

УДК 533.6.011.72

© 2007 г. А. Н. КРАЙКО, К. С. ПЬЯНКОВ

О СКАЧКАХ УПЛОТНЕНИЯ В МЕСТНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЗОНАХ

Приводятся результаты численного интегрирования уравнений Эйлера, описывающих плоские и осесимметричные течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с местными сверхзвуковыми зонами. Предмет исследования – возникновение скачков, замыкающих сверхзвуковые зоны. Расчет течения в окрестности начальной точки замыкающего скачка проводится на вложенных, последовательно измельчающихся сетках с аккуратностью, намного превосходящей достигнутую ранее. Выполненные расчеты и анализ ряда дискуссионных моментов не оставляют сомнения в том, что первопричина возникновения замыкающего скачка – пересечение внутри сверхзвуковой зоны C^- -характеристик, идущих от звуковой линии.

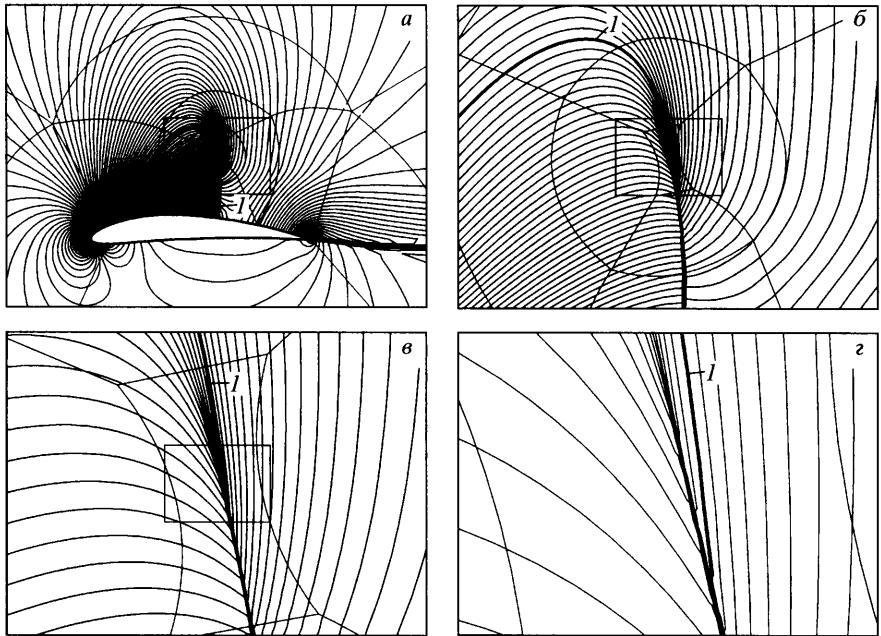
Ключевые слова: идеальный газ, численное интегрирование уравнений Эйлера, местная сверхзвуковая зона, замыкающий скачок уплотнения.

Изучение причин образования скачков уплотнения, которые, как правило, замыкают местные сверхзвуковые зоны, имеет богатую историю. Сначала в предположении автономности течения в окрестности точки зарождения скачка исследовалась возможность ее расположения на звуковой линии (при течении газа слева направо – на правой границе сверхзвуковой зоны). Было установлено [1–10], что подобное возможно только тогда, когда на звуковую линию приходит характеристика, несущая конечные разрывы первых или бесконечные разрывы вторых производных от параметров потока. В результате восторжествовала точка зрения ([11], с. 388), что при обтекании достаточно гладких тел скачок, замыкающий местную сверхзвуковую зону, начинается из-за пересечения характеристик (в рассматриваемых далее примерах – C^- -характеристик) – волн сжатия, идущих от звуковой линии. Пересечению C^- -характеристик способствует монотонное изменение угла наклона θ вектора скорости при движении вдоль звуковой линии [12]: угол Маха на ней постоянен (равен $\pi/2$), и, следовательно, благодаря указанной монотонности каждая последующая C^- -характеристика изначально направлена навстречу предыдущей.

Если начальная точка замыкающего скачка лежит внутри местной сверхзвуковой зоны, то нарастание его интенсивности таково, что на проходящей через эту точку C^+ -характеристике терпят бесконечный разрыв вторые производные параметров течения. Благодаря этому точка ее пересечения со звуковой линией становится начальной точкой второго замыкающего скачка, образующего вместе с первым “перевернутую λ -образную конфигурацию” [13].

