

УДК 532.546

© 2007 г. А. А. АФАНАСЬЕВ, А. А. БАРМИН, О. Э. МЕЛЬНИК

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТОВ ИСПАРЕНИЯ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Исследуется устойчивость фронтов фазового перехода в фильтрационных течениях воды. В коротковолновом приближении проведен линейный анализ устойчивости и предложено достаточное условие гидродинамической неустойчивости фазового разрыва. Решена задача об инжекции пароводяной смеси в двухмерный насыщенный смесью пласт и проведено сравнение ее численного решения с точным решением соответствующей одномерной автомоделной задачи. Обнаружено, что вместо неустойчивых в одномерной постановке разрывов в двухмерном случае образуется протяженная зона перемешивания, характерный масштаб которой с течением времени растет по автомоделному закону.

Ключевые слова: фильтрация, разрывы, фазовые переходы, гидродинамическая устойчивость, неустойчивость Саффмана–Тейлора.

Геотермальные системы представляют собой нагретые до высоких температур насыщенные водой и паром пористые среды. Подобные формации расположены в зонах активной вулканической деятельности, где присутствует поток тепла из недр Земли к ее поверхности. Температура глубоко залегающих проницаемых пластов может превышать точку кипения воды, из-за чего последняя может присутствовать в парообразной фазе. Производство геотермальной энергии основывается на технологии инжекции холодной воды в перегретый резервуар, которая при фильтрации от нагнетательных к добывающим скважинам нагревается и испаряется. При этом в системе образуются однофазные зоны фильтрации воды, пара и двухфазные зоны пароводяной смеси, которые разделены поверхностями фазового перехода. При интенсивной инжекции распространяющийся фронт воды может быть неустойчивым, из-за чего холодная вода прорвется к добывающим скважинам. Следовательно, при эксплуатации системы расход закачиваемой воды не должен превышать критических значений, и не должен быть малым для поддержания значительного объема добываемого пара. Анализ эффективности геотермальных систем сводится к определению объемов инжекции, при которых она будет и устойчивой и эффективной, что, в частности, опирается на анализ гидродинамической устойчивости фронтов испарения.

В [1–3] рассмотрены условия эволюционности фазовых разрывов в пористой среде. Обнаружено, что внутри зон пароводяной смеси эволюционны только фронты испарения. В предположении слабой неравновесности рассмотрена структура всех возможных в фильтрационных течениях воды фазовых разрывов и показано, что априорно эволюционные фронты вода–пар могут не иметь структуры. В [4] решена задача о распаде произвольного разрыва смесь–смесь в геотермальном пласте. Выявлено, что при разных начальных параметрах задачи ее решение качественно различно: возможны шесть типов решений с внутренними однофазными зонами воды и пара. В [5] решена схожая с [4] задача об инжекции перегретого пара в нефтяной пласт.

В работах [6, 7] в случае инжекции воды в область пара рассмотрена устойчивость разрыва вода–пар. Предполагалось, что температура в области воды постоянна и что на разрыве конвективные потоки тепла со стороны пара значительно меньше, чем со сто-

роны воды. В линейном приближении показано, что коротко- и длинноволновые возмущения поверхности раздела всегда устойчивы, а неустойчивыми могут быть длины волн из выделенного интервала. В [8, 9] рассмотрена потеря устойчивости вертикального течения фаз, когда слой воды лежит над слоем пара. В предположении малости конвективного потока тепла по сравнению с кондуктивным показано, что в низкопроницаемом пласте такое расположение фаз устойчиво. Обсуждены возможные типы перехода к неустойчивости поверхности раздела фаз в высокопроницаемом пласте.

В данной работе рассмотрена устойчивость всех возможных разрывов образующихся при фильтрации воды в двумерном горизонтальном пористом пласте: разрывов смесь–смесь, смесь–вода(пар), вода–пар. Считается, что толщина пласта мала и вызванные гравитацией потоки среды в вертикальном направлении незначительны по сравнению с горизонтальными потоками. В коротковолновом приближении проведен линейный анализ устойчивости и предложено достаточное условие гидродинамической неустойчивости разрыва. Показано, что условие неустойчивости разрыва смесь–смесь имеет ту же интерпретацию, что и критерий при классической неустойчивости Саффмана–Тейлора. В работах [6, 7] условие неустойчивости сформулировано для специальных течений. Критерий, предложенный в данной работе, в силу того, что сформулирован в коротковолновом приближении, зависит только от параметров на фронте и поэтому применим к разрывам в любых фильтрационных течениях воды.

Рассмотрена задача об инжекции смеси в насыщенный смесью горизонтальный резервуар и проведено сравнение численного решения этой задачи с ее точным решением в одномерной автомодельной постановке. Показано, что вместо неустойчивых в автомодельном решении, разрывов в двумерном случае развивается зона перемешивания, в которой “пальцы” воды проникают в область перед разрывом. При рассмотренных параметрах задачи поверхность устойчивых разрывов плоская. Эволюция зоны перемешивания рассмотрена на нелинейной стадии.

