

УДК 532.529.2:532.5.013.4

© 2007 г. В. Г. БАЙДУЛОВ, М. П. ВАСИЛЬЕВ

## ФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СЛОИСТЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

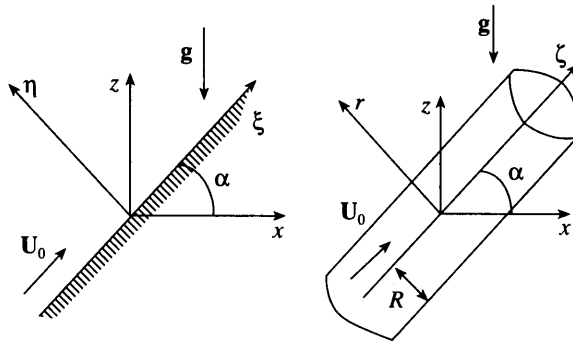
На основании точных решений начально-краевой задачи, построенных с использованием преобразования Лапласа, детально исследован процесс формирования тонкой структуры течений стратифицированной жидкости. В качестве модельных были рассмотрены задачи формирования плоскопараллельных течений, возникающих около наклоненных к горизонту плоскости и цилиндра, движущихся вдоль самих себя. Трансформация свойств решений изучалась при последовательном переходе от модели однородной жидкости к неоднородной и модели, учитывающей диффузию стратифицирующей примеси. Показано, что несмотря на малость параметров, отвечающих за эффекты стратификации и диффузии, величина их вклада относительно других эффектов (сил инерции и вязкости) определяется не только значением скалярных параметров (чисел Фруда и Шмидта), но в значительной мере и динамическими факторами. В силу большого различия по величине скалярных параметров в работе были выделены четыре временные области (три области малых времен – вязких, плавучести и диффузионных, а также область больших времен), на границах которых происходит смена модели течения. Показано, что предельный переход  $t \rightarrow \infty$  является неравномерным как в случае плоской, так и цилиндрической геометрии. Переход к стационарным моделям ведет не только к неравномерности двойных предельных переходов, но часто и к необходимости переформулировки краевых условий.

*Ключевые слова:* стратифицированная жидкость, вязкость, диффузия, формирование течения, пограничное течение, структурная устойчивость.

Задача долгосрочного прогнозирования природных процессов в окружающей среде требует значительного увеличения числа параметров, входящих в физическую модель. В результате усложнение модели влечет за собой усложнение ее качественного и количественного анализа. В то же время в гидродинамике часто ограничиваются изучением только части из всей совокупности элементов течения, причем процесс их формирования, как правило, не исследуется. Так, например, большое количество работ посвящено изучению процессов генерации, распространения и взаимодействия внутренних волн, в основном в пренебрежении эффектами диссипации и нелинейности [1–4]. Эти работы связаны с монохроматическими, так и присоединенными внутренними волнами, возникающими при движении препятствий конечного размера в стратифицированных средах.

Другим распространенным для моделирования элементом течения является пограничный слой. В рамках этого приближения изучается динамика течения в ближней зоне от обтекаемого препятствия, причем при определенных условиях эффекты плавучести и диффузии могут оказать существенное влияние на динамику течения, несмотря на малые вертикальные размеры примыкающих областей [5]. В силу неравновесности и открытого характера природных систем особое значение приобретают диссипативные эффекты, которые совместно с эффектами стратификации могут инициировать течения даже в отсутствие внешних источников тепла и движущихся границ [6–10].

Геометрическими объектами, на примере которых принято изучать свойства течений в гидродинамике являются тела правильной формы: сфера, цилиндр и наиболее простой из них – плоскость. При помощи плоской границы исследуются процессы на шельфе с совместным влиянием эффектов стратификации, вращения, вязкости и диф-



Фиг. 1. Схема течения. Лабораторная  $(x, z)$  и собственные  $(\xi, \eta)$  и  $(r, \zeta)$  системы координат для плоской (а) и цилиндрической (б) геометрии

фузии [11, 12]. Высокая степень симметрии позволяет максимально упростить геометрические свойства течения, с одной стороны, а с другой – делает доступной для анализа процессы формирования течения, дает возможность проанализировать роль отдельных факторов и их вклад в поля скорости и солёности, а также их временную эволюцию. Число работ, посвященных решению начально-краевой задачи, относительно мало, к ним можно отнести работы по формированию течения, индуцированного диффузией на наклонной плоскости [10], в том числе с движущейся границей [13], задачу формирования многокомпонентной конвекции [8]. В случае плоской геометрии к таким работам относятся задача формирования поля внутренних волн при старте цилиндра во вращающейся идеальной жидкости [14], а также задача о начале движения горизонтального цилиндра в вязкой стратифицированной жидкости [15] и течении, индуцированном диффузией около покоящейся сферы [16]. Однако соотношение между решениями, найденными в рамках разных моделей, остается к настоящему времени до конца неизученным. Особенно актуальным этот вопрос оказывается для стационарных течений и картины установившихся волн, а также взаимных переходов от модели идеальной однородной жидкости к стратифицированной, с учетом эффектов вязкости и диффузии, поскольку стратификация обычно слабая, как и кинетические коэффициенты диссипативных процессов.

Цель данной работы – изучение процессов формирования тонкой структуры стратифицированных течений на примере задач движения наклонных плоскости и цилиндра, анализ динамики вклада отдельных физических факторов в общую картину течения по мере эволюции от момента начала движения до полного установления. Другой вопрос, рассмотренный в работе, – это вопрос равномерности предельных и двойных предельных переходов по параметрам, отвечающим за переход от более полной физической модели течения к упрощенной.

**1. Постановка задачи. Уравнения движения.** Рассматривается задача формирования течений при импульсном старте из состояния покоя плоскости и цилиндра в вязкой стратифицированной несжимаемой жидкости, наклоненных на угол  $\alpha$  к горизонту. Движение происходит с постоянной скоростью, направленной вдоль линий симметрии тел против действия силы тяжести (фиг. 1). Изучается устойчивость свойств решений к последовательному усложнению математической модели течения: вязкая однородная жидкость, вязкая стратифицированная жидкость, вязкая стратифицированная жидкость с диффузией. Основная действующая сила – вязкое трение, вовлекающее жидкость в движение. Остальные факторы – силы плавучести и диффузия – обычно малы: изменение концентрации примеси на размерах бассейна не превышает нескольких процентов,

а отношение коэффициента диффузии к коэффициенту кинематической вязкости для воды – обратное число Шмидта  $Sc^{-1} = \varepsilon^2 \approx 1/700$ . Это в первом приближении служит естественным основанием для их исключения из модели течения. В рамках последовательного решения задачи старта для трех предложенных типов моделей будет изучен вопрос о пространственно-временных границах, на которых происходит изменение числа эффективно действующих физических факторов и соответственно усложнение или упрощение модели течения. Отдельно исследуется вопрос о равномерности перехода к стационарным решениям с ростом времени ( $t \rightarrow \infty$ ).