Возникновение замыкающего скачка внутри местной сверхзвуковой зоны подтверждают и результаты численного интегрирования уравнений Эйлера [14–17], хотя использованные в [14–17] разностные сетки не позволяли подробно разрешать тонкую структуру потока в окрестности точки его зарождения. Последнее и отсутствие ответа на предпринятую в [18] попытку ревизии результатов [1–11, 13–17] оправдывают публикацию более аккуратных и убедительных, чем в [14–17], результатов расчета плоских и осесимметричных течений со скачками, замыкающими местные сверхзвуковые зоны.

1. Результаты расчета течений с местными сверхзвуковыми зонами. Приводимые ниже результаты получены псевдоустановлением по времени (со своим временным шагом



Фиг. 1. Изомахи ($\Delta M = 0.01$) при обтекании профиля потоком с $M_\infty = 0.64$ под углом атаки $\alpha = 2^\circ$, а-г – последовательно выделяемые фрагменты течения, 1 – изолиния $M = 1$

в разных расчетных ячейках) при интегрировании плоских и осесимметричных уравнений Эйлера, описывающих околозвуковое обтекание профиля и комбинации конус-цилиндр с образованием местных сверхзвуковых зон. Нестационарные уравнения Эйлера интегрировались с помощью программы [19], в основе которой лежит схема Годунова [20], модифицированная в соответствии с предложениями [21, 22]. В областях гладкого распределения параметров на близких к равномерным разностным сеткам эта схема обеспечивает аппроксимацию дифференциальных уравнений течения со вторым порядком. Безотражательные условия на границе расчетной области реализовывались способом, использованным в [19]. В рассчитанных примерах газ совершенный с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$.

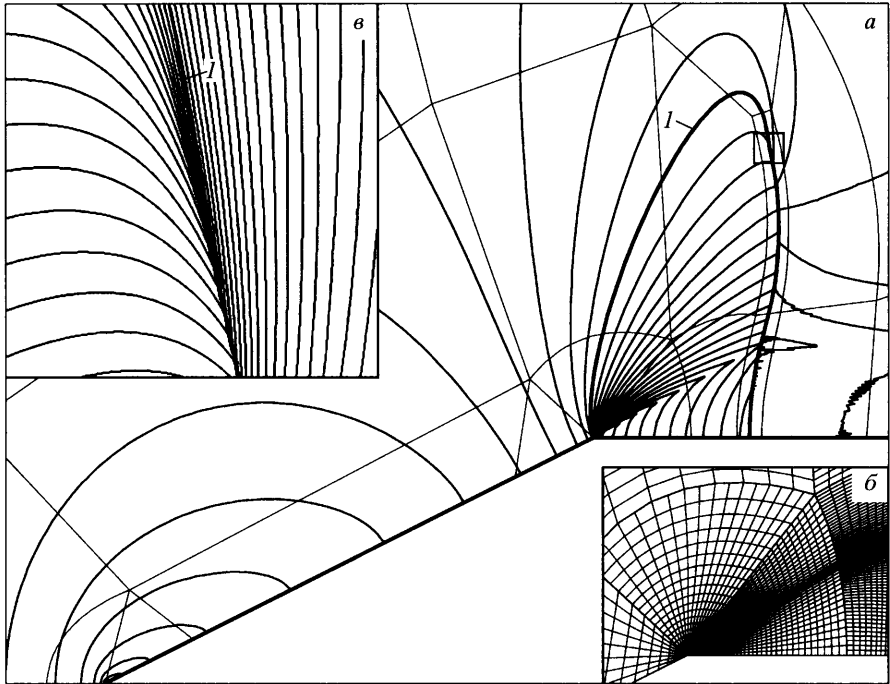
Первый пример относится к обтеканию профиля равномерным набегающим потоком с числом Маха $M_\infty = 0.64$ при угле атаки $\alpha = 2^\circ$. На фиг. 1 наряду с изолиниями (тонкие кривые) еще более тонкими кривыми нарисованы границы сеточных блоков, покрывающих соответствующие участки расчетной области. Вся расчетная область близка к кругу, радиус которого составлял пять хорд профиля. Как и в [19], применялась техника вспомогательных окружающих расчетную область (“окаймляющих”) ячеек. В процессе счета параметры в окаймляющих ячейках корректировались с учетом получающейся в расчете подъемной силы профиля и отвечающей ей по формуле Жуковского циркуляции. Изолиния $M = 1$ включает собственно звуковую линию и линию $M = 1$ в размазанном замыкающем скачке. Разбиение сетки на блоки с измельчением разностной сетки в блоках, окружающих начальную точку замыкающего скачка, проводилось в процессе счета. Из общего числа расчетных ячеек $4.6 \cdot 10^4$ на последний блок, занимающий пренебрежимо малую часть расчетной области, приходилось $1.6 \cdot 10^4$ ячеек. На границах блоков конечные изменения претерпевают и размер ячеек, и направление сеточ-

