

УДК 532.592

© 2007 г. В. А. КАЛИНИЧЕНКО, С. Я. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН ФАРАДЕЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ

Экспериментально исследованы профили стоячих гравитационных двумерных волн максимальной высоты, которые возбуждались параметрически на свободной поверхности глубокой жидкости в вертикально колеблющемся прямоугольном сосуде (волны Фарадея). При малой глубине модуляции параметра возбуждения выделены три категории волн: регулярные – периодические во времени, симметричные относительно проходящей через их гребень вертикали волны; нерегулярные, но сохраняющие связность жидкого объема волны; и разрушающиеся волны с отрывом капель со свободной поверхности жидкости. Установлено, что профиль регулярных волн максимальной высоты гладкий, имеет крутизну 0.255, а предельный угол при гребне менее  $80^\circ$ . У нерегулярных и разрушающихся волн выявлены отдельные реализации, для которых профили близки к профилям регулярных волн, но крутизны значительно выше: 0.288 и 0.429 соответственно.

*Ключевые слова:* параметрический резонанс, волны Фарадея, крутизна волны, регулярные, нерегулярные и разрушающиеся стоячие волны.

Первые решения задачи о форме профиля прогрессивной стационарной волны максимальной высоты на свободной поверхности жидкости были получены [1] еще Стоксом и Мичеллом в предположении, что гребень предельного профиля должен быть заостренным. Стокс установил аналитически, что у такой волны угол заострения равен  $120^\circ$ , а Мичелл численно получил оценку  $\Gamma_m = 0.142$  для максимума ее крутизны  $\Gamma = H/\lambda$ , где  $H$  – превышение гребня волны над ее подошвой, и  $\lambda$  – длина волны. Эти результаты были подтверждены многочисленными теоретическими и экспериментальными исследованиями.

Для волн стоячих вопрос о форме предельного профиля остается открытым [1] и в настоящее время, причем исследования в этом направлении вызывали и продолжают вызывать полемику в научной литературе [2]. Остановимся кратко на наиболее известных результатах. В теоретическом исследовании [3] считалось, что предельный профиль имеет заостренный гребень, и было найдено, что угол заострения  $\varphi_m = 90^\circ$ , а крутизна  $\Gamma_m = 0.218$ . В последующих теоретических исследованиях наличие заострения и оценка угла подвергались сомнению, а величина предельной крутизны  $\Gamma_m$  варьировалась от 0.196 в [4] до 0.285 в [5]. Экспериментальной проверке выводов [3] было посвящено исследование Тейлора [6], в котором стоячие волны возбуждались двумя волнопродукторами на торцевых стенках прямоугольного сосуда. Была предложена оценка  $\Gamma_m = 0.228$  и приведены соображения в пользу предсказанного значения  $\varphi_m$ , хотя сам наблюдавшийся волновой профиль был без заострения. В экспериментальных данных [7–11] предельная крутизна стоячих волн оценивалась диапазоном  $0.108 < \Gamma_m < 0.266$ .

Разброс приведенных экспериментальных результатов объясняется различиями в способах и условиях возбуждения волн. Обсуждение формы предельного профиля стоячих волн осложняется отсутствием математически строгих результатов по стоячим нелинейным волнам в жидкости (в отличие от теории прогрессивных волн). С учетом этих обстоятельств представляется целесообразным продолжить экспериментальные иссле-

дования стоячих волн большой высоты, выбрав какой-либо один, удобный, способ их возбуждения.

В настоящем исследовании используется параметрическое возбуждение волн, открытое Фарадеем. По этому способу стоячие волны образуются из-за потери устойчивости свободной горизонтальной поверхности жидкости в сосуде, совершающем вертикальные колебания в условиях параметрического резонанса. Поскольку волны Фарадея возбуждаются без каких-либо волнопродукторов, их наблюдение и измерение оказываются более простыми и точными по сравнению с другими способами возбуждения; кроме того, высоту волн можно легко изменять, варьируя частоту колебаний сосуда.

Профили волн Фарадея максимальной высоты исследовались экспериментально в [7, 8] при различных режимах возбуждения волн и для сосудов различных размеров. Сопоставление экспериментальных данных с [7, 8] проводится ниже.

