

УДК 532.526.2:532.556.2.4

© 2007 г. Г. Л. КОРОЛЕВ, М. А. ЛУШНИКОВ

ИЗУЧЕНИЕ ЛАМИНАРНОГО ОТРЫВА ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ НА СТЕНКЕ

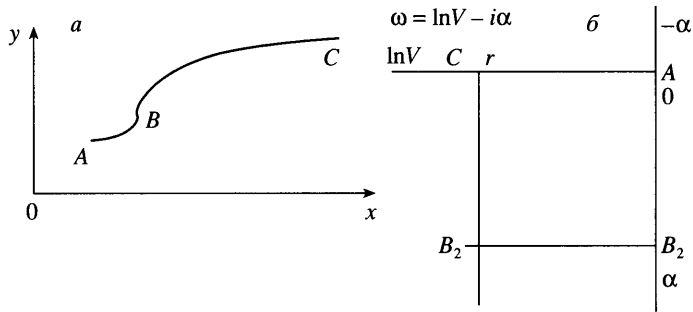
Рассмотрено семейство расширяющихся плоских каналов с кусочно-постоянным распределением скорости и давления вдоль стенки. С помощью метода сращиваемых асимптотических разложений исследовано плоское течение вязкой несжимаемой жидкости при больших, но докритических числах Рейнольдса в окрестности точки скачка давления на стенке канала. Показано, что если величина перепада давления порядка $O(Re^{-1/4})$, в окрестности этой точки возникает классическая область взаимодействия вязкого пристеночного пограничного подслоя и внешнего невязкого потока. Сформулированная задача для области взаимодействия решена численно. Определены асимптотические значения параметра перепада давления, соответствующие безотрывному обтеканию, построены картины отрывного течения.

Ключевые слова: диффузор, безотрывное обтекание, пограничный слой, взаимодействие, отрыв.

Одним из важных явлений, сопровождающих течения в диффузорах, есть отрыв потока, который, как правило, существенно снижает технические характеристики диффузора. Для предотвращения отрыва снижают угол раствора диффузора или применяют другие специальные методы управления потоком, например отсос или отвод пограничного слоя. Примеры диффузоров, полученных из условия предотрывности пограничного слоя вдоль всей протяженности стенки с максимальным торможением потока, приводятся в [1]. Эти диффузоры имеют колоколообразную форму с большими, до 60° , углами раствора вблизи входного сечения, где безотрывный характер течения нарушается. В [2] спроектированы расширяющиеся плоские каналы с отбором части потока на стенке с гидродинамически целесообразным кусочно-постоянным распределением скорости на поверхности диффузора. При этом использовался математический аппарат теории струй невязкой жидкости [3]. Рассмотрим профилирование таких диффузоров с различным расширением без щелевого отвода потока на стенке.

1 Постановка задачи. Предположим, что плоское течение идеальной, несжимаемой и невесомой жидкости в канале безвихревое и установившееся. Введем потенциал ϕ скорости $V = V(x, y) = \text{grad}\phi$ и функцию тока ψ обычным образом. Течение в диффузоре рассматривается в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, ось канала направлена горизонтально и совпадает с координатной прямой X . Пусть на участке стенки AB (фиг. 1, *a*) величина скорости постоянна и равна $V = V_1 = 1$, а на участке BC $V = V_2 < 1$. Введем комплексный потенциал $W(z) = \phi + i\psi$ и функцию Мичелла–Жуковского $\omega = \ln V - i\alpha$, α – угол отклонения стенки канала от его оси. Задавая распределение скорости годографом в плоскости Митчелла–Жуковского $\omega = \ln V - i\alpha$ и затем по особенностям определяя производную комплексного потенциала $dW(z)/d\omega$, течение в физической плоскости $z = x + iy$ восстанавливаем квадратурой: $dz = e^{-\omega}(dW/d\omega)d\omega$.

В случае кусочно-постоянного распределения скорости на границе канала, показанного на фиг. 1, *a*, в плоскости параметрического переменного ω будем иметь течение в прямоугольнике, фиг. 1, *б*. Здесь и далее $r = \ln V_2$. Скачку скорости от величины V_1 до V_2 ,



Фиг. 1. Течение в физической плоскости (а) и в плоскости Митчелла–Жуковского (б)

ответствующему точке B плоскости z , соответствует отрезок B_1B_2 плоскости ω . Комплексный потенциал течения имеет в плоскости ω источник в точке A и сток в C и представляется двойной решеткой источников и стоков с периодом $2r$ вдоль действительной оси. Во всей плоскости производная комплексного потенциала – аналитическая функция с периодами $2r$ и $2i\alpha_B$, которую можно восстановить по особенностям [3].