ных линий. То, что это не нарушает гладкости изолиний – свидетельство совершенства реализации разностной схемы.

Прямоугольники, нарисованные на фиг. 1, *a*, *b* и *в*, ограничивают те области, которые на последующих фиг. 1, *b*, *в* и *г* занимают все поле течения. Последовательное рассмотрение изолиний на фиг. 1, *a–г* обнаруживает их сгущение и слияние слева от звуковой линии, т.е. внутри сверхзвуковой зоны. Это, однако, обнаруживается не сразу. Более того, если исходить из фиг. 1, *a*, то естественно принять, что замыкающий скачок начинается на звуковой линии, а ведь качество изображения на фиг. 1, *a* заведомо выше качества снимков, получающихся в аэродинамическом эксперименте. Именно недостаточная разрешающая способность методов визуализации таких течений – главная причина многочисленных попыток [23–27] построения для гладких профилей решений с замыкающим скачком, начинающимся на звуковой линии. Все эти попытки оказались неудачными. Если несколько лучшее разрешение на фиг. 1, *b* еще недостаточно для уверенного определения места возникновения замыкающего скачка, то фигуры 1, *в* и *г* не оставляют сомнений в правильности сформулированной выше позиции. С другой стороны, для выявления более тонких деталей, приводящих к образованию “перевернутой λ -образной конфигурации” требуются на порядки более мощные сетки.

Второй пример расчета обтекания комбинации конус-цилиндр дозвуковым потоком ($M_\infty = 0.83$). Полуугол при вершине конуса $\theta = \arctg(1/2) \approx 26.6^\circ$. Поток, заторможенный до нулевой скорости в вершине конуса, разгоняется вдоль его образующей до $M = 1$ перед изломом в точке стыковки конуса и цилиндра. В центрированной волне разрежения, возникающей при обтекании излома, поток разгоняется до сверхзвуковой скорости, а затем тормозится с удалением от излома вдоль поверхности цилиндра. Значение числа Маха сразу за изломом, которое можно рассчитать по справедливым при обтекании излома формулам для простой волны, $M = 2.00085$. Величина $M \approx 2.007$, получившаяся при численном интегрировании уравнений Эйлера в ближайшей к излому ячейке, характеризует весьма высокое качество счета, которое достигнуто благодаря использованию многоблочной сетки. Представление о ее структуре дают границы блоков на фиг. 2, *a* и изображенный на фиг. 2, *b* фрагмент сетки из блоков, примыкающих к излому. На фиг. 2, *b* сеточные линии каждого семейства разрежены в 8 раз. Для аккуратного расчета центрированной волны сеточные линии одного семейства фокусируются в излом. Близкая к окружности граница расчетной области располагалась на расстоянии пяти длин конуса. При общем числе расчетных точек $6.3 \cdot 10^5$ на блок, содержащий верхнюю часть замыкающего скачка, приходилось $1.2 \cdot 10^5$ ячеек.