В силу симметрии задачи (однородность относительно сдвигов вдоль оси  $\xi$  (для цилиндрической геометрии  $\zeta$ )) течение может быть описано как одномерное с единственной отличной от нуля компонентой скорости  $\mathbf{u} = u(\eta, t)\mathbf{e}_\xi$  ( $\mathbf{u} = u(r, t)\mathbf{e}_r$ ) и возмущением солёности вида  $S = S(\eta, t)$  ( $S = S(r, t)$ ). В моделях стратифицированных течений плотность связана с солёностью линейным уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 \left[ 1 - \frac{z}{\Lambda} + S \right], \quad \Lambda = \left| a \frac{\ln \rho}{dz} \right|^{-1}, \quad N = \sqrt{\frac{g}{\Lambda}}$$

здесь в определение солёности включен коэффициент солевого сжатия, а  $\Lambda$  и  $N$  – масштаб стратификации и частота плавучести соответственно.

Подобные течения, представляющие широко известный в гидродинамике тип точных решений, иногда называют слоистыми [17]. В силу симметрии задачи нелинейные члены уравнений обращаются в нуль, и уравнения движения становятся линейными. Условие несжимаемости жидкости удовлетворяется тождественно. Для линейно стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска при учете эффектов вязкости и диффузии система определяющих уравнений преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \nu L_1 U - g S \sin \alpha \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \kappa L_1 S + \frac{1}{\Lambda} U \sin \alpha, \quad L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad L_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\nu$  и  $\kappa$  – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли соответственно,  $g$  – ускорение свободного падения, оператор  $L_1$  соответствует плоской геометрии,  $L_2$  – цилиндрической.

Системы (1.1) дополняются нулевыми начальными данными и условиями на бесконечности для всех зависимых переменных задачи. На теле (плоскости и цилиндре) скорость удовлетворяет условию прилипания

$$\eta = 0: \mathbf{u} = U_0 \mathbf{e}_\xi, \quad r = R: \mathbf{u} = U_0 \mathbf{e}_r \quad (1.2)$$

В случае моделей с диффузией на границе тела для солёности выбиралось тривиальное условие второго рода

$$\eta = 0: \frac{\partial S}{\partial \eta} = 0; \quad r = R: \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (1.3)$$

являющееся частью общего условия непроницаемости пластины для потока соли. Задача с нетривиальными условиями на возмущения солёности отвечает течениям, индуцированным диффузией на поверхности тела [7, 10]. Поскольку интенсивность таких течений мала, а также учитывая линейность уравнений движения (1.1), далее рассматриваются задачи с нетривиальным граничным условием только для скорости (1.2). Свойства течений, вызванных непроницаемостью границ для потока вещества, подробно исследованы в ряде работ [7, 10, 16] и здесь не анализируются.

Основным методом решения нестационарных задач (1.1)–(1.3) был метод преобразований Лапласа. Для анализа решений в физическом пространстве применялись как квадратуры, построенные по образам Лапласа, так и временные ряды.

В образах Лапласа задача для плоскости (1.1), (1.2) перепишется в виде

$$pV = \nu V'' - g\sigma \sin \alpha, \quad p\sigma = k\sigma'' + \frac{1}{\Lambda} V \sin \alpha \quad (1.4)$$

$$\eta = 0: V = w(p), \quad \sigma' = 0 \quad (1.5)$$

Здесь  $V$ ,  $\sigma$  и  $w(p)$  – образы Лапласа скорости, возмущения солёности и скорости движения плоскости соответственно,  $p$  – параметр преобразования.

По характеристическому уравнению системы (1.4)

$$\nu k \lambda^4 - p(\nu + \kappa) \lambda^2 + p^2(1 + (p_b/p)^2) = 0, \quad p_b = N \sin \alpha \quad (1.6)$$

и его редуцированным аналогом будет анализироваться структурная устойчивость свойств задачи – устойчивость свойств решений по отношению к изменению модели течения за счет ее усложнения.

Второй тип факторов, влияющих на динамику течения – особенности движения границы тела  $U_0(t)$ . Однако так как по известному решению для образов Лапласа задачи импульсного старта решения для остальных типов движения границы выражаются через интеграл свертки, в работе исследуется только один вид зависимости движения границы  $U_0(t) = U_0 \vartheta(t)$ , где  $\vartheta(t)$  – ступенчатая функция Хевисайда.

**2. Однородная жидкость.** Наиболее простой вид характеристическое уравнение (1.6) принимает в случае однородной жидкости

$$\lambda^2 = p/\nu \quad (2.1)$$

и решение в образах Лапласа и в физическом пространстве записывается как

$$V = \frac{U_0}{p} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\nu}} \eta\right), \quad U = U_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2} \sqrt{\nu t}\right) \quad (2.2)$$

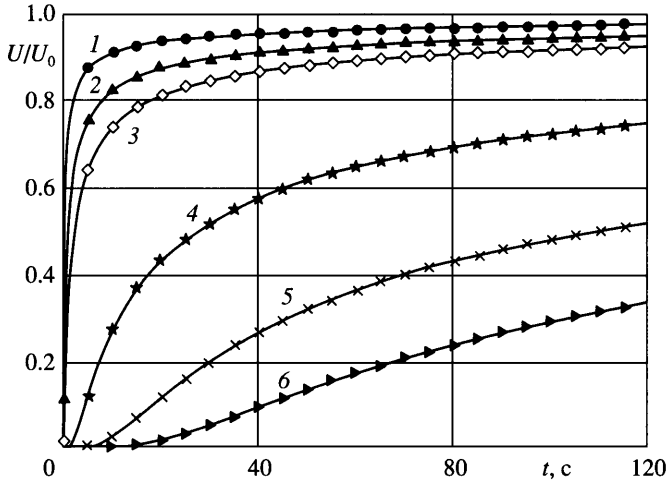
Решение (2.2) приведено во многих классических монографиях по гидродинамике, оно быстро убывает на вязком масштабе длины  $\delta_\nu = 2\sqrt{\nu t}$ , который со временем неограниченно растет, и за бесконечное время весь объем жидкости начинает двигаться со скоростью  $U_0$ . При этом на фиксированном расстоянии  $l$  от плоскости величина нарастания возмущений будет зависеть от характерного времени  $t_\nu = l^2/4\nu$  (фиг. 2).

Такое поведение решения можно проиллюстрировать и анализом стационарной задачи, когда все временные производные полагаются равными нулю. В этом случае уравнение движения примет простейший вид  $U'' = 0$ , и никаким изменением постоянных интегрирования в общем решении  $U = A\eta + B$  невозможно удовлетворить условиям прилипания и затухания скорости на бесконечности. Иначе говоря, постановка краевой задачи (1.4), (1.5) в стационарном приближении будет некорректной.

В образах Лапласа предельный переход  $t \rightarrow \infty$  ( $p \rightarrow 0$ ) согласно [18] осуществляется следующим образом:

$$F(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pf(p) \quad (2.3)$$

что во втором выражении (2.2) дает  $u = U_0$ . В результате оказывается, что предельное выражение для скорости в нестационарной задаче содержит в себе одну из собственных функций решения стационарной задачи и удовлетворяет краевому условию на плоскости.