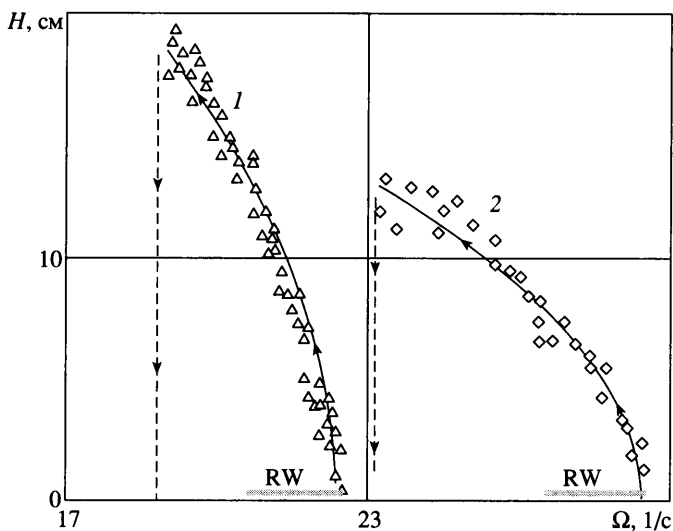
В настоящих экспериментах использовался режим, называемый в теории колебаний режимом с малой глубиной модуляции параметра возбуждения. В этом режиме ускорения колебаний сосуда малы по сравнению с ускорением силы тяжести  $g$ , что приблизило форму профиля волн Фарадея к форме профиля свободных стоячих волн и, следовательно, позволило сравнить результаты измерений с выводами теории свободных стоячих волн.

**1. Постановка эксперимента.** Для генерации волн Фарадея на свободной поверхности жидкости использовалась установка, описанная в [12, 13]. Исследовались вторая и третья волновые моды в прямоугольном сосуде в условиях основного резонанса Фарадея, когда частота возбуждаемых волн в 2 раза меньше частоты колебаний сосуда. В большинстве экспериментов сосуд имел размеры  $50 \times 4 \times 40$  см, что обеспечило двумерность указанных волновых мод и приблизило волны к чисто гравитационным; глубина  $h$  жидкости была 15 см, что обеспечило независимость волновых движений от  $h$ , и рабочей жидкостью была вода. Лишь в некоторых экспериментах варьировалась глубина воды и использовался керосин (эти изменения отражены в тексте статьи).

Сосуду сообщались колебания в вертикальном направлении с амплитудой  $s$  и частотой  $\Omega$ . Волны на свободной поверхности жидкости возбуждались при условии, что  $s$  превосходит некоторое пороговое значение, и, как указано выше,  $\Omega \sim 2\omega_n$ , где  $\omega_n$  – собственная частота волновой моды номера  $n$ . При фиксированном значении  $s = 0.25$  см вариации  $\Omega$  обеспечивали изменение крутизны возбуждаемых волн Фарадея. При переходе от одного значения частоты  $\Omega$  к другому измерения начинались лишь по истечении промежутка времени порядка 100–200 периодов колебаний сосуда, необходимого для установления нового волнового режима в жидкости.

Для регистрации волновых профилей использовалась цифровая видеосъемка (24–30 к/с). Точность измерения высоты волновых профилей по материалам съемки составляла 0.1 см, причём ее среднее значение  $H$  в каждом режиме рассчитывалось по восьми измеренным в моменты максимального развития волны последовательным значениям разности между высотой ее гребня и впадины.

**2. Результаты и обсуждение.** Прежде всего было проведено разделение наблюдаемых волн Фарадея на три категории. Поскольку в условиях данного эксперимента профили волн Фарадея мало отличаются от профилей свободных волн, то были учтены основные свойства последних, известные из теории стоячих нелинейных волн [14]. По определению, в свободной стоячей волне поверхность жидкости совершает периодические во времени колебания с характерным пространственным распределением ее узлов и пучностей. Пучности стоячей волны неподвижны, а узлы совершают горизонтальные колебания. В рассматриваемых здесь двумерных волнах расстояние между пучностями равно  $\lambda_n/2$ , а траектории жидких частиц вертикальны вдоль вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны. Профиль волны симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности.