Изолинии на фиг. 2, *a* еще в большей степени, чем в случае фиг. 1, *a*, вроде бы, свидетельствуют в пользу возникновения скачка на звуковой линии. То, что это тем не менее так, показывает фигура 2, *в*. На ней в увеличенном масштабе с интервалом $\Delta M = 0.005$ нарисованы изолинии в квадрате, выделенном на фиг. 2, *a*. Квадрат содержал около $2 \cdot 10^4$ расчетных ячеек. Сгущение изолиний на фиг. 2, *в* не оставляет сомнений в том, что начальная точка замыкающего скачка располагается внутри сверхзвуковой зоны. В то же время использованная расчетная сетка не позволяет обнаружить не только “перевернутую λ -образную конфигурацию”, но и слабый косой скачок, который в соответствии с результатами [28–35] замыкает справа пучок волн разрежения. И в плоском, и в осесимметричном случаях такой скачок образуется из-за приводящего к пересечению C^+ -характеристик торможению сверхзвукового потока за центрированной волной, начинающейся от звуковой линии. Согласно [28–30] интенсивность роста давления вдоль поверхности цилиндра такова, что скачок начинается сразу за изломом, имея в нем нулевую интенсивность и касаясь последней характеристики пучка. В рассматриваемом примере наличие торможения сверхзвукового потока справа от центрированной волны подтверждают изомахи на фиг. 2, *a*.

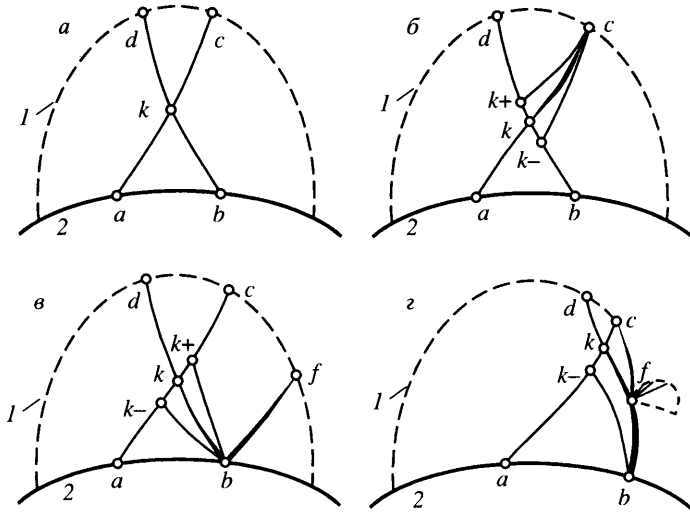


Фиг. 2. Обтекание комбинации конус-цилиндр потоком с $M_\infty = 0.83$; *a* – изомахи ($\Delta M = 0.05$), границы расчетных блоков и квадрат, окружающий начальную точку скачка; *б* – расчетные блоки около излома, *в* – изомахи ($\Delta M = 0.005$) в квадрате на фиг. 2, *a*, *l* – изолиния $M = 1$

Негладкая (пилообразная) форма нескольких изолиний за замыкающим скачком связана с тем, что в этой части потока число Маха близко к постоянному. Примыкающие к скачку треугольники (в том числе едва заметные) отвечают $M = 0.7$, а две уходящие вправо изолинии $M = 0.75$. Из-за этого небольшие погрешности в определении полной энтальпии и энтропии, а следовательно – и числа Маха усиливаются при вычислении координат, а затем проявляются как “пила” при построении изомахах.

2. Некоторые вопросы теории. Недостаточная разрешающая способность методов визуализации в аэродинамическом эксперименте – не единственная причина предпринятых сначала в [23–27], а позднее в [18] попыток построения замыкающего скачка, начинающегося на звуковой линии в отсутствие приходящей на нее разрывной S^+ -характеристики. Другая причина – теорема 8 работы [12], согласно которой замыкающий скачок внутри местной сверхзвуковой зоны начинаться не может. Так как высказанное в [13] замечание об ошибочности этой теоремы и противоречащие ей результаты [14–16] не вызвали возражений авторов [12], то какой-либо разбор указанной теоремы, вроде бы, излишен. Оказалось, что это не так, ибо в [18] данная теорема – главный козырь, опираясь на который, автор пытается провести ревизию результатов, обосновывающих положение о возникновении замыкающего скачка не на границе, а внутри местной сверхзвуковой зоны. По этой причине поясним, что неверно в доказательстве этой теоремы (остальные результаты работы [12] сомнений не вызывают) и в чем ошибка автора [18].

