МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2007

УДК 533.6.011.55

© 2007 г. И. Г. БРЫКИНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Исследуется двумерное обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком разреженного газа в режиме течения, переходном от континуального к свободномолекулярному. В [1] путем асимптотического анализа выявлены три режима течения разреженного газа в зависимости от соотношения между определяющими параметрами задачи и исследован один из режимов. В данной работе получены асимптотические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса для двух других режимов обтекания. Получены аналитические выражения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления в зависимости от параметров набегающего потока, геометрии и температуры обтекаемого тела; значения этих коэффициентов при стремлении числа Рейнольдса к нулю приближаются к их значениям в свободномолекулярном потоке. Определены параметры подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в различных режимах. Проведены сравнения асимптотических решений с результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.

Ключевые слова: гиперзвуковое течение, разреженный газ, малые числа Рейнольда, коэффициенты трения и теплопередачи, тонкий вязкий ударный слой, асимптотическое решение.

Задачи гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена в потоках разреженных газов связаны с исследованием движения космических аппаратов, а также метеороидов, в верхних слоях атмосферы Земли. Такие задачи характеризуются большими числами Кнудсена Kn или малыми числами Рейнольдса Re, и континуальные модели течения, например уравнения Навье–Стокса, в основном не применимы для их решения, поскольку они дают физически неправильные значения коэффициентов теплопередачи и трения, превышающие их значения в свободномолекулярном потоке и беспредельно возрастающие при $\mathrm{Re} \to 0$. Решение реальных двумерных и трехмерных задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена в рамках уравнения Больцмана или его модельных уравнений до сих пор представляет собой очень сложную проблему, поэтому основным инструментом решения таких задач в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме течения являются различные методы прямого статистического моделирования Монте-Карло. Однако ограничение применимости континуального подхода при малых числах Re в переходном режиме обтекания не исключает возможности использования континуальной модели для расчета таких параметров, как теплопередача и аэродинамические коэффициенты на поверхности тела. Обзор различных методов исследования гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом и оценка границ применимости разных континуальных моделей течения приведены в [2].

Для определения теплового потока, трения и давления на поверхности тела в переходном режиме обтекания в данной работе используется модель тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя. Эта модель была предложена в [3, 4] для исследования гиперзвуковых течений при умеренно больших числах Re. Там же отмечено, что данная модель в случае сильно охлажденной поверхности и линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры в точке торможения осесимметричного тела дает для коэффициентов теплопередачи и трения свободномолекулярные пределы при уменьшении числа Re. В [2] на основе асимптотического анализа уравнений Навье–Стокса было показано, что модель тонкого вязкого ударного слоя оказывается справедливой не только при больших, но и при малых числах Re, а также что эта модель дает правильные значения коэффициентов трения и теплопередачи в окрестности точки торможения затупленного тела в переходном к свободномолекулярному режиме обтекания. Применимость модели тонкого вязкого ударного слоя при определении трения и теплообмена на боковой поверхности тела исследована в [1], где на основании асимптотического анализа были выделены три режима течения в двумерном гиперзвуковом вязком ударном слое при малых числах Re в зависимости от соотношения между определяющими параметрами задачи, и было получено асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя для режима I сильно охлажденной поверхности (в этом режиме из определяющих параметров задачи исчезает температура поверхности T_w).

В данной работе, являющейся продолжением [1], рассматривается задача гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом в случае осесимметричных и плоских течений для двух других режимов – II и III. Уравнения тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Re решаются с помощью метода последовательных приближений [5] и асимптотического разложения в ряды. Определены параметры подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом для различных режимов. Получены асимптотические выражения для давления и коэффициентов теплопередачи и трения, которые дают правильные свободномолекулярные пределы при Re $\to$ 0. При этом коэффициент трения определяется на основе строгой модели тонкого вязкого ударного слоя при нулевом продольном градиенте давления. Асимптотические решения, для оценки их точности и области применимости, сравниваются с имеющимися в литературе результатами расчета методом прямого статистического моделирования Монте-Карло. Полученные в работе аналитические решения могут найти применение в задачах аэродинамики и теплообмена космических аппаратов, а также в задачах аэротермобаллистики метеороидов [6].

1. Постановка задачи. Двумерное стационарное обтекание гладкого затупленного тела гиперзвуковым потоком вязкого разреженного газа рассматривается в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя. Система уравнений тонкого вязкого ударного слоя в переменных Дородницына для плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) течений имеет вид

$$\beta_1 u^2 + \xi u\frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta' f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\xi}{\rho\cos^2\alpha}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu\rho\xi}{\mathrm{Re}\cos\alpha\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$\xi u\frac{\partial g}{\partial \xi} - \left(\beta' f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\mu\rho\xi}{\sigma\mathrm{Re}\cos\alpha\Delta^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(g - \frac{(1-\sigma)\cos^2\alpha}{1-T_w}u^2\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = u, \quad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\Delta\cos^2\alpha}{R}u^2, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon T}{p}$$