Фиг. 2. Временная эволюция скорости течения однородной жидкости в зависимости от расстояния до пластины: 1 – 6 –  $\eta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.5, 1.0$  и  $1.5$  см

Влияние геометрических особенностей тел на свойства течения можно проследить при переходе к задаче о движении кругового цилиндра вдоль своей образующей (фиг. 1). В образах Лапласа изменение уравнений движения и появление конечного размера в краевых условиях приводит к смене собственных функций решения с экспоненциальных на цилиндрические функции мнимого аргумента с учетом условия затухания возмущений на бесконечности – функции Макдональда

$$\frac{V}{U_0} = \frac{1}{p} K_0\left(\sqrt{\frac{p}{v}} r\right) / K_0\left(\sqrt{\frac{p}{v}} R\right) \quad (2.4)$$

На малых временах ( $p \gg v/R^2$ ) это приводит к появлению дополнительного затухания, связанного с пространственной локализацией тела. Учет только первого члена асимптотического разложения функции Макдональда в пространстве образов Лапласа дают выражение скорости на малых временах

$$\frac{V}{U_0} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{R}{r}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{v}}(r-R)\right)$$

а его обращение в физическом пространстве приводит к выражению

$$\frac{U}{U_0} = \sqrt{\frac{R}{r}} \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{vt}}\right) \quad (2.5)$$

Однако на больших временах различия между решениями для плоскости и цилиндра становятся более существенными. Переход к пределу больших времен (2.3), с учетом асимптотики  $z \rightarrow 0$ ,  $K_0(z) \sim -\ln z$ , [19], показывает, что с ростом времени тело не приводит всю жидкость в движение, как это было в случае с плоскостью, и вычисление предела  $t \rightarrow \infty$  дает затухающее с расстоянием выражение для скорости

$$\frac{U}{U_0} \sim \frac{R}{r}, \quad U \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

При этом предельное поведение нестационарной цилиндрической задачи не совпадает со стационарным решением, когда временные производные в (1.1) обращаются в

нуль, и общее решение уравнений движения имеет вид  $U = A + B \ln r$ . В этом случае скорость на бесконечности либо постоянна (как и в случае с движущейся пластиной), либо логарифмически возрастает.

**3. Стратифицированная жидкость без диффузии.** Наличие сил плавучести, несмотря на слабость стратификации, существенно меняет картину течения и усложняет ее анализ. Порядок системы уравнений движения в пространстве образов Лапласа не меняется, и корни характеристического уравнения (для задачи о движении плоскости)

$$\lambda^2 = \frac{p}{v} \left( 1 + \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 \right) \quad (3.1)$$

как и в случае однородной жидкости, остаются действительными. Однако наличие дополнительного слагаемого в (3.1) изменяет динамику системы (1.4) с ростом времени.

Учитывая условие затухания возмущений на бесконечности, решение задачи в образах Лапласа для скорости в пространстве образов Лапласа и физическом пространстве запишется в виде

$$\frac{V}{U_0} = \frac{1}{p} \exp \left( -\sqrt{\frac{p}{v} + \frac{p_b^2}{vp}} \eta \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{U}{U_0} = \int_0^t J_0(2p_b \sqrt{\tau(t-\tau)}) \frac{\eta}{2\sqrt{\pi v \tau^3}} \exp \left( -\frac{\eta^2}{4v\tau} \right) d\tau \quad (3.3)$$

Интегрирование выражения (3.3) один раз по частям

$$\frac{U}{U_0} = \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{vt}} \right) + p_b \int_0^t J_1(2p_b \sqrt{\tau(1-\tau)}) \frac{t-2\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{v\tau}} \right) d\tau \quad (3.4)$$

позволяет явным образом выделить член, отвечающий за вязкое вовлечение однородной жидкости в движение (первое слагаемое). После записи решения в форме (3.4) более очевидно выполнение граничных условий на плоскости: функция ошибок дает при  $\eta = 0$  единицу, а второе слагаемое в (3.4) вычисляется явным образом  $J_0(2p_b \sqrt{\tau(t-\tau)})$  и в заданных пределах интегрирования обращается в нуль. Выполнение условий на бесконечности и в начальный момент времени дополнительных пояснений не требует. В целом вычисление интегралов (3.3) и (3.4) предъясвляет повышенные требования к точности расчетов, так как подынтегральные выражения в ряде областей являются быстроменяющимися или высокочастотными функциями, особенно на начальных стадиях развития течения. Поэтому возможности численного нахождения поля скорости течения через интегралы (3.3) и (3.4) на малых временах были расширены за счет использования временных рядов, приведенных в приложении.

В формуле (3.4) функция ошибок отвечает за вязкое вовлечение жидкости, функция Бесселя – отражает упругие свойства стратифицированной среды.

На малых временах ( $p \gg p_b$ ), как и в (2.1), значение корней характеристического уравнения будет определяться эффектами вязкости. При достижении характерных значений времени, определяемых силами плавучести ( $\tau_b \sim 1/p_b$ ), доминирующий вклад в значение корней характеристического уравнения будет вносить второе слагаемое в (3.1). При этом эффективность вклада величины сил плавучести в структуру течения будет зависеть не только от частоты плавучести  $N$ , но также и от геометрии задачи, в данном случае от угла наклона плоскости  $\alpha$ .

Интенсивность затухания скорости в пространстве образов Лапласа определяет значение корня характеристического уравнения  $\lambda_- = \sqrt{(p^2 + p_b^2)/\nu p}$ , зависимость которого от параметра  $p$  показывает, что его величина всегда превосходит некоторое минимальное значение, определяемое эффектами стратификации ( $\lambda > \lambda_-^{\min} = \sqrt{2p_b/\nu}$ ) (в однородной жидкости  $\lambda_-^{\min} = 0$ ).

Таким образом, в стратифицированной жидкости при любых значениях параметра преобразования Лапласа величина скорости на бесконечности будет обращаться в нуль, а решение на всех временах оказывается локализованным в пространстве.

Как и в случае однородной жидкости, стационарный предел оказывается недостижимым. Чтобы выяснить математические причины этого факта, рассмотрим поведение системы определяющих уравнений, которая в данном случае имеет вид

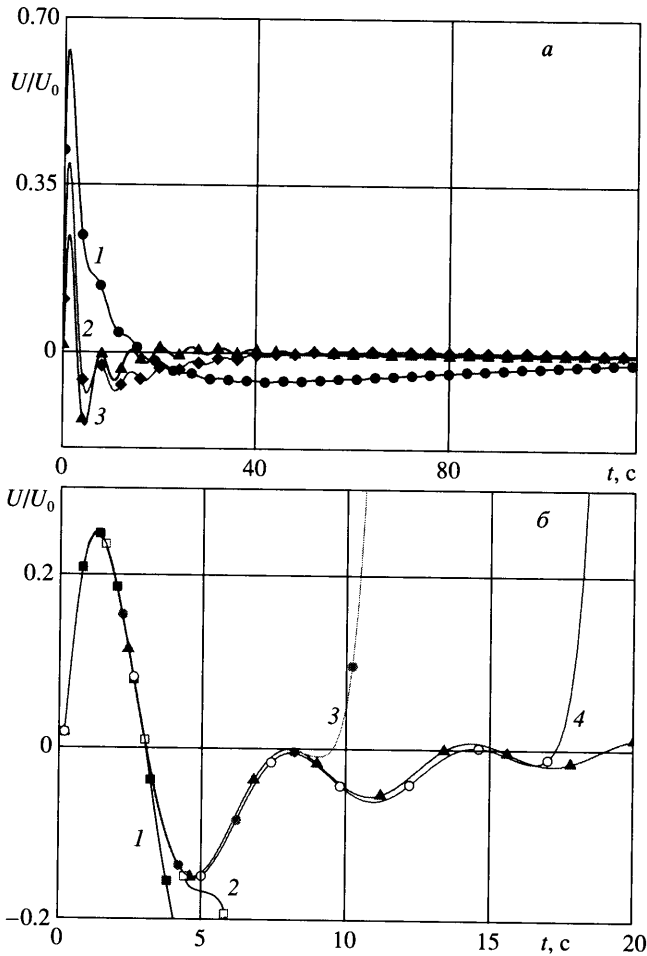
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - gS \sin \alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\Lambda} U \sin \alpha \quad (3.5)$$

