

УДК 532.517.4

© 2007 г. Д. Ю. ЖИЛЕНКО, О. Э. КРИВОНОСОВА, Н. В. НИКИТИН

## ПРЯМОЙ РАСЧЕТ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ШИРОКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Представлены результаты численного исследования нестационарных, изотермических трехмерных течений вязкой несжимаемой жидкости, формирующихся при ламинарно-турбулентном переходе в широком сферическом слое при встречном вращении сферических границ. Расчеты проведены при параметрах подобия, соответствующих экспериментальным данным [1, 2]. Численные исследования включают как решение полной системы уравнений Навье–Стокса, так и анализ линейной устойчивости стационарных осесимметричных течений по отношению к трехмерным возмущениям. Впервые рассчитан стохастический режим течения, определены границы существования различных режимов течения и области гистерезиса. Получены пространственные структуры и частотные характеристики течений, позволяющие дополнить и уточнить имеющиеся экспериментальные результаты.

*Ключевые слова:* прямой расчет, уравнения Навье–Стокса, линейная устойчивость, сферический слой, пространственные структуры, границы существования режимов, гистерезисы, переход к хаосу.

В работе численно изучается переход к стохастичности в сферическом течении Куэтта – сдвиговом течении вязкой несжимаемой жидкости между двумя сферическими границами, которое возникает под действием вращения границ вокруг общей оси. Эти исследования представляют интерес для понимания процессов в тех природных и технических объектах, течения в которых формируются под влиянием вращения и сферической геометрии.

Течение в сферическом слое определяется тремя параметрами подобия: двумя числами Рейнольдса  $Re_1$ ,  $Re_2$  и относительной толщиной слоя  $\delta$ :  $Re_k = \Omega_k r_k^2 / \nu$ ,  $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$ . Здесь  $r_k$ ,  $\Omega_k$  ( $k = 1, 2$ ) – радиус и угловая скорость вращения соответствующей сферы (1 – внутренней, 2 – внешней),  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости в слое. При малых числах  $Re_1$  в слое образуется осе- и экваторосимметричное стационарное течение (основное течение), состоящее из азимутального вращения и меридиональной циркуляции. Интенсивность и форма меридиональной циркуляции определяются приведенными выше параметрами подобия [3].

В случае вращения только одной из сферических границ меридиональная циркуляция состоит из одного вихря с движением жидкости в направлении от полюса к экватору вдоль вращающейся границы. В случае вращения двух сферических границ в разные стороны возможно образование двухвихревой меридиональной циркуляции с противоположным направлением вращения вихрей, один из которых вызван вращением внутренней сферы, другой – вращением внешней сферы [3]. Аналитическое решение для основного течения отсутствует. Основное течение имеет все три компоненты скорости, существенно зависит от числа  $Re_1$  и теряет устойчивость с его увеличением. По виду вторичного течения, возникающего на пределе устойчивости при вращении только внутренней сферы, сферические слои условно принято разделять на тонкие и широкие. В тонких слоях вторичное течение стационарно и вблизи экватора представляет собой

осесимметричные и симметричные относительно плоскости экватора кольца Тейлора. В широких слоях вторичное течение нестационарно и представляет собой неосесимметричные и несимметричные относительно плоскости экватора вихри, распространяющиеся в направлении вращения внутренней сферы.

Экспериментальные исследования переходов к стохастичности в широких слоях начались с изучения вращения только внутренней сферы [4, 5], более поздние результаты подробно представлены в [3]. Переходы к стохастичности в широких слоях экспериментально изучены и для случая вращения обеих сферических границ [1, 2], подробнее результаты этих экспериментов представлены ниже.

Первые результаты прямого расчета эволюции течений во вращающихся сферических слоях получены для осесимметричных вторичных течений в случае вращения только внутренней сферы. Развитие осесимметричных вторичных течений в тонких слоях, переходы между различными стационарными режимами течения при изменении числа  $Re_1$  и неединственность численных решений в этих условиях к настоящему времени достаточно хорошо изучены в численных расчетах (например, в [6, 7]). Зависимость структуры меридиональной циркуляции основного течения вблизи предела устойчивости от толщины слоя позволила определить в [8, 9] область существования неосесимметричных вторичных течений –  $\delta > 0.3$ .

Прямое численное моделирование вторичных течений в широких слоях началось более 15 лет назад с использованием сначала спектральных и полуспектральных, а затем и разностных численных методов. В работах [9, 10] проведены первые расчеты трехмерных вторичных течений вблизи предела устойчивости в тонких ( $\delta = 0.06$ ) и в широких слоях ( $\delta = 0.54-1.33$ ) при вращении только внутренней границы. В [11, 12] в тонком слое  $\delta = 0.11$  рассчитаны неосесимметричные течения на пределе устойчивости при вращении обеих границ, вторичные режимы течения после первых двух бифуркаций, а также переходы между ними в случае вращения сфер в одну сторону. В [13, 14] моделировалась формирование вторичных течений – спиральных вихрей Тейлора–Гертлера – в слое  $\delta = 0.14$  при вращении только внутренней границы. Во всех полученных ранее численных результатах сравнение с экспериментом проводилось в основном по величине критического значения числа  $Re$ , соответствующего пределу устойчивости, и по виду пространственных структур течения.