Введем параметрическую переменную $u = \pi\omega/(2r)$ для использования аппарата θ -функций с квазипериодами $\tau_1 = \pi$ и $\tau_2 = \pi\tau$, здесь и далее $\tau = i\alpha_B/r$. Потенциал $W(\omega)$ определяется с точностью до константы. Выберем ее так, чтобы он был равен нулю в начале координат $O(0,0)$. Производная потенциала будет иметь простые полюсы в точках $u = -\pi/2$ и 0 и простые нули в точках $u = -\pi/2 - \pi\tau/2$ и $u = -\pi\tau/2$ плоскости параметрического переменного u . В плоскости ω им соответствуют простые нули в точках B_1 и B_2 и простые полюсы в A и C . По этим особенностям можно [3] восстановить производную комплексного потенциала и представить в виде

$$\frac{dW}{du} = -\frac{2\vartheta_3(u)\vartheta_4(u)}{\pi\vartheta_1(u)\vartheta_2(u)} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{d}{du}\ln\vartheta_1(u) + \frac{d}{du}\ln\vartheta_2(u)\right) = -\frac{2}{\pi}(\operatorname{ctg}u + 4S_1 + \operatorname{tg}u - 4S_2)$$

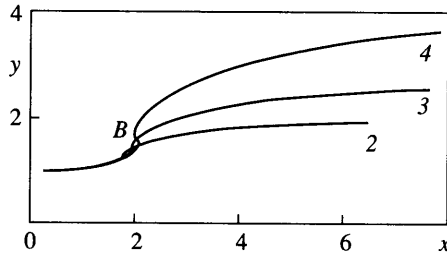
$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} q^{2n} \sin 2nu \quad (1.1)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} q^{2n} \sin 2nu, \quad q = e^{\pi/\tau}$$

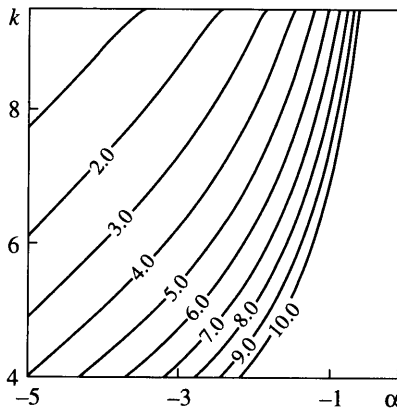
Вклад слагаемых S_1 и S_2 в выражение (1.1) пренебрежимо мал в случае, когда $V_2 > 0.1$ (тогда $q \sim 10^{-2}$). С такой малой погрешностью производная потенциала задается выражением

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2r}\omega + \operatorname{tg}\frac{\pi}{2r}\omega\right) \quad (1.2)$$

Это выражение (1.2) точно при $\alpha_B = \infty$. При этом в области годографа течению отвечает полуполоса с источником в точке A и стоком в C , а в физической плоскости в точке B (фиг. 1, а) кривизна стенки канала меняет знак и возникает особенность в форме бесконечнолистного спирального завитка, как в известной из теории струй первой кавитационной схеме Тулина [4]. На фиг. 2 приведены формы стенок диффузоров различного расширения. Изучалась зависимость длины диффузора от угла α отклонения стенки от оси на входе в канал и степени его расширения. Как видно из фиг. 3, длина диффузора существенно зависит от параметра α и в несколько меньшей степени от расширения канала.



Фиг. 2. Профили диффузоров с расширением 2, 3 и 4

Фиг. 3. Зависимость длины диффузора от угла α отклонения стенки на входе и отношения скоростей $k = V_2/V_1 \cdot 10$

В случае вязкого течения в таких диффузорах вероятная область отрыва располагается в окрестности скачка скорости на стенке. Исследуем возможность отрыва ламинарного пограничного слоя в этой окрестности. Для этого рассмотрим течение в области взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком, играющей основную роль в явлениях отрыва из-за взаимного влияния вязкого пристеночного слоя и внешнего невязкого потока. Она характеризуется большим градиентом давления до точки отрыва, приводящего к быстрому торможению жидкости вблизи стенки и появлению области возвратного течения вниз по потоку от точки отрыва. Сложность физических процессов в области взаимодействия вызывает математические трудности при решении уравнений, описывающих течение. В то время как везде вне области взаимодействия решение часто может быть получено в аналитическом или, по крайней мере, в автомодельном виде, анализ течения в самой области взаимодействия требует использования специальных численных методов.