При стационарных краевых условиях с течением времени среда подстраивается под внесенные возмущения, и значения временных производных большие в начале движения уменьшаются. Наличие стратификации приводит к обратной связи между скоростью и возмущениями солёности, которая проявляется через силы плавучести в правых частях системы (3.5). В силу условия прилипания движение плоскости приведет к движению жидкости и в некоторой ее окрестности (первое уравнение в (3.5) без учета сил плавучести), что породит нестационарные возмущения солёности. По мере удаления от границы и уменьшения сил вязкого вовлечения доминирующими оказываются силы плавучести, вызванные возмущениями солёности, что приводит к появлению противотечения на некотором удалении от плоскости. Возникший сдвиг скорости действует в сторону уменьшения сил плавучести, однако возмущения солёности по инерции меняют знак на противоположный, меняя знак сил плавучести. Кроме того, следует учитывать пространственно-временной характер развития картины течения.

В результате монотонное поле пространственного распределения скорости однородной жидкости меняется на полосчатую структуру поля стратифицированного течения с чередующимися направлениями струй. Стационарный режим течения оказывается неосуществимым. Если движение границы происходит с постоянной скоростью, то наиболее критической оказывается область в непосредственной окрестности тела, где вовлеченная в движение жидкость с течением времени все дальше оказывается от горизонта нейтральной плавучести, вызывая все возрастающую возвратную силу. Этот эффект также приводит к росту градиентов концентрации примеси, что в конце концов делает вклад эффектов диффузии сравнимым с вкладами других физических факторов, даже несмотря на чрезвычайно малое значение кинетического коэффициента.

Проведенные расчеты временной эволюции течения позволили выделить два характерных типа поведения скорости в зависимости от расстояния до плоскости. На малых расстояниях первоначально сильное вязкое вовлечение жидкости в движение с течением времени сменяется столь же сильной возвратной реакцией сил плавучести, следствием чего является смена направления скорости и возникновением противотечения большой амплитуды. С увеличением расстояния происходит периодическая смена доминирования сил вязкого вовлечения и плавучести, однако их интенсивность уменьшается как с расстоянием, так и со временем – происходит постепенная адаптации среды к внесенным возмущениям (фиг. 3, здесь и далее расчеты проведены для угла наклона  $\alpha = 90^\circ$ , частоты плавучести  $N = 0.99 \text{ c}^{-1}$ ).

В то же время на больших расстояниях возмущения заметной амплитуды приходят спустя некоторое время после старта, причем их величина примерно на порядок мень-



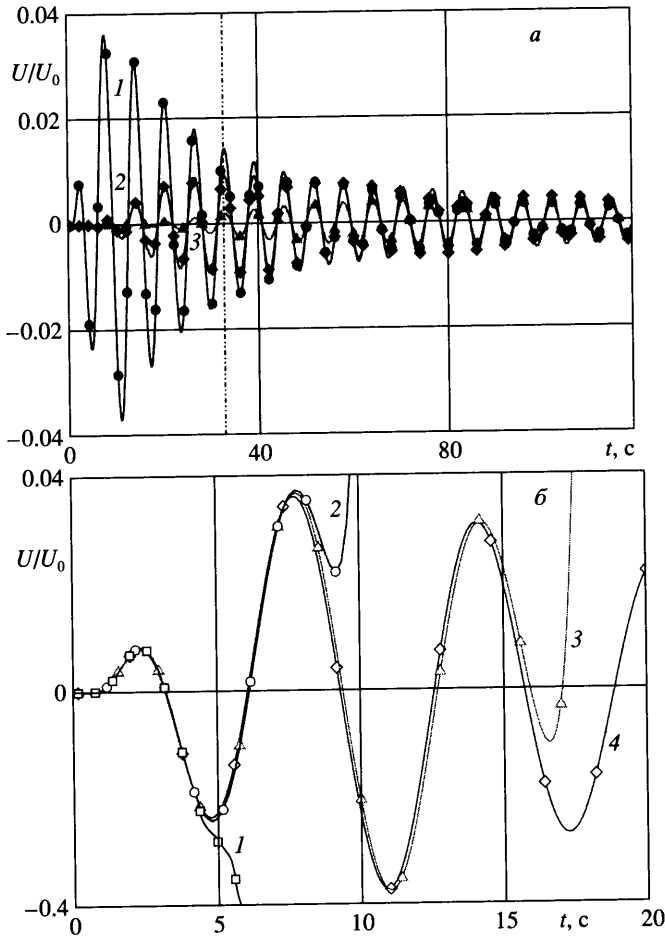
Фиг. 3. Временная эволюция скорости течения стратифицированной жидкости на малых расстояниях от плоскости: а – расчет по (3.3): при  $\eta = 0.05, 0.10, 0.15$  см (кривые 1–3); б – расчет по формуле (5.15), при  $\eta = 0.15$  см и  $n = 3, 5, 10$  и 20 (1–4), кривая 5 – по формуле (3.3)

ше, чем в области малых расстояний. Максимум амплитуды колебаний наступает тем позже, чем дальше находится выбранная точка наблюдений (фиг. 4). После достижения максимального значения амплитуда колебаний медленно затухает со временем.

Диссипативные свойства среды своеобразно сочетаются с волновыми свойствами стратифицированной среды. Если первые отвечают за способ передачи возмущения, то вторые придают движению колебательный характер. Однако параболические свойства уравнений движения не позволяют говорить о распространении волн. В данном случае возмущения распространяются бесконечно быстро, колебания частиц среды происходят синфазно во всем пространстве (фиг. 5), а с конечной скоростью распространяется только максимум возмущений.