В работе [15] представлены результаты прямого расчета нестационарных трехмерных режимов течения в широком сферическом слое  $\delta = 1$  при встречном направлении вращения границ. Рассчитаны все режимы течения, предшествующие переходу к стохастичности и наблюдавшиеся в экспериментах [1.2] при увеличении  $Re_1$  и постоянном  $Re_2 = -900$ . Получены их пространственные структуры и частотные характеристики. Настоящая работа продолжает начатые в [15] исследования: рассчитан хаотический режим течения, определены границы существования и области гистерезиса различных режимов течения, пространственная структура квазипериодического режима течения представлена как суперпозиция пространственных структур течений на каждой из частот.

**1. Постановка задачи и численный метод.** Течение описывается уравнениями Навье–Стокса и неравности для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \text{rot} \mathbf{U} - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} \mathbf{U} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0$$

Уравнения записываются в сферической системе координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями. На границах ставятся условия прилипания и непротекания:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0, \quad u_\theta(r = r_k) = 0$$

$$k = 1, 2$$

Вычислительный алгоритм подробно изложен в [16, 17] и базируется на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности интегрирования по времени. Режим течения определяется по виду решения при  $t \rightarrow \infty$ . Таким методом решались как полная система уравнений (1.1), так и система уравнений, описывающая осесимметричное и симметричное относительно экватора течение, подобное основному.

Линейная устойчивость этого течения исследовалась по отношению к трехмерным возмущениям с азимутальным числом  $m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Система линеаризованных относительно возмущений уравнений интегрировалась по времени до выхода решения на асимптотическое поведение  $\sim \exp(\sigma t)$ . Действительная часть показателя экспоненты – это инкремент нарастания/затухания возмущения  $\lambda$ . Мнимая часть определяет частоту  $f = -\sigma_{im}/2\pi$  и/или фазовую угловую скорость рассматриваемой моды  $C_\omega = -\sigma_{im}/m$ .

При решении полной нелинейной системы уравнений Навье–Стокса (1.1) в качестве начальных условий задавались либо течение Стокса с возмущением небольшой амплитуды по азимутальному углу, либо решение при близком значении  $Re_1$  с возмущением или без него. Возмущение задавалось несимметричным относительно экватора.

Тестирование метода было проведено в методических расчетах [17] в широком слое вблизи предела устойчивости при вращении только внутренней сферы. Полученные результаты согласуются с результатами экспериментов [4, 5] и вычислений [9] как по пространственной структуре вторичного течения, так и по величине числа  $Re_{1c}$ , соответствующему пределу устойчивости.

Для дискретизации по пространству использовались неравномерные по радиусу и меридиональному углу сетки со сгущением узлов в областях наибольших градиентов скорости, а именно по  $\theta$  вблизи экватора, по  $r$  вблизи сферических границ. При анализе линейной устойчивости расчеты проводились на сетках со следующим количеством узлов:  $N_r$  – от 50 до 120,  $N_\theta/2$  – от 100 до 240. Нелинейные расчеты:  $N_\phi$  – от 32 до 128,  $N_r$  – от 50 до 100,  $N_\theta$  – от 64 до 180 (максимальное количество узлов  $1.6 \cdot 10^6$ ). Здесь  $N_r$  – число узлов по радиусу,  $N_\theta$  – по меридиональному углу ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ),  $N_\phi$  – по азимутальному углу. Неравномерность размеров сетки в радиальном и меридиональном направлениях (отношение максимального размера ячейки к минимальному в выбранном направлении) в представленных ниже результатах варьировалось от 1 до 4. Установлено, что для анализа линейной устойчивости достаточно использовать сетку  $N_r = 60$ ,  $N_\theta/2 = 120$ . Нелинейные расчеты показали, что стохастический режим и режим локализованных вихрей необходимо рассчитывать на сетке с числом узлов не менее чем  $N_\phi = 64$ ,  $N_r = 50$ ,  $N_\theta = 180$ . Течения с меньшей закрученностью хорошо воспроизводятся и при меньшем количестве узлов.

**2. Область исследования и представление результатов расчетов.** Экспериментальные исследования [1, 2] в слое  $\delta = 1$  вблизи локального экстремума на кривой устойчивости при встречном вращении границ ( $Re_1 = 328$ ,  $Re_2 = -810$ ) показали возможность достижения стохастических режимов течения при сравнительно небольших числах  $Re_1 \leq 450$  и разнообразии сценариев ламинарно-турбулентного перехода. Для численного эксперимента был выбран ламинарно-турбулентный переход при  $Re_2 = -900$ . Перечислим известные из экспериментов [1, 2] закономерности этого перехода. Стохастическому режиму течения в этом случае предшествуют четыре нестационарных ламинарных режима, каждый из которых имеет свою пространственную структуру и состав спектра пульсаций скорости.

После потери устойчивости основным течением в экспериментах наблюдался одночастотный режим, получивший название приполярного движения. С увеличением надкритичности устанавливается двухчастотный режим течения. В работах [1, 2] на основании измерения частот и визуализации течения было сделано предположение о том, что двухчастотный режим образуется добавлением к уже существующему приполярному движению спиральных волн, наиболее интенсивных в области экватора и несимметрич-

ных относительно плоскости экватора. При дальнейшем увеличении  $Re_1$  формируется трехчастотный режим течения с еще более сложной пространственной структурой, несимметричной относительно плоскости экватора. Трехчастотный режим сменяется симметричным относительно плоскости экватора новым периодическим режимом, получившим название режима локализованных вихрей [1, 2], с которого, в свою очередь, наблюдается переход к хаосу. Режимы течения перечислены в порядке их возникновения при квазистатическом увеличении  $Re_1$  с сохранением постоянного значения  $Re_2$ .