Рассмотрим двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности малой области, лежащей на поверхности твердого тела, при прохождении которой происходит изменение давления на малую величину. Пусть L^* характерный размер тела в рассматриваемом течении (например, ширина входной части канала или длина профиля), а u_0^* – характерная скорость (скорость внешнего потенциального течения на поверхности канала при подходе к скачку давления). Индекс “*” относится к размерным физическим величинам. Определим число Рейнольдса как $Re = u_0^* L^*/\nu^* \rightarrow \infty$, где ν^* – коэффициент

кинематической вязкости. Введем безразмерную декартовую систему координат $x = x^*/L^*$, $y = y^*/L^*$ с началом координат, расположенным в этой малой области изменения давления, и соответствующие безразмерные компоненты вектора скорости на эти оси $u = u^*/u_0^*$, $v = v^*/v_0^*$; также безразмерную величину давления $p = (p^*(x, y) - p_0^*)/\rho u_\infty^{*2}$, где p_0^* – величина давления при подходе вдоль поверхности тела к рассматриваемой точке разрыва в величине давления слева. Будем предполагать, что в окрестности точки $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ происходит в некоторой малой окрестности $\varepsilon(\text{Re})$ быстрое изменение давления на величину порядка $\Delta p = \delta(\text{Re})h$, где величина h – постоянная, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тогда положительные значения h соответствуют росту давления, отрицательные – его падению. Рассмотрим сначала область внешнего потенциального течения вблизи исследуемой точки. Асимптотический анализ уравнений Навье–Стокса в этой области связан с предельным переходом

$$x = O(1), \quad y = O(1), \quad \text{Re} \rightarrow \infty$$

Разложение искомых функций течения представим в виде

$$u = 1 + \delta u_1(x, y) + \dots, \quad v = \delta v_1(x, y) + \dots, \quad p = \delta p_1(x, y) + \dots$$

Тогда для u_1 , v_1 , p_1 получим линеаризованные уравнения Эйлера, из которых следует, что комплексно-сопряженная скорость $w(z) = -u_1 + i v_1$ – аналитическая функция переменной $z = x + iy$, а возмущенное давление удовлетворяет линеаризованному уравнению Бернулли $p_1 = -u_1$.

Поскольку речь идет о таких режимах течения, когда отрыв потока либо вообще отсутствует, либо локализован в малой окрестности рассматриваемой точки, краевое условие на поверхности твердого тела – условие непротекания: $v_1(x, 0) = f_1'(x)$, где $f(x) = \delta f_1(x)$ – форма твердой поверхности. Тогда в окрестности точки разрыва давления главный член разложения $w_1(z)$ имеет вид

$$w_1(z) = \frac{ih}{\pi} \ln(z) + h + o(1), \quad |z| \rightarrow 0$$

Выделяя действительную и мнимую часть этого выражения и используя уравнение Бернулли, приходим к выводу, что давление на верхней границе пограничного слоя имеет скачок $p_1 = 0$, $x < 0$, $p_1 = h$, $x > 0$, а форма твердой поверхности $f(x) = \delta h/\pi(x \ln|x| - x) + o(1)$.

Исследование влияния скачка давления очень хорошо изучено при исследовании сверхзвуковых течений [5]. Показано, что отрыв впервые возникает, когда величина перепада давления $\delta = \text{Re}^{-1/4}$, и происходит это в области взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком, характерный продольный размер которой $\varepsilon = O(\text{Re}^{-3/8})$.