Фиг. 1. Зависимость высоты  $H$  волн Фарадея от частоты  $\Omega$  колебаний сосуда  $50 \times 4 \times 40$  см,  $h = 15$  см,  $s = 0.25$  см: 1 – вторая мода,  $n = 2$ ,  $\omega_2 = 10.85$  с $^{-1}$ ; 2 – третья мода,  $n = 3$ ,  $\omega_3 = 13.55$  с $^{-1}$ ,  $RW$  – частотный диапазон возбуждения регулярных волн

Волны, профили которых наиболее близки к теоретически предсказываемым профилям свободных стоячих волн, были названы регулярными. Точнее, к регулярным волнам Фарадея были отнесены те волны, профиль которых обладает двумя свойствами: 1) он периодичен во времени; 2) он симметричен относительно вертикальных плоскостей, проведенных через пучности волны.

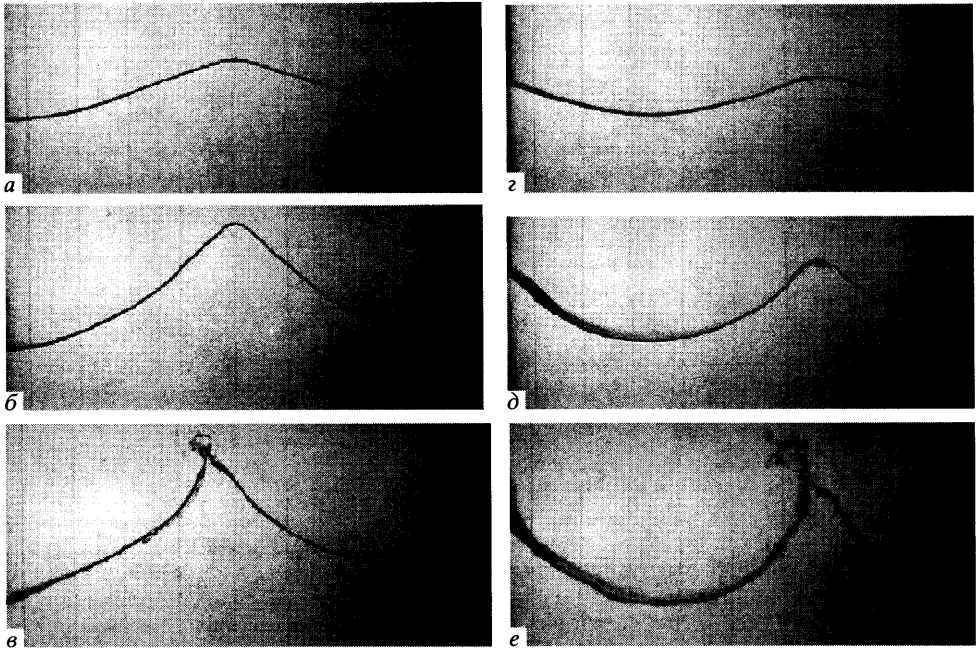
Волны, у которых нарушено хоть одно из двух перечисленных свойств, но объем колеблющейся жидкости сохраняет связность, были отнесены к нерегулярным волнам Фарадея.

Наконец, волны, в которых со свободной поверхности срывались либо отдельные капли жидкости, либо струи, были отнесены к разрушающимся волнам Фарадея.

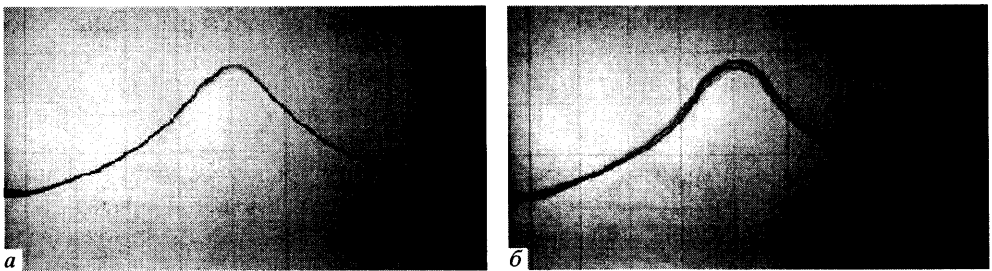
На фиг. 1 для второй и третьей волновых мод представлены зависимости высоты  $H$  возбуждаемой волны от частоты  $\Omega$  колебаний сосуда (резонансные зависимости). Видно, что при уменьшении частоты  $\Omega$  высота волн монотонно возрастает, и это происходит до тех пор, пока при некоторой частоте колебаний сосуда волны внезапно не пропадут (направленные вниз стрелки на фиг. 1). Символами  $RW$  на оси  $\Omega$  отмечены частотные диапазоны  $20.58 < \Omega_{n=2} < 22.52$  с $^{-1}$  и  $26.46 < \Omega_{n=3} < 28.58$  с $^{-1}$ , в которых были зафиксированы регулярные волны второй и третьей волновых мод соответственно.