Характерным свойством рассматриваемых течений является их зависимость от предыстории изменения  $Re_1$  [1, 2, 18]. Например, в эксперименте переход от трехчастотного режима к режиму локализованных вихрей при квазистатическом изменении числа  $Re_1$ , а также переход от локализованных вихрей к стохастическому режиму сопровождаются гистерезисами, т.е. при одних и тех же величинах  $Re_1$ , но разных направлениях его изменения могут существовать разные режимы течения. Другим проявлением неединственности течения в эксперименте является режим пространственно-временной перемежаемости, наблюдавшийся в [18] при изменении  $Re_1$  с ускорением.

Расчеты проводились при параметрах, соответствующих эксперименту [1, 2]

$$v = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, r_1 = 0.075 \text{ м}, r_2 = 0.15 \text{ м}, \Omega_2 = -2\text{с}^{-1} (Re_2 = -900), 2.67\text{с}^{-1} \leq \Omega_1 \leq 4.0\text{с}^{-1}$$

Сопоставление с результатами экспериментов [1, 2] проводилось по сравнению экспериментальных и расчетных спектров пульсаций скорости, пространственных структур, положению границ существования и областей гистерезиса каждого из рассчитанных режимов течения. Частотные характеристики в расчете определялись по составу спектра пульсаций меридиональной компоненты скорости в середине слоя посередине между полюсом и экватором.

Для характеристики пространственных структур нестационарных режимов течения выбраны контуры меридиональной компоненты скорости  $u_\theta$  и радиальной завихренности

$$\omega_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}$$

в координатах  $\theta - \varphi$ . Такое представление позволяет определить как наличие симметрии течения относительно экватора, так и число вихревых структур в азимутальном направлении.

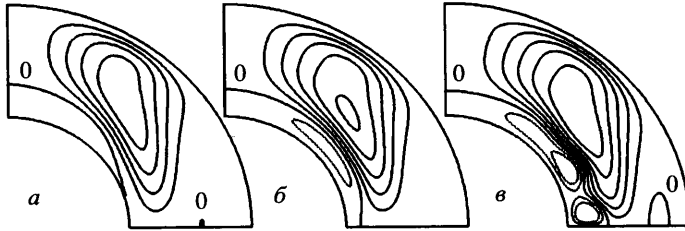
Границы областей существования основного течения и приполярного режима находим из анализа линейной устойчивости. Границы переходов при последующих бифуркациях определялись по результатам нелинейного расчета: вблизи предполагаемого положения границы проводился расчет как с увеличением  $Re_1$ , так и с его уменьшением с шагом  $\Delta Re_1 \leq 4$ . Вид зависимости интегрального момента сил трения, передаваемого на внутреннюю сферу

$$M = -v r_1^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \sin^2 \theta d\theta d\varphi, \quad \text{м}^5 \cdot \text{с}^{-2}$$

от величины и направления изменения  $Re_1$  позволяет сделать вывод о наличии перехода от одного режима к другому и о наличии гистерезиса (момент нормирован на плотность жидкости).

**3. Осесимметричное течение и анализ линейной устойчивости.** Структура меридиональной циркуляции стационарного осесимметричного течения определялась по распределению функции тока  $\Psi$

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \Psi(r = r_1) = 0$$



Фиг. 1. Уровни функции тока  $\Psi$ ,  $\text{м}^3\text{с}^{-1}$  в меридиональной плоскости осесимметрично-го стационарного течения:  $\Psi_{\max} = 2 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Psi_{\min} = -8 \cdot 10^{-6}$ ,  $\Delta\Psi = 4 \cdot 10^{-6}$ . Пунктир – отрицательные значения уровня,  $\text{Re}_1 = 250, 360, 414$  (а–в)

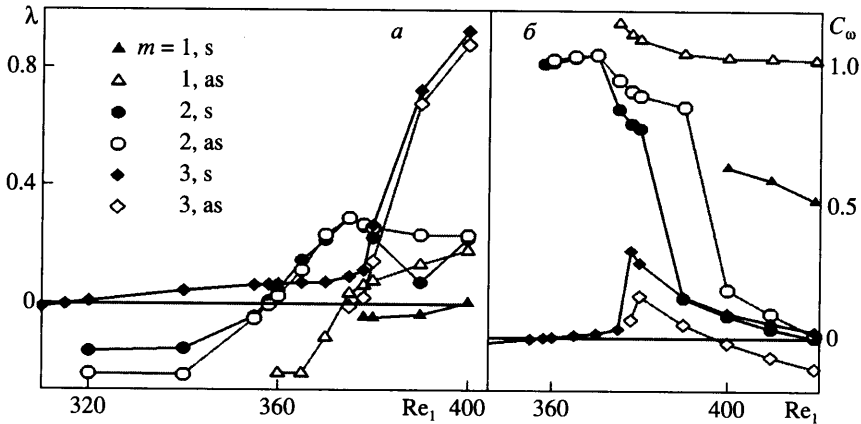
Рассмотрим эволюцию меридиональной циркуляции при увеличении  $\text{Re}_1$  ( $\text{Re}_2 = -900$ ). При  $\text{Re}_1 = 0$  меридиональная циркуляция одновихревая, она вызвана вращением внешней сферы и имеет направление по часовой стрелке (далее внешняя циркуляция). Небольшая область вблизи экватора со слабой циркуляцией противоположного направления (ограничена контуром  $\Psi = 0$ ) исчезает с увеличением числа  $\text{Re}_1$ , и опять появляется уже при числах  $\text{Re}_1$ , соответствующих трехчастотному режиму течения ( $\text{Re}_1 = 378$ ). На фиг. 1 эта область видна при  $\text{Re}_1 = 250$  и  $\text{Re}_1 = 414$ .