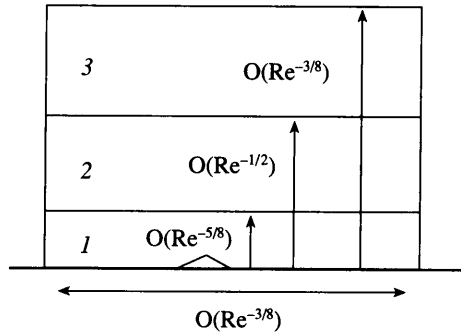
Эта область имеет трехпалубную структуру. Толщина первого слоя, непосредственно примыкающего к стенке (обл. 1 на фиг. 4), величина порядка $O(\text{Re}^{-5/8})$. Здесь течение вязкое и описывается уравнениями Прандтля. Однако распределение давления заранее не задано.

Основная часть пограничного слоя области взаимодействия (обл. 2 на фиг. 4) имеет толщину порядка $O(\text{Re}^{-1/2})$ и включает в себя все струйки тока, приходящего в область взаимодействия пограничного слоя, за исключением пристеночных. Здесь в главном приближении сохраняется приходящий профиль скорости

$$U = U_{00}(\eta) + \dots, \quad y = \text{Re}^{-1/2} \eta$$

$$U_{00}(\eta) = \lambda \eta + \dots, \quad \eta \rightarrow 0$$

и наклон линий тока поперек этой области остается неизменным. Здесь λ – безразмерная величина трения на поверхности тела при подходе пограничного слоя к области взаимодействия.



Фиг. 4. Область взаимодействия

Наконец, внешняя часть области взаимодействия (обл. 3 на фиг. 4) имеет поперечный размер $O(Re^{-3/8})$ и охватывает часть потенциального потока. Здесь течение описывается системой линеаризованных уравнений Эйлера. Ее решение дает связь между изменениями давления в подслое с наклоном линий тока на его внешней границе. Для сверхзвукового течения эта связь описывается формулой Аккерета, в случае течения несжимаемой жидкости она дается формулой интеграла тонкого профиля [6]. Более подробно об области взаимодействия пограничного слоя и внешнего невязкого потока для дозвуковых, сверхзвуковых и трансзвуковых течений можно узнать в [6–9].

2. Постановка и решение задачи для области взаимодействия. Сделаем следующее преобразование координаты $y = y' + f(x)$ и введем переменную $v = v' + uf'(x)$. Тогда после соответствующих аффинных преобразований задача для вязкого подслоя выглядит следующим образом:

$$x = Re^{-3/8} \lambda^{-5/4} X, \quad y' = Re^{-5/8} \lambda^{-3/4} Y$$

$$u = Re^{-1/8} \lambda^{1/4} U + \dots, \quad v' = Re^{-3/8} \lambda^{3/4} V + \dots$$

$$p = Re^{-1/4} \lambda^{1/2} P + \dots, \quad h = \lambda^{1/2} H$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{dP}{dX} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

$$U(X, 0) = V(X, 0) = 0$$

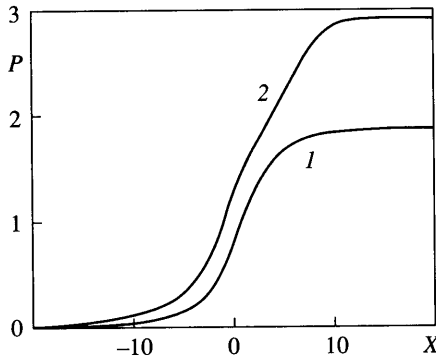
$$U \rightarrow Y + \dots, \quad X \rightarrow -\infty$$

$$U \rightarrow Y + G(X) + \dots, \quad Y \rightarrow \infty$$

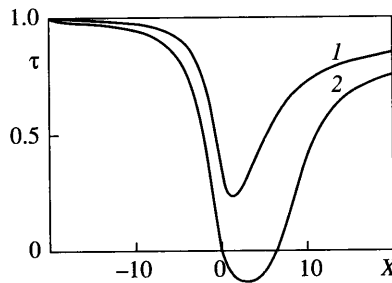
$$G(X) - F''(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P'(t) dt}{t - X}$$

$$F(X) \rightarrow \frac{H}{\pi} (X \ln |X| - X) + \dots, \quad X \rightarrow \pm \infty$$

Здесь $Y = 0$ соответствует плоскости обтекаемой поверхности. Функция $F(X)$ определяет форму поверхности твердого тела в области взаимодействия. Будем предполагать,