Согласно обсуждаемой теореме [12]: “Если при некоторых, определяющих движение газа условиях (при обтекании тела безграничным потоком это – M_∞ и форма тела) су-



Фиг. 3. К доказательству теоремы 8 работы [12], 1 – звуковая линия, 2 – контур тела.

ществовало потенциальное течение с местной сверхзвуковой зоной, то образованию скачков внутри или на границе сверхзвуковой зоны, вызванному каким-либо изменением этих условий, не может предшествовать появление бесконечных ускорений во внутренних точках сверхзвуковой зоны, если кривизна части контура, прилегающей к ней, не обращается в бесконечность”. Доказательство теоремы опирается на оценки производных, определяющих ограниченность ускорений. При этом ключевую роль играет выполнение свойства монотонности изменения величины скорости V и угла ее наклона θ вдоль характеристик и возможность следующего построения (фиг. 3, а). “Для оценки ускорений в точке k через нее можно провести характеристики обоих семейств ac и db , соединяющие точки a и b контура обтекаемого тела с точками c и d звуковой линии”. На самом же деле, и предполагаемое выполнение свойства монотонности и существование участков kc и kb соответствующих характеристик имеют место только тогда, когда в точке k не пересекаются одноименные характеристики. В противном случае точка k становится начальной точкой скачка, вследствие чего нарушаются предположения, используемые при доказательстве теоремы. Возникающие при этом ситуации изображены на фиг. 3, б–г, на которых характеристики обоих семейств нарисованы тонкими линиями, а скачки – жирными кривыми переменной толщины.

На фиг. 3, б в точке k пересекаются C^+ -характеристики. В результате на идущий к звуковой линии скачок kc приходят C^+ -характеристики с отрезка k_+k_- характеристики db . При этом на отрезке k_+k_- в общем случае не выполняется свойство монотонности, ибо для его выполнения C^+ -характеристики, уходящие с рассматриваемого отрезка C^- -характеристики, должны заканчиваться на звуковой линии. Если k – точка пересечения C^- -характеристик (фиг. 3, в и г), то возникающий скачок, идущий к контуру обтекаемого тела, либо отражается от него (фиг. 3, в), либо еще раньше (фиг. 3, г) выходит на звуковую линию. На фиг. 3, в и г при выполнении свойства монотонности на всей проходящей через точку k C^+ -характеристике ad нет отрезков C^- -характеристики, которые соединяли бы точку k с контуром тела. Таким образом, при доказательстве обсуждаемой теоремы допущена достаточно распространенная ошибка, состоящая в неявном использовании того, что требуется доказать.

Результаты расчетов, представленные на фиг. 1 и 2, соответствуют схеме фиг. 3, з. Как отмечалось выше, разрешающая способность использованных разностных сеток не позволила обнаружить скачок df – вторую “ножку” перевернутой λ -образной конфигурации. Другая связанная с этим скачком деталь – дополнительная сверхзвуковая зона, которая согласно [11] возникает при взаимодействии скачка df с “главным” замыкающим скачком kb . На фиг. 3, з граница этой зоны дана штрихами, причем нижняя ее часть совпадает с отрезком линии тока, прошедшей через точку f . Как и при дифракции ударной волны на клине в условиях “парадокса Неймана” [36], в дополнительную сверхзвуковую зону из точки f выходит центрированная волна разрежения. В [36] для разрешения особенностей течения с четырехволновой системой потребовалось специальное сгущение разностной сетки и явное построение всех скачков, а сама эта зона оказалась чрезвычайно малой.

В [18] после совмещения начала декартовых координат xu с точкой зарождения скачка k , как это обычно делается для околосзвуковых течений, вводятся переменные

$$\eta = (V - 1)/V, \quad \tau = (1 + \gamma)^{-1/3} \theta$$

Для них в исследуемом в [18] классе течений принимается, что в малой окрестности точки k $\eta \sim y^{2m}$, $\tau \sim y^{3m}$ с несущественной для дальнейшего константой m .