При  $\text{Re}_1 \approx 100$  вблизи полюса внутренней сферы начинает формироваться меридиональная циркуляция, вызванная вращением внутренней сферы (далее внутренняя циркуляция). Вихрь внутренней циркуляции вращается против часовой стрелки. Увеличение скорости вращения внутренней сферы приводит к распространению области внутренней циркуляции (область, ограниченная внутренней сферической границей и линией раздела меридиональных циркуляций, определяемой как  $\Psi = 0$ ) в направлении экватора (фиг. 1,  $\text{Re}_1 = 250$ ).

При  $\text{Re}_1 \approx 280$  линия раздела достигает экватора и формируется развитая двухвихревая меридиональная циркуляция. Такая циркуляция существует, например, вблизи предела устойчивости основного течения при  $\text{Re}_1 = 310$ . При этом центры внутренней и внешней циркуляций находятся приблизительно посередине между полюсом и экватором. При дальнейшем увеличении  $\text{Re}_1$  интенсивность внутренней циркуляции увеличивается, а ее центр смещается в сторону экватора (фиг. 1,  $\text{Re}_1 = 360$ ). При  $\text{Re}_1 = 378$  во внутренней циркуляции появляется перетяжка, качественно такой вид линий тока (фиг. 1,  $\text{Re}_1 = 414$ ) сохраняется до  $\text{Re}_1 = 425$ , когда стационарное двумерное решение перестает существовать.

На фиг. 2 представлены результаты анализа линейной устойчивости двумерного течения. При  $\text{Re}_1 < 315$  двумерное течение устойчиво (фиг. 2, а). При  $315 \leq \text{Re}_1 \leq 357$  только симметричная относительно плоскости экватора мода с азимутальным числом 3 (далее просто мода  $m = 3, s$ ) имеет положительный инкремент  $\lambda(m = 3, s) > 0$ , азимутальные волны распространяются в направлении вращения внешней сферы:  $C_\omega(m = 3, s) < 0$  (фиг. 2, б).

При  $\text{Re}_1 = 357$  в решении линейной задачи происходит следующее. Во-первых, инкременты нарастания симметричной и антисимметричной мод  $m = 2, s$  и  $m = 2, as$  становятся положительными с очень близкими величинами инкрементов нарастания и фазовых скоростей (фиг. 2, а). Обе моды распространяются в направлении вращения внутренней сферы  $C_\omega(m = 2, s), C_\omega(m = 2, as) > 0$ . Во-вторых, симметричная мода  $m = 3, s$  изменяет направления распространения и начинает распространяться в направлении вращения внутренней сферы  $C_\omega(m = 3, as) > 0$  (фиг. 2, б). Отметим, что близкая к нулю величина частоты моды  $m = 3, s$  существенно затрудняет определение положения второй бифуркации при решении нелинейной задачи, поэтому в качестве границы между одно- и



Фиг. 2. Зависимость инкремента нарастания  $\lambda$  (а) и фазовой скорости  $C_\omega$  (б) от числа  $Re_1$ . Точки – результаты расчета, горизонтальные линии –  $\lambda = 0$  (а),  $f = 0$  (б)

двухчастотными режимами течения может быть принята величина  $Re_1 = 357$ , в эксперименте [1] аналогичная величина составляла  $Re_1 = 355 \pm 2$ .

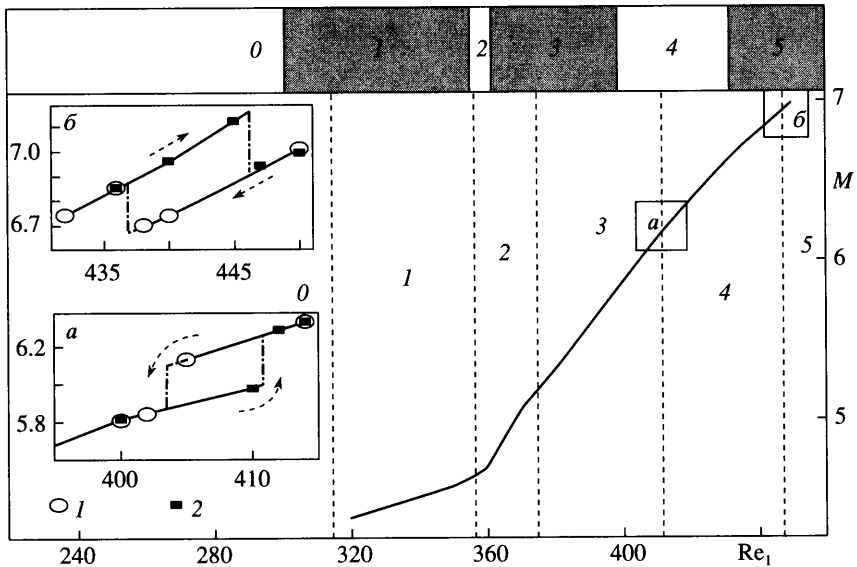
При дальнейшем увеличении числа  $Re_1 > 374$  двумерное течение становится неустойчивым по отношению и к другим модам, ниже представлены критические значения чисел  $Re_1$ , соответствующие потере устойчивости осесимметричным течением для мод  $m = 1-6$ :