Анализ корней характеристического уравнения показывает, что в пространственной картине течения на малых временах ( $p \gg p_0$ ) эффектами плавучести можно пренебречь, и профиль скорости практически не изменяется по сравнению с течением однородной жидкости (фиг. 6, кривая 1). Но с ростом времени эффекты стратификации оказываются





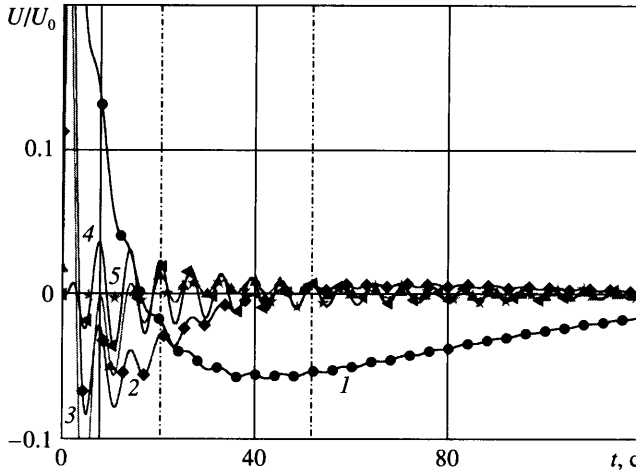
Фиг. 4. Временная эволюция скорости течения неоднородной жидкости на больших расстояниях от плоскости: *a* – расчет по (3.3):  $\eta = 0.5, 1.0, 1.5$  см (кривые 1–3); *b* – по формуле (5.15), при  $\eta = 0.5$  см и  $n = 5, 10$  и  $20$  (кривые 1–3), кривая 4 – по формуле (3.3)

ся доминирующими, что приводит к локализации течения, появлению струй с противоположным направлением скорости и, как следствие, к росту пространственных производных скорости (фиг. 6, кривые 2–10). Соответственно со временем растут и пространственные производные солёности.

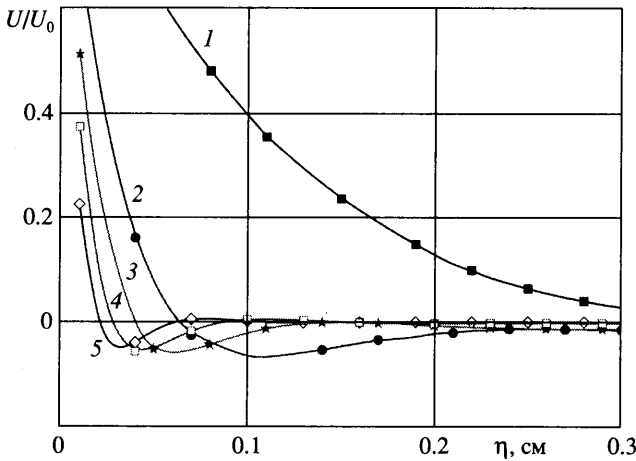
Предельный переход  $t \rightarrow \infty$  для скорости в выражении (3.2) даст  $u = 0$  везде, за исключением области, непосредственно примыкающей к плоскости. Размер области с течением времени будет уменьшаться, сдвиг скорости расти. В поведении солёности будут наблюдаться такие же особенности. Все это влечет за собой необходимость корректировки модели течения в области, непосредственно примыкающей к телу.

Стабилизирующее воздействие сил плавучести на течение наиболее ярко проявляется при движении наклонного цилиндра. В этом случае решение в образах Лапласа преобразуется от (2.4) к виду

$$\frac{V}{U_0} = \frac{1}{p} K_0 \left( \sqrt{\frac{p}{v} + \frac{p_b^2}{vp}} \right) / K_0 \left( \sqrt{\frac{p}{v} + \frac{p_b^2}{vp}} R \right) \quad (3.6)$$



Фиг. 5. Временная эволюция скорости течения неоднородной жидкости:  $\eta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.5, 1.0$  см (кривые 1–5)



Фиг. 6. Профиль скорости течения неоднородной жидкости по (3.3) при  $t = 1, 10, 30, 60, 120$  с (1–5)

Затухание на бесконечности времени становится экспоненциальным.

$$p \rightarrow 0, \quad V \sim \frac{U_0}{p} K_0\left(\frac{p_b}{\sqrt{vp}} r\right) / K_0\left(\frac{p_b}{\sqrt{vp}} R\right) \sim \frac{U_0}{p} \sqrt{\frac{R}{r}} \exp\left(-\frac{p_b}{\sqrt{vp}}(r - R)\right)$$

При этом отличие от плоскости состоит в наличии дополнительного множителя  $\sqrt{R/r}$ .

**4. Стратифицированная жидкость с диффузией.** В случае плоскости рассмотрим подробно решения характеристического уравнения (1.6) в зависимости от значений параметров в него входящих. Формальное решение характеристического уравнения имеет вид

$$\lambda^2 = \frac{p}{2\nu} \left[ \varepsilon^{-2} + 1 \pm (\varepsilon^{-2} - 1) \sqrt{1 - \left(\frac{p_\kappa}{p}\right)^2} \right], \quad \varepsilon^2 = \frac{\kappa}{\nu} \tag{4.1}$$

$$p_\kappa = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} N \sin \alpha = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} p_b \approx 0.1 p_b$$

Оценка соотношения коэффициентов кинематической вязкости и диффузии в формуле (4.1) взята для раствора поваренной соли в воде. Последнее показывает значительное превосходство характерных диффузионных времен над временами сил плавучести.

Условием действительности корней характеристического уравнения (4.1) будет  $p > p_\kappa$ . С добавлением эффектов диффузии у модели течения оказывается три характерных значения времени разного масштаба (по одному на каждый физический фактор) – вязкое ( $t_v$  или в пространстве образов Лапласа  $p_v$ ), сил плавучести ( $t_b$  или  $p_b$ ) и диффузионное ( $t_\kappa$  или  $p_\kappa$ ). В соответствии с этим могут быть построены три приближения малых времен.

На временах малых по сравнению с диффузионными ( $p_\kappa \ll p \ll p_b \ll p_v$ ) разложим (4.1) в ряд по малому параметру  $p_\kappa/p \ll 1$ .

$$\lambda_+^2 = \frac{p}{2\nu} \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \left( \frac{p_\kappa}{p} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{p_\kappa}{p} \right)^2 \right] \approx \frac{p}{\kappa} \quad (4.2)$$

$$\lambda_-^2 = \frac{p}{2\nu} \left[ 2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left( \frac{p_\kappa}{p} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{p_\kappa}{p} \right)^2 \right] \approx \frac{p}{\nu}$$

Из (4.2) следует, что внутри интервала “диффузионных” времен существуют два пограничных слоя существенно разной толщины – вязкий ( $\sqrt{p/\nu}$ ) и диффузионный ( $\sqrt{p/\kappa}$ ), с сопоставимыми по величине вкладами всех действующих факторов в асимптотику.

На следующем временном диапазоне – временах малых по сравнению с характерными временами сил плавучести ( $p_\kappa \ll p_b \ll p \ll p_v$ ) – раскроем выражение для параметра  $p_\kappa$  и, подставив его в разложения (4.2), устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lambda_+^2 = \frac{p}{2\nu} \left[ \frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 + \frac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 \right] \rightarrow \infty$$

Здесь  $\lambda_+$  – сингулярные корни характеристического уравнения. В текущем приближении все члены решения, соответствующие  $\lambda_+$ , обращаются в нуль. Происходит фактическое понижение порядка системы уравнений движения. Второй (регулярный по  $\varepsilon$ ) корень уравнения (4.1) примет вид

$$\lambda_-^2 = \frac{p}{2\nu} \left[ 2 + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 - \frac{2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 \right] \approx \frac{p}{\nu} \left[ 1 + \left( \frac{p_b}{p} \right)^2 \right]$$

Удерживая члены первого порядка малости, получаем разложение корней характеристического уравнения, соответствующее случаю вязкой стратифицированной жидкости.