$$\mu = T^{\omega}, \quad T = g(1-T_w) + T_w, \quad g = \frac{H - H_w}{H_\infty - H_w}, \quad H = c_p T_0 T + \frac{V_\infty \cos^2\alpha u^2}{2} \qquad (1.1)$$

$$\beta' = \frac{d\ln\Delta}{d\ln\xi} + \beta_w, \quad \beta_w = \xi\left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{R} + \frac{\nu\sin\alpha}{r_w}\right), \quad \beta_1 = \frac{\xi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R}$$

$$\xi = \frac{x}{R_0}, \ \zeta = \frac{1}{\Delta R_0}\int_0^y \rho\,dy, \ \Delta = \frac{1}{R_0}\int_0^{y_s}\rho\,dy, \ y_s = \Delta R_0\int_0^1 \frac{1}{\rho}d\zeta, \ \varepsilon = \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \ \mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}$$

Здесь $R(\xi)R_0$ – радиус кривизны контура тела, R_0 – радиус кривизны в критической точке, $\rho_\infty\rho$ – плотность, $V_\infty\cos\alpha u$ и $-V_\infty\sin\alpha v$ – касательная и нормальная составляющие скорости; ρ_∞ и V_∞ – плотность и скорость набегающего потока, α – угол между касательной к контуру тела и скоростью набегающего потока; $\mu_0\mu$ – коэффициент вязкости, μ_0 – коэффициент вязкости, определяемый по температуре торможения набегающего потока T_0; T_0T – температура, T_0T_w – температура поверхности, H – полная энтальпия, g – приведенная энтальпия, $\rho_\infty V_\infty^2 p$ – давление; r_wR_0 – расстояние от поверхности тела до оси симметрии, γ – отношение удельных теплоемкостей, σ – число Прандтля, Re – число Рейнольдса, определяемое по температуре торможения набегающего потока; индекс s соответствует значениям на ударной волне; ортогональная система координат x, y естественным образом связана с поверхностью обтекаемого тела: x – расстояние вдоль поверхности от точки торможения, y – расстояние от тела по нормали.

В качестве граничных условий на поверхности тела $\zeta = 0$ берутся условия прилипания, на ударной волне $\zeta = 1$ ($y = y_s(x)$) – обобщенные условия Ренкина–Гюгонио:

$$\zeta = 0{:}\ u = 0, \quad g = 0, \quad f = 0$$

$$\begin{aligned} &\zeta = 1{:}\ u = 1 - \frac{\mu\rho}{\mathrm{Re}\Delta\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\zeta}, \quad p = \sin^2\alpha, \quad f = \frac{r_w}{(1+\nu)\Delta\cos\alpha} \\ &g = 1 - \frac{\mu\rho}{\sigma\mathrm{Re}\Delta\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\left(g - \frac{1-\sigma}{1-T_w}\cos^2\alpha u^2\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Уравнения тонкого вязкого ударного слоя (1.1) с граничными условиями (1.2) были впервые выведены из уравнений Навье–Стокса в [3, 4] при следующих условиях: $\varepsilon \ll 1$, $\mathrm{Re} \gg 1$, $\varepsilon\mathrm{Re} = O(1)$, т. е. при умеренно больших числах Re. Для малых чисел Re уравнения тонкого вязкого ударного слоя были выведены из уравнений Навье–Стокса в [2] в предположении малости введенного в работе параметра $\chi = (\mu_s\rho_s^{-1}\mathrm{Re}^{-1})^{1/2}$, в пренебрежении членами $O(\chi^2)$ и $O(\chi)$, за исключением члена с продольным градиентом давления, имеющего порядок χ. Этот член является внепорядковым, но оставляется в уравнениях тонкого вязкого ударного слоя, поскольку играет существенную роль при больших числах Re. Асимптотически строгая модель тонкого вязкого ударного слоя – это уравнения (1.1) без внепорядкового члена с продольным градиентом давления в первом уравнении импульсов.

Коэффициенты трения и теплопередачи на поверхности определяются как

$$\begin{aligned} &c_f = \frac{2\tau}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2\cos\alpha\mu\rho}{\Delta\mathrm{Re}}\left.\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right|_w, \quad c_H = \frac{q}{\rho_\infty V_\infty(H_\infty - H_w)} = \frac{\mu\rho}{\sigma\Delta\mathrm{Re}}\left.\frac{\partial g}{\partial\zeta}\right|_w \\ &\tau = \left(\mu_0\mu\frac{\partial(V_\infty\cos\alpha u)}{\partial y}\right)_w, \quad q = \left(\lambda\frac{\partial(T_0T)}{\partial y}\right)_w \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Рассматриваемые режимы течения разреженного газа. В [1] были выделены три режима двумерного гиперзвукового обтекания тел разреженным газом (в зависимости от возможных соотношений g и T_w):

I: $\varepsilon\mathrm{Re} \gg T_w^{(1+\omega)}/\beta^*$ II: $\varepsilon\mathrm{Re} = O(T_w^{(1+\omega)}/\beta^*)$ III: $\varepsilon\mathrm{Re} \ll T_w^{(1+\omega)}/\beta^*$

$\beta^* = 2r_w/((1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha)$

Выбор режима, или выбор рассматриваемого диапазона чисел Re при заданных параметрах задачи ε, T_w, ω, β^*, определяет оценку температуры при асимптотическом исследовании задачи при малых числах Re, которая для каждого из режимов будет иметь вид

I: $T \sim g$, II: $T \sim g + T_w$, III: $T \sim T_w$.
и соответственно оценку зависящих от температуры плотности и коэффициента вязкости.