Далее давление p , плотность ρ и проекции u и v скорости газа на оси x и y представляются в виде (c_{p1} , $c_{\rho1}$, c_{u1} и c_{v1} – постоянные коэффициенты)

$$p = \gamma^{-1} + c_{p1}y^{2m}, \quad \rho = 1 + c_{\rho1}y^{2m}, \quad u = 1 + c_{u1}y^{2m}, \quad v = c_{v1}y^{3m} \quad (2.1)$$

В согласии с (2.1) для полной энтальпии H и энтропийной функции $S \equiv p/\rho^\gamma$ получают представления

$$H = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} + \left(c_{u1} + \frac{\gamma c_{p1} - c_{\rho1}}{\gamma - 1} \right) y^{2m} + \left(\frac{c_{u1}^2}{2} + c_{\rho1} \frac{c_{p1} - \gamma c_{\rho1}}{\gamma - 1} \right) y^{4m} \quad (2.2)$$

$$S = \frac{1}{\gamma} + (c_{p1} - c_{\rho1})y^{2m} - \left(\gamma c_{p1} c_{\rho1} - \frac{\gamma + 1}{2} c_{\rho1}^2 \right) y^{4m} + \dots$$

причем все коэффициенты обозначенного многочлием разложения S по более высоким степеням y^{2m} выражаются через c_{p1} , $c_{\rho1}$ и γ . По предположению поток перед скачком изоэнергетический и изэнтропический со значениями H и S , определяемыми первыми слагаемыми в правых частях (2.2). Следовательно, входящих в правые части равенств (2.2) коэффициентов c_{p1} , $c_{\rho1}$ и c_{u1} недостаточно даже для того, чтобы обратить в нули четыре множителя перед y^{2m} и y^{4m} . На основании этого в [18] утверждается, что “члены, пропорциональные y^{4m} , вносят паразитный эффект несохранения полной энтальпии и возникновения завихренности”.

Получающаяся из выражений (2.2) переменность H и S даже в набегающем потоке – следствие изначально неверных формул (2.1). Правильные разложения не ограничиваются только включенными в (2.1) “младшими” слагаемыми. Привлечение следующих слагаемых (для давления это $c_{pn}y^{2nm}$ с $n = 2, 3, \dots$ и соответственно для других параметров) приводит к тому, что в множителях при y^{4m} разложений H и S наряду с c_{p1} , $c_{\rho1}$ и c_{u1} появляются коэффициенты c_{p2} , $c_{\rho2}$ и c_{u2} и аналогично в других множителях, а также в выражениях для потоков массы и количества движения. Выбор этих коэффициентов обеспечивает постоянство S в набегающем, а H – во всем потоке и выполнение законов сохранения на скачке. В число таких законов обязательно входит записанное в трансзвуковом приближении уравнение ударной поляры. В [18] под рассуждения о следующих из неверных формул (2.1) “паразитных эффектах” уравнение ударной поляры было проигнорировано. Только благодаря этому стало возможно решение с замыкающим

скачком, который начинается на звуковой линии без прихода разрывной характеристики в его начальную точку.