Мода	1, s	1, as	2, s	2, as	3, s	3, as	4, s	4, as	5, s	5, as	6, s	6, as
$Re_{1cr}$	398	374	358	359	315	376	374	377	376	379	379	390

При  $Re_1 = 378$  скорость роста инкремента  $\lambda(m = 3, s)$  резко возрастает, а производная  $\partial C_\omega(3, s)/\partial Re_1$  меняет знак. При дальнейшем увеличении числа  $Re_1$  фазовые скорости  $C_\omega(m = 3, s)$  и  $C_\omega(m = 2, s)$  а затем и антисимметричной  $C_\omega(m = 2, as)$  сближаются, т.е. азимутальные волны, соответствующие этим модам, имеют близкие фазовые скорости и распространяются в направлении вращения внутренней сферы. Так же ведут себя и фазовые скорости симметричных мод  $m = 4, 5, 6$  при  $Re_1 > 400$ , фазовые скорости антисимметричных мод  $m = 3, 4, 5, 6$  также близки друг к другу, но распространяются в направлении вращения внешней сферы. Аналогичный результат был получен в [19] при анализе линейной устойчивости течения при вращении только внутренней сферической границы в слое  $\delta = 0.5$ : все антисимметричные моды с  $2 \leq m \leq 8$  имеют одинаковый вид зависимости от  $Re_1$  и близкие значения.

**4. Ламинарно-турбулентный переход (нелинейная задача).** На фиг. 3 показаны результаты расчета областей существования режимов течения: 0 – основного течения, 1 – приполярного режима, 2 – двухчастотного, 3 – трехчастотного, 4 – локализованных вихрей, 5 – хаотического. Диаграмма сверху рисунка – эксперимент [1, 2]. Положение границ переходов к одно- и двухчастотному режимам находилось из анализа линейной устойчивости, положение других переходов – из решения полной нелинейной задачи. В последнем случае положение границ определялось как по изменению спектра и пространственной структуры течения, так и по виду зависимости момента, передаваемого на внутреннюю сферу  $M$  от  $Re_1$  (фиг. 3).

Потеря устойчивости основным течением происходит при  $Re_1 = 315$ . Решение нелинейной задачи в диапазоне изменения чисел Рейнольдса  $315 \leq Re_1 \leq 357$  – периодическое

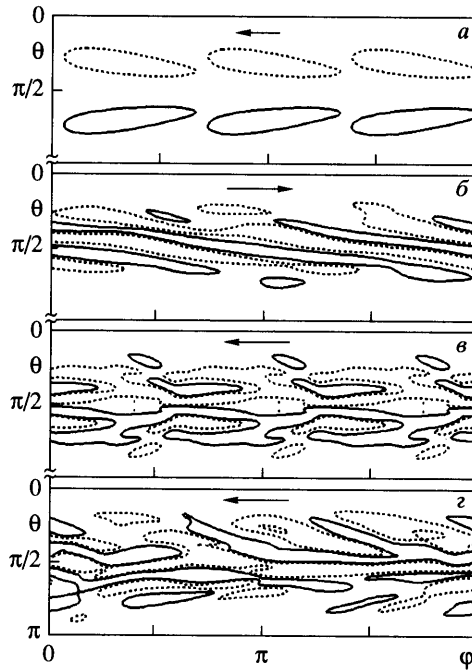


Фиг. 3. Границы существования различных режимов течения и зависимость момента сил трения  $M \cdot 10^6$  от числа  $Re_1$ : *a* – область перехода от трехчастотного режима течения к режиму локализованных вихрей; *b* – область перехода от режима локализованных вихрей к стохастическому режиму течения; точки 1 – уменьшение, 2 – увеличение числа  $Re_1$

по времени течение. Оно симметрично относительно плоскости экватора и состоит из трех вихрей с противоположным направлением радиальной завихренности в верхней и нижней полусферах, распространяющихся в направлении вращения внешней сферы (фиг. 4а,  $Re_1 = 340$ ). Течение полностью соответствует единственной растущей по линейной теории моде  $m = 3$ ,  $s$ . Величина выделенной частоты в спектре скорости уменьшается при увеличении числа  $Re_1$ , что согласуется как с результатами линейного анализа (фиг. 2), так и с экспериментальными данными [1, 2]. В таблице приведены экспериментальные и расчетные величины выделенных частот в спектрах скорости, и разница между ними, отнесенная к масштабу частоты (средней частоте вращения сфер),  $\Delta$ .

Переход к двухчастотному режиму течения имеет место при  $Re_1 = 357$ . Вид двухчастотного режима при  $Re_1 = 360$  представлен на фиг. 5а распределением меридиональной скорости  $u_\theta$  в координатах  $\varphi - \theta$ . К существовавшим ранее между полюсом и экватором трем вихрям, характеризующим приполярный режим, вблизи плоскости экватора добавляются два экваторонесимметричных вихря. Вся картина течения распространяется в направлении вращения внутренней сферы. Поведение во времени меридиональной компоненты скорости в точке, равноудаленной от полюса и экватора и расположенной в середине слоя, представляет собой близкий к синусоидальному сигнал, модулированный по амплитуде более высокой частотой.