В режиме I, соответствующем сильно охлажденной поверхности: $T_w \ll (\varepsilon \mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}$, температурный фактор T_w выпадает из определяющих параметров задачи. В данной работе исследуются режимы II и III, где учитывается зависимость течения от безразмерной температуры обтекаемой поверхности T_w.

Асимптотический анализ показывает, что при $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$: в режиме II: u_s, $g_s = O((\varepsilon \mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)})$, в режиме III: u_s, $g_s = O((\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega}\beta^*)^{1/2})$

3. Асимптотическое решение для режимов II и III. Систему уравнений (1.1) с граничными условиями (1.2) будем решать интегральным методом последовательных приближений с помощью алгоритма, изложенного в [5]. Метод последовательных приближений позволяет получать как численное решение задачи путем вычисления достаточно большого числа приближений, так и приближенное аналитическое решение в первом приближении. В [5] было получено аналитическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя для одного значения $\omega = 1/2$. Получим выражения для коэффициентов теплопередачи и трения c_H и c_f в первом приближении метода последовательных приближений для произвольных значений ω, при задании нулевого приближения в виде линейных функций по поперечной координате ζ. Коэффициент трения при этом будем определять, исходя из строгой модели тонкого вязкого ударного слоя без учета продольного градиента давления, поскольку именно эта модель соответствует малым числам Re и дает асимптотически правильное поведение коэффициента трения при стремлении числа Re к нулю, т.е. при переходе к свободномолекулярному течению. Опуская длинные выкладки, связанные с вычислением однократных и двойных интегралов при применении метода последовательных приближений, запишем полученные в результате этих выкладок выражения для c_H, c_f

$$c_H = \Delta_H \frac{\beta_w \cos\alpha}{2\xi} a\left(1 - \frac{2b}{3}\right) \tag{3.1}$$

$$c_f = \Delta_u \frac{\beta_w \cos^2\alpha}{\xi} a\left[1 - \frac{2a}{3}\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_w}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$\Delta_H = \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 + 4b_3}}{2b_3}, \quad \Delta_u = \frac{-a_4 + \sqrt{a_4^2 + 4a_3}}{2a_3} \tag{3.3}$$

$$b_4 = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi}\beta_w a(1-b), \quad a_4 = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\xi}\beta_w a(1-a) \tag{3.4}$$

$$b_3 = \frac{\cos\alpha}{\xi}\beta_w A_s(g), \quad a_3 = \frac{\cos\alpha}{\xi}(\beta_w A_s(u) + \beta_1 B_s(u)) \tag{3.5}$$

Здесь решение зависит от геометрических параметров и от функций $A_s(g)$, $A_s(u)$, $B_s(u)$, a и b. Эти функции зависят от геометрии тела, параметров набегающего потока, температуры поверхности тела, а также от режима обтекания. Зависимость решения от режима обтекания обусловлена тем, что при малых числах Рейнольдса асимптотическая оценка температуры, а следовательно, и плотности и коэффициента вязкости определяется выбором режима (разд. 2). В данной работе гиперзвуковое течение разреженного газа рассматривается в диапазоне чисел Re: $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$.

В режиме III функции $A_s(g)$, $A_s(u)$, $B_s(u)$ и функции a и b при $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$ имеют вид

$$A_s(u) = \frac{\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega}}{2\sin^2\alpha} a\left(1 - \frac{3}{4}a\right), \quad B_s(u) = -\frac{\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega}}{4\sin^2\alpha} a^2$$
$$A_s(g) = \frac{\sigma\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega}}{2\sin^2\alpha} a\left(1 - \frac{3}{4}b\right) \tag{3.6}$$

$$a = (\beta^* \varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega})^{1/2}, \quad b = \sigma a \tag{3.7}$$

Геометрический параметр β^* приведен в разд. 2.