Заключение. Представленные результаты расчетов и анализ ряда дискуссионных моментов позволяют утверждать, что главный скачок, замыкающий местную сверхзвуковую зону, зарождается внутри нее из-за пересечения характеристик, идущих от звуковой линии. Достигнутое при этом разрешение деталей течения весьма велико, однако недостаточно для выявления таких более тонких деталей течения, как перевернутая λ -образная конфигурация, дополнительная сверхзвуковая зона и связанная с ней четырехволновая система.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00846) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект: НШ-9902.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Исследование особенностей течения при помощи уравнений Эйлера-Трикоми // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. № 4. С. 725–728.
2. Germain P., Gillon G. Écoulements transsoniques au voisinage d'un point de rencontre d'une onde de choc et d'une ligne sonique // Publ. ONERA. 1961. № 102. P. 47–66.
3. Горьков Л.П., Потаевский Л.П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 2. С. 293–296.
4. Лифшиц Ю.Б., Рыжов О.С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1964. Т. 4. № 5. С. 954–958.
5. Germain P. Écoulements transsoniques homogènes // Progress in Aeronautical Sciences. Oxford, etc. Pergamon Press, 1964. V. 5. P. 143–273.
6. Лифшиц Ю.Б. О течениях в окрестности точки встречи звуковой линии со скачком уплотнения // Инж. ж. 1965. Т. 5. Вып. 1. С. 29–34.
7. Цветков А.П., Чернов И.А. Автомодельные околосзвуковые течения, аналитические на предельной характеристике // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1972. Вып. 1(4). С. 23–37.
8. Цветков А.П. Течение в местной сверхзвуковой зоне со скачком уплотнения // Аэродинамика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973. Вып. 2(5). С. 27–35.
9. Цветков А.П., Чернов И.А. Задача о местной сверхзвуковой зоне в классе автомодельных течений // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 2. С. 105–114.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2004. 736 с.
11. Guderley K.G. Theorie Schallnaher Strömungen. Berlin etc.: Springer, 1957 = Гудерлей К.Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
12. Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
13. Крайко А.Н. О конфигурации скачков уплотнения, замыкающих местную сверхзвуковую зону // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 236–243 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 218–227.
14. Murman E.M. Analysis of embedded shock waves calculated by relaxation methods // AIAA Journal. 1974. V. 12. № 5. P. 626–633.
15. Moretty G. Accuracy and efficiency in the numerical analyses of transonic flows // Symposium Transonicum. 2. Göttingen, 1975. Berlin: Springer, 1976. P. 439–448.
16. Yu. N.J., Seebass A.R. Inviscid transonic flow computations with shock fitting // Symposium Transonicum. 2. Göttingen, 1975. Berlin: Springer, 1976. P. 449–456.
17. Еременко В.А., Рыжов О.С. О течениях в местной сверхзвуковой зоне у профиля крыла бесконечного размаха // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 3. С. 560–563.
18. Шербаков С.А. О формировании ударной волны на границе местной сверхзвуковой зоны // ПМТФ. 1993. № 1. С. 24–32.
19. Крайко А.Н., Пьянков К.С. Построение профилей и мотогондол, суперкритических в околосзвуковом потоке идеального газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40. № 12. С. 1890–1904 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 250–264.

20. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
21. Колган В.П. Использование принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
22. Тилляева Н.И. Обобщение модифицированной схемы С.К. Годунова на произвольные нерегулярные сетки // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17. № 2. С. 18–26 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 201–210.
23. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.
24. Бийбосунов И. Пример околосзвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 311–319.
25. Ланин И.Н. Приближенное построение обтекания заданного профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся скачком уплотнения // Изв. вузов. Авиат. техника. 1961. № 3. С. 155–162.
26. Бийбосунов И., Рыскулов А. Плоскопараллельное околосзвуковое течение с разрывом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 4. С. 95–100.
27. Чернов И.А., Шевырев С.П. О первом примере Франкля течения в местной сверхзвуковой зоне с ударной волной // Аэродинамика. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973. Вып. 2 (5). С. 11–17.
28. Vaglio-Laurin R. Transonic rotational flow over a convex corner // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. Pt. 1. P. 81–103.
29. Friedman M.P. Two-dimensional and axisymmetric rotational flow past a transonic flows past a transonic corner // J. Aerospace Sci. 1962. V. 29. № 4. P. 503, 504.
30. Шифрин Э.Г. Образование “висячего” скачка уплотнения при обтекании профиля с изломом образующей // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 6. С. 1159–1167.
31. Шифрин Э.Г. О скачке уплотнения при трансзвуковом обтекании выпуклого угла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 5. С. 43–48.
32. Есин А.И., Чернов И.А. О построении равномерно пригодного решения в окрестности звукового излома образующей тела вращения // Аэродинамика. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. Вып. 4 (7). С. 36–46.
33. Бойченко В.С., Лифшиц Ю.Б. Трансзвуковое течение около выпуклого угла // Учен. зап. ЦАГИ. 1976. Т. 7. № 2. С. 8–16.
34. Есин А.И., Чернов И.А. О скачке уплотнения при обтекании выпуклого угла // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 292–297.
35. Есин А.И., Чернов И.А. К вопросу о локальном течении вблизи выпуклого угла // Аэродинамика. Сб. статей. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. Вып. 6 (9). С. 17–32.
36. Васильев Е.И., Крайко А.Н. Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // Ж. вычислит. математики и мат. физики. 1999. Т. 39. № 8. С. 1393–1404 = Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред.-сост. Крайко А.Н., Ватажин А.Б., Секундов А.Н. М.: Физматлит, 2001. С. 235–249.