Как и в эксперименте, в спектре сигнала скорости наблюдаются две частоты (см. таблицу), первая  $f_1$  соответствует медленному приполярному режиму с тремя симметричными относительно экватора вихрями, вторая  $f_2$  – быстрому несимметричному относительно экватора движению с двумя вихрями. Поскольку и в эксперименте, и в расчете величины частот  $f_1$  и  $f_2$  отличаются более чем на два порядка (см. таблицу), и амплитуда колебаний на частоте  $f_1$  существенно больше амплитуды колебаний на частоте  $f_2$ , можно усреднить течение за период  $1/f_2$ . В результате усреднения остается только медлен-



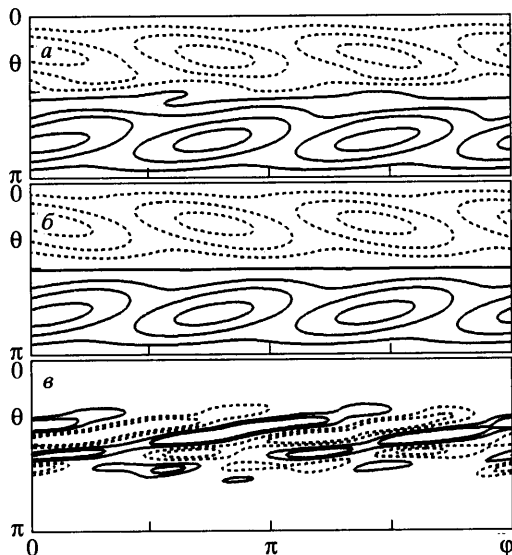
Фиг. 4. Линии уровня радиальной завихренности  $\omega_r, \text{c}^{-1}$  на расстоянии 0.3 толщины слоя от внутренней сферы;  $\text{Re}_1 = 340, 378, 414, 450$  (а-г). Горизонтальные стрелки – направление распространения вихревых структур;  $\omega_{r, \text{max}} = 2, \omega_{r, \text{min}} = -2$

ное симметричное относительно экватора движение на частоте  $f_1$  с  $m = 3$  (фиг. 5, б). Разность между полными и усредненными за период  $1/f_2$  значениями меридиональной скорости показывает, что движение на частоте  $f_2$  действительно несимметрично относительно плоскости экватора и имеет азимутальное число  $m = 2$ .

Возможность декомпозиции пространственной структуры течения свидетельствует о слабом взаимодействии двух мод. При этом, например, мода  $m = 3, s$  сама по себе существенно нелинейна: собственная функция линейной задачи остается подобной нелинейному решению только до  $\text{Re}_1 \leq 320$ . Одна из возможных причин слабого взаимного влияния двух мод состоит в том, что они разнесены в пространстве, приполярное движение имеет максимум интенсивности посередине между полюсом и экватором, в то время как движение на частоте  $f_2$ , спиральные волны наиболее интенсивны в области экватора [1].

$\text{Re}_1$	$f_1$			$f_2$			$f_3$		
	эксп.	расчет	$\Delta, \%$	эксп.	расчет	$\Delta, \%$	эксп.	расчет	$\Delta, \%$
340	0.0138	0.0122	0.2	–	–	–	–	–	–
360	0.0023	0.0036	0.2	0.3170	0.3320	1.8	–	–	–
378	0.0122	0.0147	0.3	0.2938	0.2971	0.4	0.3503	0.3209	3.4
	$f_4$								
414	0.0031	0.0039	0.8						

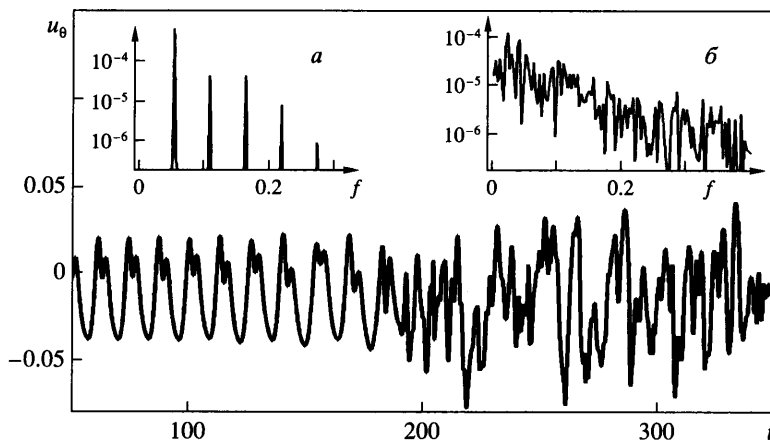




Фиг. 5. Линии уровней меридиональной компоненты скорости  $u_\theta$ , м/с на поверхности, расположенной на расстоянии 0.3 толщины слоя от внутренней сферы; *a* – двухчастотный режим течения  $Re_1 = 360$ ,  $b - f_2 = 0$ ,  $v - f_1 = 0$ , *a*,  $b - u_{\theta\max} = 0.03$ ,  $u_{\theta\min} = -0.03$ ,  $\Delta u_\theta = 0.01$ ,  $v - u_{\theta\max} = 0.002$ ,  $u_{\theta\min} = -0.002$ ,  $\Delta u_\theta = 0.001$