В режиме II функции $A_s(g)$, $A_s(u)$, $B_s(u)$ и функции a и b при $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$ имеют вид

$$A_s(u) = \frac{\varepsilon \mathrm{Re}}{2\sin^2\alpha} ab^{1-\omega}(p_1 - ap_2), \quad B_s(u) = \frac{\varepsilon \mathrm{Re}}{3\sin^2\alpha} ab^{1-\omega} a(p_4 - p_1)$$
$$A_s(g) = \frac{\sigma\varepsilon \mathrm{Re}}{2\sin^2\alpha} ab^{1-\omega}(p_1 - bp_2) \tag{3.8}$$

$$p_1 = \frac{(1+\lambda)^{2-\omega} - \lambda^{2-\omega}}{2-\omega}, \quad p_2 = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{3}p_4, \quad p_4 = \frac{(1+\lambda)^{5-\omega} - \lambda^{5-\omega}}{5-\omega} -$$
$$- 3\lambda\frac{(1+\lambda)^{4-\omega} - \lambda^{4-\omega}}{4-\omega} + 3\lambda^2\frac{(1+\lambda)^{3-\omega} - \lambda^{3-\omega}}{3-\omega} - \lambda^3\frac{(1+\lambda)^{2-\omega} - \lambda^{2-\omega}}{2-\omega} \tag{3.9}$$
$$a = (\beta^*\varepsilon\mathrm{Re})^{1/(1+\omega)}\sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)}(1+\lambda)^{(1-\omega)/(1+\omega)}, \quad b = \sigma a$$

Параметр λ, связанный с температурой поверхности тела T_w, определяется из уравнения

$$T_w = (\beta^*\varepsilon\mathrm{Re})^{1/(1+\omega)}\sigma^{2/(1+\omega)}\lambda(1+\lambda)^{(1-\omega)/(1+\omega)} \tag{3.10}$$

Таким образом, имеем замкнутую задачу определения коэффициента теплопередачи и коэффициента трения: для режима III – соотношения (3.1)–(3.5) и (3.6), (3.7), и для режима II – соотношения (3.1)–(3.5) и (3.8)–(3.10).

Рассмотрим сначала режим III. Используя (3.5), (3.6), (3.7), запишем выражения для a_3 и b_3

$$a_3 = \frac{\cos\alpha\beta_w}{2\xi\sin^2\alpha\beta^*} a^3\left(1 - a\left(\frac{3}{4} + \frac{\beta_1}{2\beta_w}\right)\right), \quad b_3 = \frac{\cos\alpha\beta_w}{2\sigma^2\xi\sin^2\alpha\beta^*} b^3\left(1 - \frac{3}{4}b\right) \tag{3.11}$$

Подставляя a_3 и b_3 из соотношений (3.11) и a_4 и b_4 из соотношений (3.4) в соотношения (3.3), получим выражения для функций Δ_u и Δ_H в зависимости от геометрических параметров, числа σ и параметров a и b, определяемых соотношениями (3.7). Считая параметр $\varepsilon\mathrm{Re} = o(1)$ и соответственно $a = o(1)$ и раскладывая в полученных выражениях все функции в ряды по параметру a, получим асимптотические выражения для Δ_u и Δ_H

$$\Delta_H = \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + \sigma a\left(1 - \frac{(1+\nu)\xi\sin\alpha}{r_w\beta_w}\right) + O(a^2)\right)$$
$$\Delta_u = \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + a\left(1 - \frac{(1+\nu)\xi\sin\alpha}{r_w\beta_w}\right) + O(a^2)\right) \tag{3.12}$$

Подставив эти выражения в соотношения (3.1) и (3.2), с учетом (3.7), получим асимптотическое решение для коэффициентов теплопередачи и трения на боковой поверхности осесимметричных или плоских затупленных тел в зависимости от параметров Re, ε, σ, ω, T_w и геометрии обтекаемой поверхности в режиме III:

$$c_H = \sin\alpha\left[1 - \left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu} - \frac{1}{3}\right)\sigma a\right] + O(a^2)$$

$$c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1 - \left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu} + \frac{2\beta}{3(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)a\right] + O(a^2) \quad (3.13)$$

$$a = (\beta^*\varepsilon \mathrm{Re} T_w^{1-\omega})^{1/2}, \quad \beta = \frac{r_w}{R\cos\alpha}, \quad \beta^* = \frac{2r_w}{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha}$$

Рассмотрим режим II. Используя (3.5), (3.8) и (3.9), запишем a_3 и b_3 в виде

$$a_3 = \frac{\cos\alpha\beta_w p_1}{2\xi\sin^2\alpha\beta^*(1+\lambda)^{1-\omega}}a^3\left(1 - a\left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{2\beta_1}{3\beta_w}\left(\frac{p_4}{p_1} - 1\right)\right)\right)$$

$$b_3 = \frac{\cos\alpha\beta_w p_1}{2\sigma^2\xi\sin^2\alpha\beta^*(1+\lambda)^{1-\omega}}b^3\left(1 - \frac{p_1}{p_2}b\right) \quad (3.14)$$

Как и в случае режима III, подставим a_3 и b_3 из соотношений (3.14) и a_4 и b_4 из соотношений (3.4) в соотношения (3.3) для функций Δ_u и Δ_H. В полученных выражениях, зависящих от геометрии и температуры поверхности тела, числа σ и параметров a и b (определяемых соотношениями (3.9)), разложим все функции в ряды по параметру a, который считаем малым: $a = o(1)$. Опуская длинные выкладки, запишем полученные в результате асимптотические выражения для Δ_u и Δ_H в режиме II

$$\Delta_H = \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + \sigma a\left(1 - \frac{(1+\nu)\xi\sin\alpha p_1}{r_w\beta_w(1+\lambda)^{1-\omega}}\right) + O(a^2)\right)$$

$$\Delta_u = \frac{2\xi\sin\alpha}{\cos\alpha\beta_w a}\left(1 + a\left(1 - \frac{(1+\nu)\xi\sin\alpha p_1}{r_w\beta_w(1+\lambda)^{1-\omega}}\right) + O(a^2)\right) \quad (3.15)$$