На фиг. 2 в двух столбцах приведены фотографии второй (слева) и третьей (справа) волновых мод в моменты их наибольшего развития для соответствующих значений  $\Omega$ . Из фотографий видно, что при наибольших частотах  $\Omega = 21.74$  и  $27.44$  с $^{-1}$  форма волновых профилей ( $a, \gamma$ ) близка к синусоидальной. При меньших значениях  $\Omega$  гребни волновых профилей сужаются, а подошвы уплощаются ( $b, \delta$ ), причем высота волн увеличивается. Эти изменения профилей предсказываются нелинейной теорией. При еще меньших частотах,  $\Omega = 20.27$  и  $24.17$  с $^{-1}$ , высота волн становится еще больше и наблюдается отрыв капель с гребня ( $\epsilon, e$ ), т.е. наблюдается разрушение волн.

Различие между профилями регулярных и нерегулярных волн в моменты их наибольшего развития, т.е. в те моменты, когда в процессе колебаний волны достигают наибольшей высоты, иллюстрируется фиг. 3,  $a$  и  $b$ . На каждой из них для второй волновой

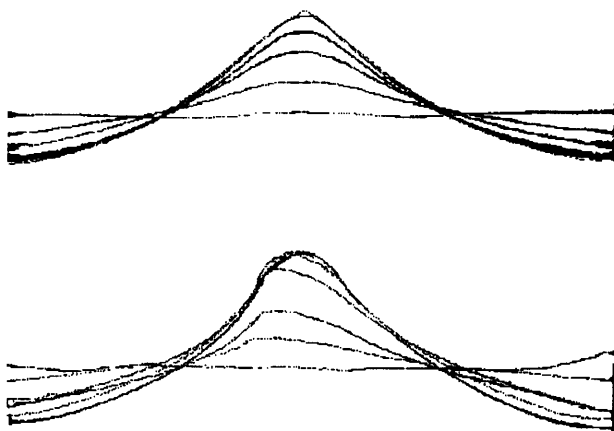


Фиг. 2. Форма профилей второй (*a–в*) и третьей (*z–e*) волновых мод в зависимости от частоты  $\Omega$ : *a–e* –  $\Omega = 21.74; 20.74; 20.27; 27.44; 27.18; 24.17 \text{ c}^{-1}$



Фиг. 3. Результат наложения десяти последовательных профилей максимального развития второй моды для  $h = 15 \text{ см}$ ,  $s = 0.25 \text{ см}$ ,  $\omega_2 = 10.85 \text{ c}^{-1}$ : *a* –  $p = 0.949$ ,  $\Gamma = 0.255$ ; *б* –  $0.946, 0.259$

моды представлен результат наложения десяти последовательных изображений профилей в указанные моменты через период волны. Изображения профилей на фигурах 3, *a* и *б* были получены при безразмерных частотах  $p = 0.949$  и  $0.946$  колебаний сосуда соответственно, где  $p = \Omega/(2\omega_2)$ . Для этих частот глубина модуляции параметра возбуждения (перегрузка)  $\varepsilon = (s\Omega^2)/g$  равна  $0.108$  и  $0.107$  соответственно. Полученная на фиг. 3, *a* тонкая кривая свидетельствует о точной повторяемости формы профиля через период волны. Поскольку профиль симметричен относительно вертикали, проходящей через гребень волны, то данную волну, наблюдаемую при  $p = 0.949$ , следует отнести к категории регулярных волн. “Размытая кривая” на фиг. 3, *б* свидетельствует об отсутствии повторяемости формы профиля через период волны. Поэтому волну, наблюдаемую при  $p = 0.946$ , нельзя отнести к категории регулярных волн. Поскольку размытость кривой



Фиг. 4. Изменение волнового профиля в течение интервала  $T/4$ : *a* – регулярная волна, шаг по времени  $\Delta t = T/18$ ,  $T = 0.600$  с,  $p = 0.965$ ; *б* – нерегулярная волна,  $\Delta t = T/19$ ,  $T = 0.612$  с,  $p = 0.946$

на фиг. 3, *б* – небольшая, то можно сделать вывод о сохранении связности жидкого объема и поэтому отнести данную волну к категории нерегулярных (но не разрушающихся) волн.