При  $Re_1 = 375$  на кривой зависимости момента от  $Re_1$  наблюдается излом, свидетельствующий о смене режима течения. Течение остается несимметричным относительно экватора, в спектре скорости наблюдаются три частоты (таблица), неплохо согласующиеся с экспериментальными значениями. Поведение во времени меридиональной компоненты скорости близко к синусоидальному сигналу, модулированному по амплитуде. По азимутальному углу вихри распространяются в направлении вращения внутренней сферы, по меридиональному углу направление распространения зависит от начальных условий. Так же, как и в предшествующем режиме течения, наблюдаются три пары экваторосимметричных вихрей, и несимметричное относительно экватора движение с  $m = 2$  (фиг. 4, б,  $Re_1 = 378$ ). Из сравнения величин частот различных мод в линейной задаче и частот в спектре нелинейной задачи можно предположить, что новая, по сравнению с двухчастотным режимом, частота  $f_3$  соответствует периодическому по азимутальному углу симметричному относительно экватора движению с двумя вихрями, т.е. моде  $m = 2, s$ .

При дальнейшем увеличении  $Re_1$  момент  $M$  скачкообразно возрастает ( $Re_1 \cong 412$ ) и скачкообразно уменьшается при уменьшении  $Re_1$  ( $Re_1 \cong 404$ ) (фиг. 3, а). Таким образом, четвертая бифуркация происходит с гистерезисом. После нее течение полностью перестраивается. Так же, как и в эксперименте [1, 2], течение становится периодическим и симметричным относительно экватора, меняется направление распространения: в направлении вращения внешней сферы в каждой из полусфер распространяются по три равноотстоящих по азимуту сложных вихревых образования (фиг. 4, в,  $Re_1 = 414$ ). По каждую сторону от экватора ( $\theta = \pi/2$ ) наблюдаются наклоненные к экватору парные вихри с противоположным направлением вращения, максимумы их интенсивности приближены к внутренней сфере и экватору, по мере удаления от экватора появляются одиночные вихри с большим углом наклона. Интересно, что углы наклона парных вихрей вблизи экватора очень близки по величине к углам наклона несимметричного отно-



Фиг. 6. Зависимость  $u_\theta(t)$  в точке, расположенной в середине слоя, при переходе от режима локализованных вихрей к стохастическому: *a*, *б* – спектры пульсаций  $u_\theta$  для режимов локализованных вихрей и стохастического

сительно экватора движения с азимутальным числом 2 для трехчастотного режима течения. В спектре пульсаций скорости наблюдаются одна частота  $f_4$  с многочисленными гармониками (таблица).

Сравнение установившегося режима течения, получившего в [1] название “режима локализованных вихрей”, с результатами линейного анализа показывает, что режим локализованных вихрей отличается от всех симметричных мод с  $m \leq 6$ . Так, в линейной задаче ни для одной из мод не удалось найти частоты, близкой к  $f_4$ . Можно предположить, что режим локализованных вихрей образуется вследствие синхронизации движений на частотах  $f_1, f_2$  и  $f_3$ . Об этом свидетельствуют как упоминавшиеся выше равные величины углов наклона вихрей для двух режимов течения – трехчастотного и локализованных вихрей (фиг. 4, *в*), так и тенденция к сближению величин фазовых скоростей трех мод (фиг. 2, *б*) при  $Re_1 > 400$ .

Именно с этого режима при дальнейшем увеличении  $Re_1$  в экспериментах [1, 2] наблюдался переход к хаосу. Этот переход и в эксперименте, и в расчете сопровождается гистерезисом (фиг. 3, *б*). В отличие от предшествующего перехода (фиг. 3, *а*) установление стохастичности сопровождается скачкообразным снижением средней величины момента сил трения. Установление стохастического режима течения в расчете определялось по потере регулярности во временном поведении скорости, по подъему уровня непрерывного фона в спектре пульсаций скорости, который становится сплошным, без выделенных частот (фиг. 6). Необходимо отметить, что нерегулярность данного режима течения, так же как в эксперименте [1], является пространственно-временной, пространственная структура течения теряет экваториальную симметрию и пространственную регулярность (фиг. 4, *з*,  $Re_1 = 450$ ). В структуре хаотического режима сохраняются элементы структуры предыдущего режима, но у них нет регулярности, форма искажена, нарушена симметрия.

Наблюдаемый в данном течении сценарий стохастизации после конечного числа бифуркаций соответствует сценарию Рюэля–Такенса [20]. Явление синхронизации частот непосредственно перед возникновением стохастического режима типично для гидродинамических систем. Ранее аналогичная последовательность режимов наблюдалась, в частности, в течении с винтовой симметрией во вращающейся трубе [21], а также в неизоэнтальном течении в гидродинамической модели Чохральского [22].