В последнем случае на временах малых по сравнению с вязкими временами ( $p_\kappa \ll p_b \ll p_v \ll p$ ) характеристическое уравнение переходит в уравнение однородной жидкости. При этом область эффективного действия последнего приближения ограничивается областью, непосредственно примыкающей к границе тела (причем со временем ее толщина уменьшается). Все течение будет состоять из единственного вязкого пограничного слоя и определяться формулой (2.1). Динамика течения будет удовлетворительно описываться моделью однородной вязкой жидкости.

Смена типа течения будет происходить при переходе к большим временам, существенно превышающим диффузионные. В этом пределе эффектами диффузии пренебрегать уже нельзя, и решение приближается к стационарному. Полагая в системе (1.1)

все временные производные равными нулю, запишем выражение для характеристического уравнения

$$\lambda^4 = -N^2 \sin^2 \alpha / \nu \kappa \quad (4.3)$$

Ограничиваясь в решении уравнения (4.3) корнями с отрицательной действительной частью и определяя выражения постоянных интегрирования по краевым условиям, запишем решения для скорости и возмущения солёности

$$\begin{aligned} U &= U_0 \exp(-\delta \eta) [\cos \delta \eta - \sin \delta \eta] = \sqrt{2} U_0 \exp(-\delta \eta) \cos(\delta \eta + \pi/4) \\ S &= U_0 \frac{2\nu \delta^2}{g \sin \alpha} \exp(-\delta \eta) [\cos \delta \eta + \sin \delta \eta] = U_0 \frac{\sqrt{8\nu} \delta^2}{g \sin \alpha} \exp(-\delta \eta) \cos(\delta \eta - \pi/4) \\ \delta &= [(N \sin \alpha)^2 / 4\nu \kappa]^{1/4} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Пространственную структуру стационарных решений (4.4) определяет комбинационный масштаб длины  $\delta^{-1}$ , характерный для многих видов течений [6–8].

В случае движения стратифицированная жидкость с диффузией наклонного цилиндра уравнения движения в образах Лапласа сводится к одному уравнению с дифференциальным оператором четвертого порядка

$$\left\{ L^2 - p(\kappa^{-1} + \nu^{-1})L + \frac{p^2}{\nu \kappa} \left( 1 + \left( \frac{pb}{p} \right)^2 \right) \right\} V = 0 \quad (4.5)$$

анализ свойств которого аналогичен анализу, проведенному для уравнений (1.4) плоской задачи. Здесь вместо характеристического уравнения (1.6) появляется квадратное уравнение относительно дифференциального оператора цилиндрических функций нулевого порядка. В результате уравнение (4.5) разделяется на два уравнения Бесселя с комплексным аргументом

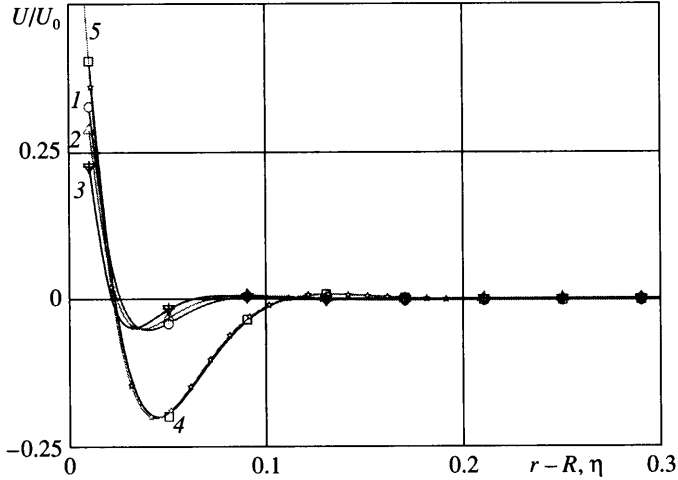
$$(L_2 - l_1^{-2})V = 0 \text{ и } (L_2 - l_2^{-2})V = 0 \quad (4.6)$$

$$l_{1,2}^{-2} = \frac{p}{2}(\kappa^{-1} + \nu^{-1}) \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}(\kappa^{-1} + \nu^{-1})^2 - \frac{p^2}{\nu \kappa} \left( 1 + \left( \frac{pb}{p} \right)^2 \right)} \quad (4.7)$$

Характер решений (4.6) будет существенным образом зависеть от знака подкоренного выражения (4.7). На малых временах ( $p_b/p < k_e$ ,  $k_e = (1 - \epsilon^2)/2\epsilon$ ) его знак положительный, решения описываются монотонными во времени и пространстве функциями Макдональда нулевого индекса с двумя характерными масштабами  $l_1$  и  $l_2$  (два пограничных слоя). На больших временах ( $p_b/p > k_e$ ) – функциями Бесселя комплексного аргумента с возникновением колебательного режима и, наконец, в стационарном пределе ( $p \rightarrow 0$ ) к функциям Кельвина и внутренним волнам нулевой частоты с комбинационным масштабом длины  $(N^2 \sin^2 \alpha / 4\nu \kappa)^{-1/4}$ . Причем неравномерность двойного предельного перехода  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  возникает только в последнем случае ( $t \rightarrow \infty$ ).

В предельном случае  $t \rightarrow \infty$  уравнение (4.5) принимает вид, аналогичный (4.3) для плоскости

$$L_2^2 U = -\frac{N^2 \sin^2 \alpha}{\nu \kappa} U \quad (4.8)$$



Фиг. 7. Пространственная динамика скорости течения стратифицированной жидкости с диффузией при переходе к стационарному течению:  $t = 75, 90, 120$  с (1–3), кривые 4, 5 – стационарные решения для плоскости и цилиндра

Для стационарного решения уравнения (4.6), (4.7) упрощаются, решение операторного уравнения приводит опять к комбинационному масштабу длины  $\delta^{-1}$ , а факторизация оператора четвертого порядка на два оператора второго порядка

$$\left(L_2 - i \frac{N \sin \alpha}{\sqrt{\nu k}}\right) \left(L_2 + i \frac{N \sin \alpha}{\sqrt{\nu k}}\right) u = 0 \quad (4.9)$$

к хорошо известным функциям Бесселя комплексного аргумента – функциям Кельвина нулевого индекса [19]. Выбирая функции, затухающие на бесконечности, и подставляя общее решения в краевые условия (1.4), находим решение стационарной задачи для цилиндрической геометрии

$$\frac{U}{U_0} = \frac{\ker'(\beta R) \ker(\beta r) + \text{kei}'(\beta R) \text{kei}(\beta r)}{\ker'(\beta R) \ker(\beta R) + \text{kei}'(\beta R) \text{kei}(\beta R)} \quad (4.10)$$

$$S = U_0 \frac{\beta^2 \nu}{g \sin \alpha} \frac{\text{kei}'(\beta R) \ker(\beta r) - \ker'(\beta R) \text{kei}(\beta r)}{\ker'(\beta R) \ker(\beta R) + \text{kei}'(\beta R) \text{kei}(\beta R)}, \quad \beta = \delta \sqrt{2}$$

Решение (4.10) от стационарного решения для плоскости отличается только более сильным пространственным затуханием, асимптотически близким к корневой зависимости. Графическое изображение зависимости скорости для плоскости и цилиндра представлено на фиг. 7 и имеет вид струи, близкой по структуре к долинным ветрам [6] или внутренним волнам нулевой частоты [9, 20].