Отметим, что профиль, изображенный на фиг. 3, *a*, есть профиль регулярной волны наибольшей высоты, наблюдаемой в экспериментах. Повторим еще раз, что эта регулярная волна наибольшей высоты второй волновой моды возбуждалась на частоте колебаний сосуда  $p = 0.949$ , а ее крутизна  $\Gamma_m = 0.255$  при  $\varepsilon = 0.108$ .

Для третьей моды крутизна профиля регулярной волны Фарадея максимальной высоты была определена как  $\Gamma_m = 0.236$  при  $p = 0.954$  и  $\varepsilon = 0.167$ .

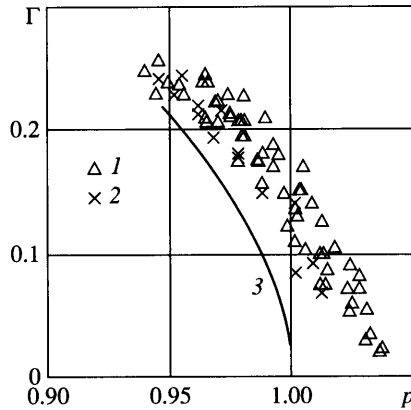
Полученное значение максимальной крутизны для второй моды  $\Gamma_m = 0.255$  оказалось больше полученных в [7] и [8] величин  $\Gamma_m = 0.216$  ( $\varepsilon = 0.163$ ),  $0.154 - 0.224$  ( $\varepsilon = 0.054 - 0.079$ ), соответственно.

На фиг. 4, *a* и *б* показано изменение волновых профилей в течение интервала  $T/4$ , где  $T = 4\pi/\Omega$  – период волны. Каждая фигура получена при наложении последовательных изображений профилей через интервалы времени  $\Delta t = T/18$  и  $T/19$  соответственно. Моменту  $t = 0$  соответствует волна с почти свободной горизонтальной поверхностью, а  $t = T/4$  – волна наибольшего развития, т.е. ее гребень имеет наибольшую высоту. Для регулярных волн (фиг. 4, *a*) характерна симметрия профиля в пространстве относительно вертикали, проходящей через пучность волны. Кроме того, анализ данных эксперимента показал, что периодическое изменение формы профиля этих волн во времени характеризуется симметрией в пределах каждого периода относительно момента  $t = T/2$ . Для нерегулярных волн (фиг. 4, *б*) присуще нарушение как пространственной симметрии, так и периодичности волн.

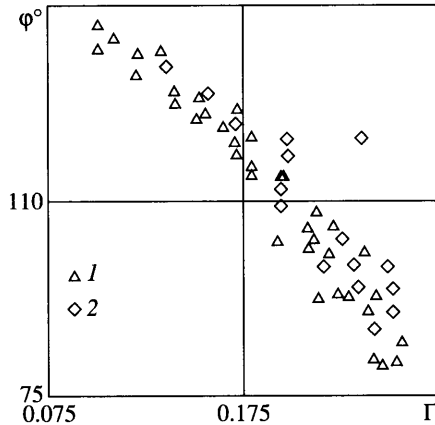
На фиг. 5 приведены резонансные зависимости для регулярных волн в безразмерных переменных ( $p$ ,  $\Gamma$ ). Из них видно, что регулярные волны второй и третьей волновых мод наблюдаются в диапазоне безразмерных частот колебаний сосуда  $0.944 \leq p \leq 1.037$ , и максимальная крутизна волн  $\Gamma_m = 0.255$  соответствует  $p_m = 0.944$ .

На основании приведенных данных можно сделать вывод, что в случае основного резонанса в сосуде с размерами  $50 \times 4 \times 40$  см при  $h/\lambda = 0.3$  максимальная крутизна  $\Gamma_m$  второй и третьей волновых мод Фарадея оценивается величинами 0.255 и 0.236 соответственно.