Асимптотическое решение для коэффициентов теплопередачи и трения на боковой поверхности осесимметричных или плоских затупленных тел в режиме II, с учетом соотношений (3.1), (3.2), (3.9), (3.15), будет иметь вид

$$c_H = \sin\alpha\left[1 - \left(\frac{(1+\nu)p_1}{(\beta+\nu)(1+\lambda)^{1-\omega}} - \frac{1}{3}\right)\sigma a\right] + O(a^2)$$

$$c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1 - \left(\frac{(1+\nu)p_1}{(\beta+\nu)(1+\lambda)^{1-\omega}} + \frac{2\beta}{3(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)a\right] + O(a^2) \quad (3.16)$$

$$p_1 = \frac{(1+\lambda)^{2-\omega} - \lambda^{2-\omega}}{2-\omega}, \quad a = (\beta^*\varepsilon\mathrm{Re})^{1/(1+\omega)}\sigma^{(1-\omega)/(1+\omega)}(1+\lambda)^{(1-\omega)/(1+\omega)}$$

Здесь параметр λ, связанный с поверхностной температурой T_w, определяется из уравнения (3.10).

Для распределения давления на поверхности аналогичным образом были получены приближенные решения для режимов II и III, эти решения приведены в следующем разделе.

4. Общий вид решения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления во всех трех режимах обтекания. Параметры подобия. Объединив полученные выше решения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления для режимов III и II и решение, полученное для режима I – соотношения (3.8)–(3.10) работы [1], запишем решение в общем для всех трех режимов виде.

Коэффициенты теплопередачи, трения и давления на боковой поверхности осесимметричных ($\nu = 1$) или плоских ($\nu = 0$) затупленных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа, зависят от газодинамических параметров Re, ε, σ, ω, геометрических параметров α, r_w, R, ν и температуры поверхности T_w следующим образом:

$$c_H = \sin\alpha\left[1-\left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu}\phi-\frac{1}{3}\right)\sigma\tau\right]+O(\tau^2) \tag{4.1}$$

$$c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1-\left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu}\phi+\frac{2\beta}{3(\beta+\nu)}-\frac{1}{3}\right)\tau\right]+O(\tau^2) \tag{4.2}$$

$$p_w = \sin^2\alpha-\frac{2r_w\cos\alpha}{3(1+\nu)R}\tau+O(\tau^2) \tag{4.3}$$

$$\text{I: } \tau = (\sigma^{1-\omega}\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}, \quad \phi = \frac{1}{2-\omega} \tag{4.4}$$

$$\text{III: } \tau = (\varepsilon\mathrm{Re}T_w^{1-\omega}\beta^*)^{1/2}, \quad \phi = 1 \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}\text{II: } \tau = (\sigma^{1-\omega}\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}(1+\lambda)^{(1-\omega)/(1+\omega)}, \quad \phi = \frac{(1+\lambda)^{2-\omega}-\lambda^{2-\omega}}{(2-\omega)(1+\lambda)^{1-\omega}}\\ T_w = (\sigma^2\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}\lambda(1+\lambda)^{(1-\omega)/(1+\omega)}\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}\beta = \frac{r_w}{R\cos\alpha}, \quad \beta^* = \frac{2r_w}{(1+\nu)\sin\alpha\cos\alpha}\\ \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} c_H = \sin\alpha, \quad \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \lim_{\mathrm{Re}\varepsilon\to 0} p_w = \sin^2\alpha\end{gathered} \tag{4.7}$$

Режим I ($T_w \ll (\varepsilon\mathrm{Re}\beta^*)^{1/(1+\omega)}$) соответствует сильно охлажденной поверхности, и решение в этом случае не зависит от T_w. Режим I можно рассматривать как предельный случай режима II при $\lambda \to 0$.

При стремлении числа Re к нулю (при $\varepsilon\mathrm{Re} \to 0$), значения коэффициентов теплопередачи, трения и давления стремятся к их значениям в свободномолекулярном потоке, равным $\sin\alpha$, $2\sin\alpha\cos\alpha$ и $\sin^2\alpha$ соответственно, при единичном коэффициенте аккомодации [7], при этом для давления получается распределение давление по Ньютону.

Из соотношений (4.1)–(4.7) видно, что коэффициенты теплопередачи, трения и давления зависят от газодинамических параметров ε и Re только через параметр τ, который можно рассматривать как параметр подобия задачи. В каждом режиме имеется свой параметр подобия τ, зависящий от параметров набегающего потока Re, ε, ω, σ, T_w (газодинамическая часть) и геометрического параметра β^* (коэффициент теплопередачи зависит от $\tau^* = \sigma\tau$). Параметр τ, по которому фактически проводятся асимптотические разложения, характеризует разреженность потока, а также область применимости асимптотического решения. Газодинамическая часть параметра τ определяет разреженность потока вблизи точки торможения, где $\beta^* = 2/(1 + \nu)$; с увеличением расстояния от точки торможения поток уплотняется, аналитически это выражается в том, что геометрический параметр β^* увеличивает параметр разреженности τ.

