\alpha > 0$ знак мнимой части c всегда отрицательный и значит к оси α примыкает область устойчивости. Мнимая часть c_1 положительна, когда $0 < R < 1$ и, следовательно, здесь к оси R примыкает область неустойчивости.

Таким же образом легко видеть, что при $1 < R < 2$ к оси R примыкает область устойчивости, а при $R > 2$ — область неустойчивости. На фиг. 5, 6 приведены результаты расчета кривых нейтральной устойчивости указанным выше методом, которые согласуются с проведенным анализом. Оказывается существуют такие течения, у которых только достаточно тонкая пленка обладает неустойчивостью Тэйлора, с увеличением толщины пленки эта неустойчивость относительно двумерных возмущений совсем исчезает. И только при еще большей толщине наступает неустойчивость Гельмгольца, которая на фиг. 5 находится справа от нейтральной кривой, выходящей из точки $\alpha = 0$, $R = 2$.

Таким образом, если имеется наклонная плоскость, по нижней поверхности которой стекает вязкая пленка, а параллельно поверхности пленки вверх движется маловязкая жидкость (что локально может случиться на поверхности оплаваемых тел), то при некоторых обстоятельствах существуют пределы толщины пленки, между которыми на пленке могут возникать только трехмерные волны. Если пленка достаточно тонкая, то развиваются двумерные длинноволновые возмущения, видимо с небольшой скоростью роста. Если пленка достаточно толстая, то имеет место неустойчивость Гельмгольца, имеющая больший диапазон частот растущих возмущений. Наличие на некоторых метеоритах преимущественно продольных бороздок возможно свидетельствует о том, что толщина расплава и значения других параметров при падении этих метеоритов соответствуют диапазону устойчивости относительно двумерных возмущений.

Поступило 14 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р к г о ф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тэйлора. Гидродинамическая неустойчивость. Изд-во «Мир», 1964.
2. F e l d m a n S. Stabilization of Teylor instability by a shearing flow. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, No 3, pp. 385, 386.
3. З а й ц е в А. А. Об устойчивости жидкой пленки на теле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
4. Б е р е з и н И. С. и Ж и д к о в Н. П. Методы вычислений, 1962, т. 2.