**Заключение.** При построении модели течения необходимо учитывать не только абсолютную величину того или иного физического фактора, но также и особенности геометрии пространственной области и диапазон времен, на который должен распространяться прогноз. Это особенно важно при длительной эволюции течения, вклад разных факторов в уравнения движения может значительно меняться в зависимости от выбранной точки пространства и по мере эволюции течения. На простом примере формирования слоистых течений в стратифицированной среде с диффузией выделены четыре фазы развития течения, описание которых усложняется от модели вязкой однородной

жидкости до модели стратифицированной жидкости с диффузией, причем диапазон применимости моделей по скалярным параметрам меняется в зависимости от выбранного пространственно-временного интервала. Слабые эффекты стратификации, регулярным образом описываемые уравнениями движения, со временем меняют глобальное поведение течения и приводят к формированию тонкой структуры течения, включая сингулярные эффекты диффузии. С этой точки зрения особо выделяются стационарные модели, применимость которых для описания течений нуждается в обосновании, особенно когда исследуются предельные переходы между смежными геометрическими задачами или моделями.

Представленные в работе разложения решения в виде временных рядов позволили регулярным образом описать течения на существенно нестационарной фазе их эволюции. Представляет интерес распространение такого подхода, ранее использованного в работе [15], в задаче формирования течения при импульсном старте горизонтального цилиндра на нестационарное движение других тел конечной формы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 05-01-00154).

**Приложение. Представление решения в виде временных рядов.** При анализе квадратур уравнений вязкой стратифицированной жидкости были выявлены области, в которых из-за нерегулярности поведения подынтегрального выражения численное нахождение интеграла было сопряжено с большими вычислительными трудностями. Учитывая также, что для обращения образов Лапласа задач с диффузией также приходится использовать асимптотические методы, а аналитические выражения могут быть получены в основном только для стационарных задач, было бы целесообразно иметь альтернативный метод расчета нестационарных течений. Ниже в качестве такого метода предлагается использовать представление решений в виде временных рядов. Аналогичный подход был использован для построения решения нестационарного течения, индуцированного диффузией на наклонной плоскости [10], однако графическое представление решения приведено не было.

*Стратифицированная жидкость без диффузии.* В пренебрежении эффектами диффузии уравнения движения плоскости (1.4) сводятся к одному уравнению второго порядка относительно скорости без увеличения числа краевых условий

$$\frac{\nu}{p} V_{\eta\eta} - V = \left(\frac{p_b}{p}\right)^2 V, \quad V|_{\eta=0} = \frac{1}{p} U_0 \quad (\text{П.1})$$

После растяжения переменных  $\chi = \sqrt{p/\nu} \eta$  решение задачи (П.1) ищется в виде ряда

$$V = \frac{U_0}{p} \sum_{n=0} f_{2n+1} \left(\frac{p_b}{p}\right)^{2n} \quad (\text{П.2})$$

Тогда уравнение (П.1) перейдет в систему рекуррентных уравнений для коэффициентов функций  $f$  с тривиальными граничными условиями для всех  $n > 0$ .

$$f_{2n+1}'' - f_{2n+1} = f_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad f_1 = \exp(-\chi) \quad (\text{П.3})$$

$$f_{2n+1}(0) = f_{2n+1}(\infty) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{П.4})$$

Таким образом, за нетривиальное граничное условие в нуле отвечает нулевой член разложения (П.2). В силу однородности граничных условий (П.4) общие решения однородных уравнений (П.3) будут обращаться в нуль. На каждом шаге рекуррентной процедуры необходимо найти только частное решение неоднородного уравнения, порождаемого в конечном итоге единственной причиной  $-f_1$ . Независимость вида левой части

уравнений (П.3) от номера рекуррентной процедуры и постоянство коэффициентов дифференциальных уравнений приводят к появлению в решениях вековых членов, число которых растет вместе с номером рекуррентной процедуры

$$f_{2n+1} = \exp(-\chi) \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \chi^{k+1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{П.5})$$

В результате выражение для образа скорости приобретает вид степенного ряда, из которого выделена экспоненциальная зависимость

$$V = \frac{U_0}{p} \exp(-\chi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{pb}{p}\right)^{2n} P_n \quad (\text{П.6})$$

При  $n > 0$  полиномы

$$P_n = \sum_{m=1}^n P_{nm} \chi^m$$

удовлетворяют уравнениям

$$P_n'' - 2P_n' = -P_{n-1} \quad (\text{П.7})$$

по которым можно построить рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$P_{0,0} = 1, \quad P_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}, \quad P_{n,1} = P_{n,2}, \quad (\text{П.8})$$

$$2(n-m)P_{n,n-m} = (n-m+1)(n-m)P_{n,n-m+1} + P_{n-1,n-m-1}, \quad m = \overline{1, n-2}, \quad n = 3, 4, \dots$$

Выражения для первых трех полиномов имеют вид

$$P_1 = \frac{1}{2}\chi, \quad P_2 = \frac{1}{8}\chi(\chi+1), \quad P_3 = \frac{1}{48}\chi(\chi^2+3\chi+3), \dots$$

Обращение выражения (П.6) дает вид скорости в физическом пространстве

$$\frac{U}{U_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4p_b t)^{2n} \sum_{m=1}^n P_{nm} \left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right)^m i^{4n-m} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\nu t}}\right) \quad (\text{П.9})$$

здесь  $i^n \operatorname{erfc}(z)$  – кратный интеграл вероятности [19].

В выражении (П.9), как и ранее в (3.4), отдельно выделены вклады чисто вязкого вовлечения жидкости (первый член в фигурных скобках) и реакции на возмущение стратифицированной среды.

Стратифицированная жидкость с диффузией. В пространстве образов Лапласа, когда определяющая система имеет вид (1.4), перейдем к безразмерным переменным

$$V = \frac{U_0}{p} f(\chi), \quad \sigma = \frac{\sin \alpha}{\Lambda} \frac{U_0}{p^2} h(\chi), \quad \chi = \sqrt{\frac{p}{\kappa}} \eta \quad (\text{П.10})$$

где  $f$  и  $h$  – новые зависимые переменные от новой (растянутой) независимой переменной  $\chi$ .

На бесконечности все возмущения затухают. Как и ранее (представление (П.2)), решения ищутся в виде рядов

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{pb}{p}\right)^{2n}, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\frac{pb}{p}\right)^{2n} \quad (\text{П.11})$$

Подстановка выражений (П.11) в обезразмеренную систему уравнений движения в отличие от случая бездиффузионной жидкости приводит к системе рекуррентных дифференциальных уравнений, увеличивается также и число краевых условий.