Коэффициенты c_H и c_f зависят от определяющих параметров течения также через параметр ϕ, который, как и параметр τ, определяется для каждого режима по-своему. Таким образом, в режиме I коэффициенты трения и теплопередачи зависят от параметра τ, показателя ω ($\mu = T^\omega$) и геометрии тела. В режиме III коэффициенты трения и теплопередачи зависят только от параметра τ и геометрии тела, т.е. в режиме III коэффициенты c_H и c_f зависят от газодинамических параметров Re, ε, σ, ω и температуры поверхности T_w только через параметр подобия τ.

При $\omega = 1$ решения для всех трех режимов совпадают. Это решение определяется по формулам (4.1)–(4.3), где $\tau = (\varepsilon \mathrm{Re} \beta^*)^{1/2}$, $\phi = 1$.

При $\omega = 1$ параметр подобия τ совпадает с параметром Ченга $K = (\varepsilon \mathrm{Re})^{1/2}$ [3, 4], за тем исключением, что параметр τ включает в себя еще и геометрический параметр, т.е. учитывает влияние геометрии на разреженность течения. Однако в точке торможения осесимметричного тела параметр τ и параметр Ченга полностью совпадают при $\omega = 1$. В общем случае, параметр τ, в отличие от параметра Ченга, кроме геометрии тела учитывает влияние показателя ω и температуры стенки T_w.

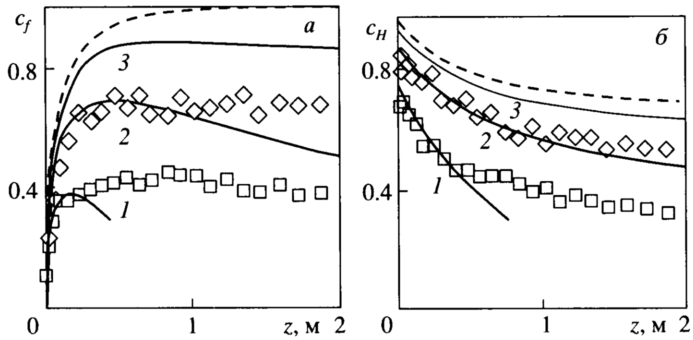
Формулы (4.1), (4.2) получены из решения системы уравнений тонкого вязкого ударного слоя (1.1); в эту систему уравнений входит уравнение импульсов в направлении ζ, нормальном к телу, это уравнение служит для определения давления. Если не использовать это уравнение, а оставить давление неопределенным, или считать его известной откуда-либо функцией, и проделать всю процедуру получения решения с этим условием, тогда получим решение, зависящее от давления, которое имеет вид

$$c_H = \sin\alpha\left[1 - \left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu}\frac{\sin^2\alpha}{p}\phi - \frac{1}{3}\right)\sigma\tau\right] + O(\tau^2)$$

$$c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1 - \left(\frac{1+\nu}{\beta+\nu}\frac{\sin^2\alpha}{p}\phi + \frac{2\beta}{3(\beta+\nu)} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + O(\tau^2)$$

5. Обсуждение результатов. Для оценки точности и области применимости полученных аналитических решений для коэффициентов теплопередачи и трения в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме течения, проводились сравнения с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло. Параметры набегающего потока соответствовали траектории входа в атмосферу Земли космического аппарата Space Shuttle (фиг. 1–3). На фиг. 1 приведены распределения коэффициентов c_H (*а*) и c_f (*б*) вдоль поверхности гиперболоида с углом полураствора 42.50° и $R_0 = 1.36$ м, $T_w = 0.02$–0.03, моделирующего линию растекания Shuttle, полученные из асимптотического решения ($\gamma = 1.25$, $\omega = 0.75$, $\sigma = 0.71$) и из расчетов методом [8] на высотах 109.75 и 122.5 км. Здесь же приведено асимптотическое решение для высоты 150 км, а также решение в свободномолекулярном режиме обтекания.