Между рассчитанными и экспериментальными границами (фиг. 3) есть систематический сдвиг по числу  $Re_1$ , равный приблизительно 13. Исключение составляет граница между приполярным (1) и двухчастотным (2) режимами, где разница равна четырем. Причиной образования этого систематического сдвига может быть высокая чувствительность течения в эксперименте к симметрии относительно экватора и к равномерности вращения сферических границ. О чувствительности течения к симметрии относительно экватора свидетельствует то, что систематический сдвиг между расчетом и экспериментом меньше в том случае, когда в результате бифуркации в течение добавляется несимметричное относительно экватора движение, а именно при переходе от приполярного движения к двухчастотному. Все остальные “до-хаотические” бифуркации связаны либо с установлением симметричных режимов течения, либо с добавлением в течение моды, симметричной относительно экватора. Именно этот сдвиг может быть основной причиной расхождения в определении величины частот между результатами эксперимента и данного расчета (таблица). Так, систематический сдвиг приводит к тому, что при одних и тех же числах  $Re_1$  в эксперименте и расчете фактическая надкритичность для расчета меньше, и именно это проявляется при сравнении результатов расчета и эксперимента (см. таблицу).

**Заключение.** Рассчитан ламинарно-турбулентный переход для течения вязкой несжимаемой жидкости в широком ( $\delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$ ) сферическом слое при противоположном направлении вращения границ. Получены все наблюдавшиеся в экспериментах [1, 2] режимы течения. Показано хорошее количественное соответствие расчетных и экспериментальных характеристик течений: частот пульсаций скорости, положения границ переходов и областей гистерезиса. Пространственная структура двухчастотного режима течения представлена в виде композиции структур, соответствующих каждой частоте. Начиная от потери устойчивости основным течением и вплоть до установления стохастичности реализуются вторичные течения в виде симметричных и антисимметричных азимутальных волн с азимутальными числами не более трех. До наступления стохастичности симметричные относительно экватора вторичные течения распространяются в направлении вращения внешней сферы, антисимметричные – в направлении вращения внутренней сферы.

Впервые проведен прямой расчет стохастического режима течения в сферическом слое. При переходе к хаосу имеет место гистерезис и уменьшение средней по времени величины момента сил трения, при этом нарушаются экваториальная симметрия и азимутальная периодичность структуры течения. Установлению пространственно-временной стохастичности предшествует одночастотный режим течения, который образуется вследствие синхронизации частот предшествующего трехчастотного режима течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 05-01-00607 и 07-08-00247).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герцеништейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Ламинарно-турбулентный переход в сферическом течении Куэтта при встречном вращении границ // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 56–63.
2. Герцеништейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. О попытке обобщения сценариев перехода к турбулентности в сферическом течении Куэтта при встречном направлении вращения сферических границ // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 770–773.
3. Беляев Ю.Н. Гидродинамическая неустойчивость и турбулентность в сферическом течении Куэтта. М.: Изд-во МГУ, 1997. 348с.
4. Munson B.R., Menguturk M. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. P. 3. Linear stability and experiments // J. Fluid Mech. 1975. V. 69. № 4. P. 705–719.
5. Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Яворская И.М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 9–15.

6. Яворская И.М., Астафьева Н.М., Введенская Н.Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 1. С. 52–55.
7. Matun C.K., Tuckerman L.S. Asymmetry and Hopf bifurcation in spherical Couette flow // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 1. P. 80–91.
8. Астафьева Н.М. Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 75–86.
9. Dumas G. Study of spherical Couette flow via 3-D spectral simulation: large and narrow – gap flows and their transitions. Ph.D. Thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California, 1991. 217 p.
10. Dumas G., Leonard A. A divergence-free spectral expansions method for three-dimensional flows in spherical-gap geometries // J. Comput. Phys. 1994. V. 111. № 2. P. 205–219.
11. Зиканов О.Ю. Численное моделирование неустойчивостей и вторичных режимов в сферическом течении Куэтта // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 1. С. 3–15.
12. Zikanov O. Yu. Symmetry-breaking bifurcations in spherical Couette flow // J. Fluid Mech. 1996. V. 310. P. 293–324.
13. Sha W., Nakabayashi K., Ueda H. An accurate second-order approximation factorization method for time-dependent incompressible Navier–Stokes equations in spherical polar coordinates // J. Comput. Phys. 1998. V. 142. № 1. P. 47–66.
14. Sha W., Nakabayashi K. On the structure and formation of spiral Taylor–Görtler vortices in spherical Couette flow // J. Fluid Mech. 2001. V. 431. P. 323–345.
15. Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э., Никитин Н.В. Развитие пространственных структур течения при ламинарно-турбулентном переходе в широком сферическом слое // Докл. РАН. 2007. Т. 414. № 1.
16. Никитин Н.В. Прямой расчет турбулентных течений в эксцентрических трубах // Ж. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т.46. № 3. С. 509–526.
17. Никитин Н.В. Конечно-разностный метод решения уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в произвольных криволинейных ортогональных координатах // Ж. вычислит. физики. 2006. Т. 217. № 2. С. 759–781.
18. Герценштейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. Экспериментальное исследование режимов перемежаемости в сферическом течении Куэтта // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 4. С. 478–483.
19. Araki K., Mizushima J., Yanase S. The nonaxisymmetric instability of the wide-gap spherical Couette flow // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 4. P. 1198–1199.
20. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. № 3. P. 67–192. = Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981, 115–151.
21. Никитин Н.В. О характере вторичных течений во вращающейся трубе // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 6. С. 29–35.
22. Никитин Н.В., Полежаев В.И. Трехмерные эффекты переходных и турбулентных режимов тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 81–90.

Москва

Поступила в редакцию  
25.XII.2006