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2}{d\chi^2} - 1\right) f_n = h_{n-1}, \quad \left(\frac{d^2}{d\chi^2} - 1\right) h_n = -f_n \quad (\text{П.12})$$

$$f_0(0) = 1, \quad f_n(0) = 0, \quad n > 0, \quad h'_n(0) = 0, \quad n \geq 0$$

Как и в разложении (П.5), в функциональных рядах (П.11) можно определить характер зависимости коэффициентных функций от  $\chi$  и, таким образом, перейти от дифференциальных рекуррентных связей к алгебраическим. Однако в отличие от (П.5) характер зависимости усложняется прежде всего за счет появления дополнительной экспоненциальной функции, отвечающей за плотностной пограничный слой, усложняются и рекуррентные связи.

$$f_n = P_n^u(\chi) \exp(-\varepsilon\chi) + Q_{n-1}^u(\chi) \exp(-\chi), \quad (\text{П.13})$$

$$h_n = P_n^s(\chi) \exp(-\varepsilon\chi) + Q_n^s(\chi) \exp(-\chi)$$

$$P_n^{u,s}(\chi) = \sum_{m=0}^n P_{n,m}^{u,s} \chi^m, \quad Q_n^{u,s}(\chi) = \sum_{m=0}^n Q_{n,m}^{u,s} \chi^m \quad (\text{П.14})$$

Подставляя выражения (П.13) в систему (П.12) и учитывая значения первых коэффициентов полиномов (П.13),  $P_{0,0}^u = 1$ ,  $Q_{-1}^u = 0$  приходим к двум рекуррентным алгебраическим системам относительно коэффициентов  $\{P_{n,m}^u, P_{n,m}^s\}$  и  $\{Q_{n-1,m}^u, Q_{n,m}^s\}$ , перекрестные связи между которыми устанавливаются через краевые данные. Ниже система рекуррентных уравнений приведена в упорядоченном частично разрешенном виде, что позволяет поэтапно решать ее с использованием систем компьютерной алгебры.

*Порядок решения системы рекуррентных уравнений*

0. Начальные значения.  $P_{0,0}^u = 1$ ,  $Q_{-1,0}^u = 0$ .

$$1. P_{n,n}^u = (-1)^n \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{2^n n!}, \quad P_{n,n}^s = \frac{(-1)^n}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{2^n n!}.$$

$$2. Q_{n-1,n-1}^u = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}, \quad Q_{n,n}^s = -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^n \frac{1}{2^n n!}.$$

3. Краевые условия для скорости

$$P_{n,0}^u = -Q_{n-1,0}^u, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$4. (1-\varepsilon^2)P_{n,n-1}^s = P_{n,n-1}^u - 2\varepsilon n P_{n,n}^s, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$5. 2(m+1)\varepsilon^{-1}P_{n,m+1}^u = (m+2)(m+1)\varepsilon^{-2}P_{n,m+2}^u - P_{n-1,m}^s, \quad m = \overline{0, n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

6. Краевые условия для солёности

$$Q_{n,0}^s = P_{n,1}^s + Q_{n,1}^s - \varepsilon P_{n,0}^s, \quad n = 1, 2, \dots$$



$$7. (1 - \varepsilon^2)Q_{n-1, n-2}^u = 2(n-1)Q_{n-1, n-1}^u + \varepsilon^2 Q_{n-1, n-2}^s, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$8. (1 - \varepsilon^2)P_{n, m}^s = (m+2)(m+1)P_{n, m+2}^u - 2\varepsilon(m+1)P_{n, m+1}^s + P_{n, m}^u, \quad m = \overline{0, n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$9. 2(m+1)Q_{n, m+1}^s = (m+2)(m+1)Q_{n, m+2}^s + Q_{n-1, m}^u, \quad m = \overline{0, n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$10. (1 - \varepsilon^2)Q_{n-1, m}^u = \varepsilon^2 Q_{n-1, m}^s - (m+2)(m+1)Q_{n-1, m+2}^s + 2(m+1)Q_{n-1, m+1}^u,$$

$$m = \overline{0, n-3}; \quad n = 3, 4, \dots$$

В результате решения системы рекуррентных уравнений и обращения образов Лапласа (П.10) [19] выражения для искомых функций скорости и солёности в физическом пространстве запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{U}{U_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} (4p_b t)^{2n} \left\{ \sum_{m=0}^n P_{n, m}^u \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right)^m i^{4n-m} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=0}^{n-1} Q_{n-1, m}^u \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right)^m i^{4n-m} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} \\ S &= \frac{\sin \alpha}{\Lambda} (4U_0 t) \sum_{n=0}^{\infty} (4p_b t)^{2n} \left\{ \sum_{m=0}^n P_{n, m}^s \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right)^m i^{4n-m+2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \right. \\ &+ \left. Q_{n, m}^s \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right)^m i^{4n-m+2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

При изучении временной эволюции скорости в рамках задачи с учетом эффектов диффузии коэффициенты полиномов  $\{P_{n, m}^u, P_{n, m}^s\}$  и  $\{Q_{n-1, m}^u, Q_{n, m}^s\}$  рассчитывались по системе рекуррентных уравнений с использованием пакета Maple. Временной ряд (П.15) представлялся в виде конечной суммы. При этом в силу малого значения параметра  $\varepsilon$  результаты расчетов сравнивались с построенными ранее (в рамках модели среды без диффузии) зависимостями скорости от координаты и времени. Для выбранных значений номеров обрыва ряда ( $n = 3, 5, 10, 20$ ) сравнение графиков временной эволюции скорости, как для малых (фиг. 3, б), так и для больших (фиг. 4, б) расстояний от плоскости показало монотонный рост диапазона применимости представления ряда конечной суммой с ростом номера обрыва ряда  $n$ . Увеличение числа членов суммы до 20 позволяет удовлетворительно описывать поведение скорости до времен порядка нескольких периодов плавучести. Построенные для  $n = 20$  профили скорости также показали удовлетворительное совпадение результатов в рамках заданного временного диапазона.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. Теодорович Э.В., Городцов В.А. О некоторых сингулярных решениях уравнений внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16. № 7. С. 776–779.
3. Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 52–61.

4. Scase M.M., Dalziel S.B. Internal wave fields and drag generated by a translating body in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 2004. V. 498. P. 289–313.
5. Redekopp L.G. The development of horizontal boundary layers in stratified flow. P. 2. Diffusive flow // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt. 3. P. 513–525.
6. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит. 1949. 520 с.
7. Phillips O.M. On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid. // Deep-Sea Res. 1970. V. 17. № 3. P. 435–443.
8. Linden P.F., Weber J.E. The formation of layers in a double diffusive system with sloping boundary // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 4. P. 757–773.
9. Kerr O.S. Double-diffusive instabilities at a sloping boundary // J. Fluid Mech. 1991. V. 225. P. 333–354.
10. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 50–56.
11. Garrett C., MacCready P., Rhines P. Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating stratified flow near a sloping boundary // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 291–323.
12. Woods A.W. Boundary-driven mixing // J. Fluid Mech. 1991. V. 226. P. 625–654.
13. Standing R.G. The Rayleigh problem for a slightly diffusive density-stratified fluid // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Pt. 4. P. 673–688.
14. Bretherton F.P. The time-dependent motion due to a cylinder moving in an unbounded rotating or stratified fluid // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. Pt. 3. P. 545–570.
15. Байдулов В.Г., Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д. Формирование течения при начале движения горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 6. С. 821–828.
16. Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д. Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 119–132.
17. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
18. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
19. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 830 с.
20. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Диссипативно-гравитационные волны в докритических режимах многокомпонентной конвекции // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37. № 4. С. 513–519.

Москва

Поступила в редакцию  
31.VII.2006