На высоте 122.5 км аналитическое решение для коэффициента теплопередачи хорошо согласуется с решением [8], полученным методом Монте-Карло, в то время как аналитическое решение для коэффициента трения согласуется с решением [8] только до значений $z \approx 1.5$ м ($\xi \approx 2.2$) (z – расстояние от точки торможения вдоль оси симметрии в метрах, ξ – безразмерное расстояние вдоль поверхности). На высоте 109.75 км аналитическое решение и для коэффициента теплопередачи, и для коэффициента трения согласуется с решением [8] только при небольшом удалении от точки торможения (для c_H – при $\xi \lesssim 1$, для c_f – при $\xi \lesssim 0.7$). Эти расхождения связаны с тем, что с увеличением расстояния от точки торможения предположение о малости τ начинает нарушаться из-за влияния геометрического параметра β^* (уплотнение потока), и асимптотическое реше-



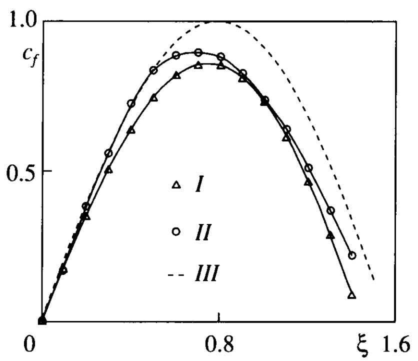
Фиг. 1. Распределение коэффициентов трения (*а*) и теплопередачи (*б*) на поверхности 42.5° гиперболоида от расстояния от точки торможения вдоль оси симметрии z. Точки – расчеты методом Монте-Карло [8], сплошные линии – асимптотическое решение, *1–3* соответствует высотам 109.75, 122.5, 150 км возвратной траектории Shuttle, $V_\infty = 7.5$ км/с; штриховые линии – свободномолекулярное течение

ние становится неправомерным. Так, на высоте 109.75 км при изменении z от 0 до 2 м (соответственно ξ – от 0 до 2.7) параметр τ меняется от 0.52 до 1.22, и ясно, что при $\tau \sim 1$ и $\tau > 1$ асимптотическое решение неправомерно. На высоте 122.5 км параметр τ меняется от 0.18 до 0.42. На высоте 150 км τ меняется от 0.05 до 0.12, и поэтому аналитическое решение должно давать достаточно точные результаты.

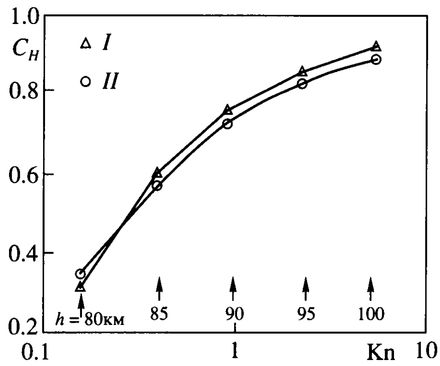
С увеличением высоты полета или увеличением разреженности (уменьшением числа Re) аналитическое решение для коэффициентов трения и теплопередачи приближается к решению в свободномолекулярном потоке. В целом для рассматриваемых параметров ($V_\infty = 7.5$ км/с, $R_0 = 1.36$ м), как показывают сравнения, аналитическое решение приемлемо в окрестности точки торможения на высотах более 100 км; и чем больше высота полета, тем на все более далеких расстояниях от точки торможения справедливо асимптотическое решение. При этом решение для коэффициента теплопередачи согласуется с решением, полученным методом Монте-Карло, на большем расстоянии от точки торможения, чем решение для коэффициента трения, возможно, потому, что коэффициент трения более сложным образом зависит от τ, а возможно, из-за неточности определения распределения давления, поскольку при малых числах Re продольный градиент давления гораздо сильнее влияет на коэффициент трения, чем на коэффициент теплопередачи.

На фиг. 2 показано сравнение аналитического решения для коэффициента трения с результатами расчетов методом Монте-Карло [9] для сферы с $R_0 = 0.0254$ м, $T_w = 0.07$, параметры набегающего потока соответствуют высоте 100 км возвратной траектории Shuttle, $V_\infty = 7.5$ км/с.

На фиг. 3 демонстрируется сравнение асимптотического решения для коэффициента теплопередачи в точке торможения цилиндрического тела с $R_0 = 0.0254$ м, $T_w = 0.07$, с результатами расчетов методом Монте-Карло [10] вдоль возвратной траектории Shuttle на высотах 80–100 км в зависимости от числа Кнудсена Kn в набегающем потоке, $V_\infty = 7.5$ км/с. Асимптотическое решение уравнений тонкого вязкого ударного слоя хорошо согласуется с результатами расчетов методом Монте-Карло вплоть до 80 км. Значительно меньшее значение радиуса кривизны в точке торможения на фиг. 2, 3, по сравнению с фиг. 1, ведет к уменьшению числа Re и параметра τ, соответствующих той же высоте, и соответственно к расширению области применимости асимптотического решения до более низких высот. При этом, как показывают многочисленные сравнения,