Остановимся на вопросе о предельном угле  $\varphi_m$ , который был предсказан в [3.4] как  $\varphi_m = 90^\circ$ . Поскольку все наблюдавшиеся в эксперименте профили были гладкими, то по



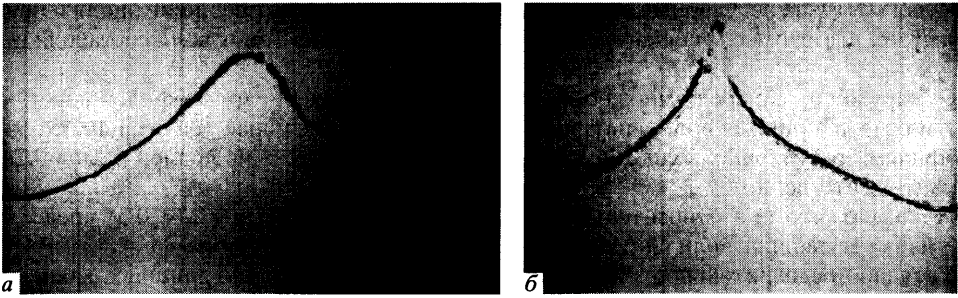
Фиг. 5. Зависимость крутизны  $\Gamma$  регулярных волн Фарадея от безразмерной частоты колебаний сосуда  $p$  для сосуда  $50 \times 4 \times 40$  см,  $h = 15$  см,  $s = 0.25$  см: 1, 2 –  $n = 2$ ; 3



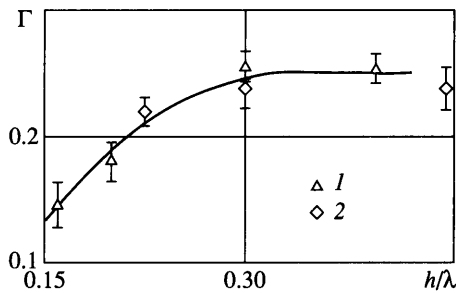
Фиг. 6. Угол между касательными, проведенными в точках перегиба гребня волны, для сосуда  $50 \times 4 \times 40$  см,  $s = 0.25$  см: 1, 2 –  $n = 2$  (вода); 3 (вода)

аналогии с [3, 6] был выполнен следующий предельный переход. Рассматривалась последовательность профилей максимального развития волн, крутизна  $\Gamma$  которых увеличивалась с уменьшением  $p$  до значения  $\Gamma_m = 0.255$ , отвечающего максимальной крутизне регулярных волн. Для каждого значения  $\Gamma$  определялся угол  $\varphi(\Gamma)$  между касательными, проведенными в точках перегиба гребня, расположенными симметрично относительно вертикали, проходящей через пучность волны. На фиг. 6 приведена зависимость  $\varphi = \varphi(\Gamma)$ , из которой видно, что предельной крутизне  $\Gamma_m = 0.255$  соответствует угол  $\varphi_m \approx 80^\circ$ , причем при дальнейшем увеличении  $\Gamma$  этот угол будет уменьшаться. Таким образом, измеренное значение  $\varphi_m \approx 80^\circ$  оказалось значительно меньше величины, приведенной в [3, 6].

У нерегулярных и разрушающихся волн форма профиля, вообще говоря, стохастическая. Однако анализ большого числа фотографий различных профилей максимальной высоты таких волн в частотном диапазоне  $p < 0.944$  показал, что среди них можно выделить отдельные реализации, в которых волновые профили похожи на профили волн ре-



Фиг. 7. Самые высокие профили, близкие по форме к профилям регулярных волн: *а* – нерегулярная волна  $p = 0.946$ ,  $\Gamma = 0.288$ ; *б* – разрушающаяся волна  $p = 0.877$ ,  $\Gamma = 0.429$



Фиг. 8. Зависимость предельной крутизны  $\Gamma$  регулярных волн Фарадея от безразмерной глубины  $h/\lambda$  жидкости для сосуда  $50 \times 4 \times 40$  см,  $s = 0.25$  см: 1, 2 –  $n = 2$  (вода); 3 (вода)

гулярных: они пространственно симметричные и нет срыва жидкости с гребня волны. На фиг. 7, *а* и *б* приведены указанные профили максимальной высоты, выбранные из серий наблюдаемых профилей нерегулярных и разрушающихся волн соответственно. Их крутизны  $\Gamma_m = 0.288$  для волн нерегулярных и 0.429 для волн разрушающихся.