Фиг. 5. Распределение поверхностного давления: 1, 2 – $H = 2$ и 3



Фиг. 6. Распределение поверхностного трения $\tau(X)$: 1, 2 – $H = 2$ и 3

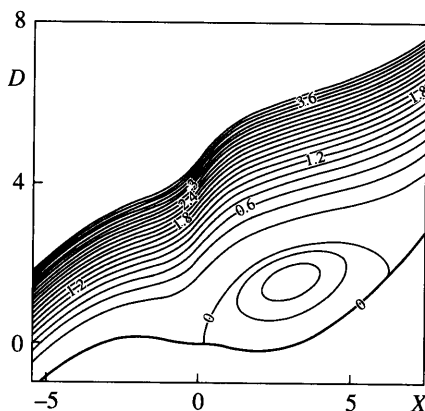
что в этой области форма поверхности скруглена так, что кривизна ее остается конечной величиной, определяемой, например, по формуле

$$F''(X) = \frac{H}{\pi} \frac{X}{X^2 + 1}$$

Влияние скругления будет проявляться вне области взаимодействия наличием дополнительных членов в разложении для давления, порядок которых меньше δ .

Поставленная задача зависит от одного параметра H , связывающего величину перепада давления и безразмерную величину поверхностного трения пограничного слоя перед областью взаимодействия. Эта задача решалась численно с помощью прямого метода решения уравнений теории взаимодействия, разработанного в [6], для которого требовалось в среднем 5–6 итераций для получения численного решения данной нелинейной системы уравнений.

В основном использовалась неравномерная конечно-разностная сетка размером соответственно 200×150 точек с минимальными значениями шагов 0.02 и 0.02 по X и Y вблизи точки $X = 0$ и поверхности тела. Проверка сходимости решения по сетке осуществлялась увеличением числа конечно-разностных точек по X и Y в два раза и уменьшением минимального значения шага по X и Y также в два раза. Максимальные различия в полученных решениях наблюдались в области максимума градиента давления, которые не превышали 4%. На фиг. 5 представлено распределение давления при значениях параметра подобия равных $H = 2$ и 3. На фиг. 6 представлено распределение трения $\tau(X)$ в области взаимодействия при этих же параметрах подобия. Отрыв пограничного слоя впервые возникает при значении параметра подобия $H \approx 2.3$. Картина отрывного течения представлена на фиг. 7, параметр $D = Y + F(X)$.



Фиг. 7. Линии тока отрывного течения при $H = 3$

Таким образом, численное решение в области взаимодействия показывает, что учет влияния вязкости позволяет сгладить скачок давления в распределении давления невязкого решения на стенке диффузора и в некотором диапазоне изменения параметра подобия H обеспечивает здесь безотрывное течение. С ростом параметра H наблюдается возникновение локального отрыва и дальнейшее его развитие.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-08-33404а), государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-8597.2006.1) и ВЦП РНПВШ.2.1.1.5904.

Заключение. Методом обратной задачи теории струй для невязкого течения получено семейство расширяющихся каналов с кусочно-постоянным распределением скорости и давления вдоль стенки. В невязком случае скачок скорости определяет форму таких каналов с особенностью на стенке в виде завитка спирали. Численно в рамках асимптотической теории решена задача о возникновении ламинарного отрыва в окрестности скачка давления на стенке. Определены асимптотические значения параметра, связывающего величину перепада давления и безразмерную величину поверхностного трения пограничного слоя перед областью взаимодействия, соответствующие безотрывному обтеканию, построены картины отрывного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиневский А.С., Бычкова Л.А. Аэродинамические характеристики плоских и осесимметричных диффузоров с предотрывным состоянием турбулентного пограничного слоя // Тепло- и массоперенос. М.: Энергия, 1968. С. 100–115.
2. Степанов Г.Ю. Построение плоских каналов и решеток турбомашин с безотрывным течением // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 30–42.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. Tulin M.P. Supercavitating flows-small-perturbation theory // J. Ship. Res. 1964. V. 7. № 3 P. 16–37.
5. Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
6. Сычёв В.В., Рубан А.И., Сычёв Вик.В., Королёв Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычёва. М.: Наука, 1987. 256 с.
7. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Лунатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 455 с.
8. Жук В.И. Волны Толмина-Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
9. Диесперов В.Н., Королёв Г.Л. Возникновение сверхзвуковых зон и зон локального отрыва при трансзвуковом стационарном обтекании неровности поверхности в режиме свободного взаимодействия // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 1. С. 50–59.