Фиг. 2



Фиг. 3

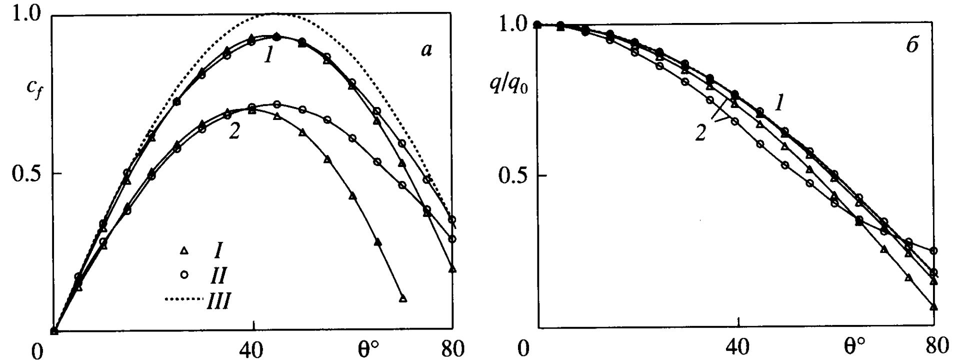
Фиг. 2. Распределение коэффициента трения по сфере в зависимости от безразмерного расстояния от точки торможения вдоль поверхности ξ: *I* и *II* – асимптотическое решение и расчеты методом Монте-Карло [9] на высоте 100 км возвратной траектории Shuttle; *III* – свободномолекулярное течение

Фиг. 3. Коэффициент теплопередачи в точке торможения цилиндрического тела в зависимости от числа Кнудсена Kn в набегающем потоке на высотах 80–100 км возвратной траектории Shuttle: *I* и *II* – асимптотическое решение и расчеты методом Монте-Карло [10]

решение для коэффициента передачи обладает достаточно хорошей точностью, несмотря на то, что параметр τ может стать ~1.

На фиг. 4 проводится сравнение асимптотического решения для коэффициента трения (*а*) и теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения (*б*), с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло [11] обтекания наветренной стороны сферы гиперзвуковым потоком разреженного одноатомного газа при использовании молекулярной модели твердых сфер, $\gamma = 5/3$, $\omega = 0.5$, $\sigma = 0.71$. При Re = 1 асимптотическое решение для коэффициента трения согласуется с решением, полученным методом Монте-Карло, до значений угла $\theta = \pi/2 - \alpha \approx 50°$, а для теплового потока – до значений $\theta \approx 70°$. При Re = 0.1 асимптотическое решение для коэффициента трения хорошо согласуется с решением, полученным методом Монте-Карло, вплоть до угла $\theta \approx 70°$, а три решения для относительного теплового потока – свободномолекулярное, полученное методом Монте-Карло, и асимптотическое – практически совпадают.

Заключение. Получены асимптотические решения двумерных уравнений тонкого вязкого ударного слоя при малых числах Рейнольдса Re для разных режимов гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом. Даны простые аналитические выражения для расчета коэффициентов теплопередачи, трения и давления в зависимости от определяющих параметров задачи: числа Re, $\varepsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$ (γ – отношение удельных теплоемкостей), показателя степени ω (при $\mu \sim T^{\omega}$), температуры поверхности T_w и геометрии обтекаемого тела. Эти коэффициенты при стремлении числа Re к нулю приближаются к своим значениям в свободномолекулярном потоке (при коэффициенте аккомодации, равном единице). Найдены параметры подобия для каждого режима обтекания, характеризующие разреженность потока и определяющие правомерность асимптотического решения. Проведенные сравнения с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте-Карло в переходном от континуальному к свободномолекулярному режиме обтекания позволили оценить точность и об-



Фиг. 4. Зависимость коэффициента трения (a, $T_w = 0.01$) и относительного теплового потока ($б$, $T_w = 0.1$) на сфере от угла $\theta = \pi/2 - \alpha$; *I* и *II* – асимптотическое решение и расчеты методом Монте-Карло [11]; *1* и *2* соответствует Re = 0.1 и 1; *III* – свободномолекулярное течение

ласть применимости полученных аналитических решений для коэффициентов трения и теплопередачи.

Автор выражает благодарность Г.А. Тирскому за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке грантов: "Научные школы" – НШ-835.2006.1 и РФФИ (№ 06-01-00695).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брыкина И.Г.* Асимптотическое решение двумерных уравнений тонкого вязкого ударного слоя в разреженном газе для холодной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 164–172.
2. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* Континуальные модели разреженных потоков газа в задачах гиперзвуковой аэродинамики // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 992–1018.
3. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds Number // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
4. *Cheng H.K.* The Blunt Body Problem in Hypersonic Flow at Low Reynolds Number // IAS Paper. 1963. № 63–92. 100 p.
5. *Брыкина И.Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
6. *Khanukaeva D.Yu., Tirskiy G.A.* A meteoroid ballistics in the nonisothermal atmosphere // Acta Astronautica. 2005. V. 57. Is. 10. P. 811–817.
7. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Moss J.N., Bird G.A.* Direct simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions // AIAA Paper. 1984. № 84–0223. 14 p.
9. *Moss J.N., Cuda V.J., Simmonds A.L.* Nonequilibrium Effects for Hypersonic Transitional Flows // AIAA Paper. 1987. № 87–0404.
10. *Cuda V.J., Moss J.N.* Direct Simulation of Hypersonic Flows Over Blunt Wedges // J. Thermophysics. 1987. V. 1. № 2. P. 97–104.
11. *Николаев К.В.* Распределенные аэродинамические и тепловые характеристики обтекания сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды IX Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. 1987. Т. 1. С. 130–135.

Москва

Поступила в редакцию
2.IV.2007