Все представленные выше результаты были получены для волн Фарадея на свободной поверхности воды при глубине  $h = 15$  см. Так как при этом  $h/\lambda = 0.3$ , то данный случай близок к случаю жидкости бесконечной глубины. Уменьшение глубины в значительной мере влияет на максимальную крутизну регулярных волн  $\Gamma_m$ . Это видно из фиг. 8, на которой представлены зависимости  $\Gamma_m$  от  $h/\lambda$  для второй и третьей волновых мод.

Для оценки возможного влияния поверхностного натяжения жидкости на максимальную крутизну исследуемых волн Фарадея была выполнена серия экспериментов, в которых вместо воды использовался керосин (поверхностное натяжение 30 дин/см). Для второй моды ( $n = 2$ ,  $\lambda = 50$  см) при  $h = 15$  см,  $s = 0.25$  см предельная крутизна оказалась  $\Gamma_m = 0.242$  при  $p_m = 0.946$ . Это значение с точностью до 4% совпадает с величиной, полученной для воды (71 дин/см). Таким образом, у достаточно длинных, как в данном эксперименте, волн максимальная крутизна мало чувствительна к изменению поверхностного натяжения.

**Заключение.** Использование параметрического резонанса Фарадея как способа генерации стоячих гравитационных волн на свободной поверхности жидкости позволило разделить наблюдаемые волны Фарадея на три категории: регулярные, нерегулярные и разрушающиеся волны. Установлено, что на поверхности глубокой жидкости макси-

мальная крутизна регулярных волн равна 0.255, что превышает величину, полученную в других исследованиях. Оценка предельного угла при гребне таких волн составила величину  $80^\circ$ .

Обнаружено, что среди множества, вообще говоря, случайных профилей нерегулярных и разрушающихся волн наибольшей высоты есть отдельные реализации, схожие с профилями регулярных волн. Максимальные крутизны таких профилей равны 0.288 и 0.429 соответственно.

Показано, что при относительно малых глубинах жидкости ( $h/\lambda < 0.3$ ) предельная крутизна регулярных волн Фарадея существенно зависит от глубины.

Сделано предварительное заключение о том, что у достаточно длинных, как в условиях данного эксперимента, волн максимальная крутизна мало чувствительна к изменению поверхностного натяжения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00043).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
2. *Perlin M., Schultz W.W.* Capillary effects on surface waves // *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 2000. V. 32. P. 241–274.
3. *Penney W.G., Price A.T.* Finite periodic stationary gravity waves in a perfect fluid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1952. V. 224. № 882. P. 254–284.
4. *Mercer G.N., Roberts A.J.* Standing waves in deep water: Their stability and extreme form // *Phys. Fluids. A.* 1992. V. 4. № 2. P. 259–269.
5. *Saffman P.G., Yuen H.C.* A note on numerical computations of large amplitude standing waves // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 95. Pt. 4. P. 707–715.
6. *Taylor G.I.* An experimental study of standing waves // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 218. № 1132. P. 44–59.
7. *Jiang L., Ting C.L., Schultz W.W.* Moderate and steep Faraday waves: instabilities, modulation, and temporal asymmetries // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 329. P. 275–307.
8. *Schultz W.W., Vanden-Broeck J.M., Jiang L., Perlin M.* Highly nonlinear standing water waves with small capillary effect // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 369. P. 253–272.
9. *Bredmose H., Brocchini M., Peregrine D.H., Thais L.* Experimental investigation and numerical modelling of steep forced water waves // *J. Fluid Mech.* 2003. V. 490. P. 217–249.
10. *Longuet-Higgins M.S., Drazen D.A.* On steep gravity waves meeting a vertical wall: a triple instability // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 466. P. 305–318.
11. *Potts H.E., Diver D.A.* Large-amplitude ferrofluid surface waves and jets // *New J. Phys.* 2001. V. 3. P. 7.1–7.14.
12. *Калининченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование параметрического возбуждения поверхностных волн. Препринт № 243. М.: ИПМ АН СССР, 1985. 56 с.
13. *Калининченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я., Чайковский А.А.* Экспериментальное исследование поверхностных волн при резонансе Фарадея // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 1. С. 122–129.
14. *Секерж-Зенькович Я.И.* К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // *Докл. АН СССР.* 1947. Т. 58. № 4. С. 551–553.