1. Основные уравнения. Систему законов сохранения массы и энергии, описывающую, с учетом закона фильтрации Дарси, процессы совместной неизотермической фильтрации воды и пара, запишем в виде [1–4]

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\varphi \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \right) = \operatorname{div} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right)$$

$$\rho_m(s, P, T) = m s \rho_w + m(1-s)\rho_v + (1-m)\rho_s \quad (1.1)$$

$$\rho e_m(s, P, T) = m s \rho_w e_w + m(1-s)\rho_v e_v + (1-m)\rho_s e_s$$

$$\kappa(s, P, T) = \rho_w \frac{K f_w(s)}{\mu_w} + \rho_v \frac{K f_v(s)}{\mu_v}, \quad \varphi(s, P, T) = \rho_w \frac{K f_w(s)}{\mu_w} h_w + \rho_v \frac{K f_v(s)}{\mu_v} h_v$$

$$\lambda_m(s, P, T) = m s \lambda_w + m(1-s)\lambda_v + (1-m)\lambda_s$$

Здесь ρ_m – эффективная плотность, ρe_m – эффективная плотность внутренней энергии, $-\kappa \partial P / \partial \mathbf{r}$ – поток массы ($\kappa > 0$), $-\varphi \partial P / \partial \mathbf{r}$ – поток энергии, обусловленный потоком жидкости ($\varphi > 0$), $-\lambda_m \partial T / \partial \mathbf{r}$ – поток энергии, связанный с процессами теплопроводности, s – водонасыщенность – объемное содержание воды в порах, P – давление, T – температура, m – пористость пласта, K – проницаемость пористой среды, $f(s)$ – относительная фазовая проницаемость, μ – вязкость, e – плотность внутренней энергии, h – энтальпия, λ – коэффициент теплопроводности. Индексы: m – эффективное значение в пласте, w – значение в воде, v – в паре, s – в скелете пористой среды.

Уравнения (1.1) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\kappa \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(-\chi \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \right) &= \operatorname{div} \left(\lambda_m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \right) \\ \chi &= \phi + \lambda_m T'_f(P), \quad F = T - T_f(P) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь T_f – температура термодинамического равновесия между водой и паром. В двухфазной области фильтрации пароводяной смеси (1.2) замыкаем условием равновесия $F = 0$, тогда (1.2) имеет одно гиперболическое и пару малых возмущений параболического типа [1, 2]. В однофазной области фильтрации воды или пара (1.2) замыкаем условиями $s = 1, F \leq 0$ или $s = 0, F \geq 0$ соответственно, тогда (1.2) имеем две пары малых возмущений параболического типа, соответствующих распространению волн давления и температуры.

Скелет пористой породы предполагаем несжимаемым. Уравнения состояния и относительные фазовые проницаемости воды и пара полагаем следующими:

$$\begin{aligned} \rho_w(P, T) &= \rho_{w0}(1 + \alpha(P - P_0) - \beta(T - T_0)), \quad \rho_v(P, T) = \frac{P}{RT} \\ e_w(T) &= C_w T, \quad e_v(T) = C_v T + q, \quad e_s(T) = C_s T \\ h_i &= e_i + \frac{P}{\rho_i}, \quad i = w, v; \quad f_w(s) = s^{16}, \quad f_v(s) = (1 - s)^3 \\ \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) &= A - \frac{B}{T_f(P)}, \quad A = 12.512, \quad B = 4611.73 K^\circ \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь α, β – коэффициенты сжимаемости и теплового расширения воды, R – газовая постоянная пара, C_i – теплоемкость, q – скрытая теплота парообразования. Фазовые проницаемости $f_i, i = w, v$ характеризуют взаимодействия пористой среды и жидкости на масштабах пор и зависят от топологии скелета породы. Функции $f_i, i = w, v$ (1.3) моделируют проницаемости воды и пара в изрезанных микротрещинами геотермальных резервуарах, где жидкая смачивающая скелет фаза стремится заполнить наиболее узкие поры, выдавив газообразную фазу в относительно широкие трещины [10]. Зависимость f_w , которая резко убывает при уменьшении s , описывает эффект замедления скорости фильтрации воды, по мере того как она вытесняется паром из трещин в низкопроницаемые поры.

В расчетах физические параметры воды, пара и скелета пористой среды принимались следующими:

$$\begin{aligned} \alpha &= 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad \beta = 10^{-3} \text{ К}^{-1}, \quad \rho_{w0} = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_s = 2.5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \\ R &= 461 \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}, \quad C_w = 4.2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг К}}, \quad C_v = 1.56 \frac{\text{кДж}}{\text{кг К}}, \quad C_s = 1 \frac{\text{кДж}}{\text{кг К}} \\ q &= 1.8 \cdot 10^3 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}, \quad P_0 = 10^5 \text{ Па}, \quad K = 2 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2, \quad m = 0.15 \\ \lambda_w &= 0.58 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}, \quad \lambda_v = 0.02 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}}, \quad \lambda_s = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м К}} \\ \mu_w &= 10^{-4} \text{ Па с}, \quad \mu_v = 10^{-5} \text{ Па с} \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Критерий гидродинамической неустойчивости. Рассмотрим плоскую поверхность фазового раздела, распространяющуюся в горизонтальном пласте и разделяющую зоны фильтрации воды, пара или пароводяной смеси. Предполагаем, что давление и температура на разрыве непрерывны, а рвутся только их градиенты и водонасыщенность. Температура на фронте равна температуре термодинамического равновесия $F = 0$. Направим неподвижную ось x по нормали к поверхности разрыва, а ось y – вдоль нее. Условия на разрыве системы (1.2) имеют вид

$$W[\rho_m] + \left[\kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right] = 0 \tag{2.1}$$

$$W[\rho e_m] + \left[\chi \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \left[\lambda_m \frac{\partial F}{\partial x} \right] = 0 \tag{2.2}$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial y} \right] = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{\pm} = 0 \tag{2.3}$$

Здесь W – скорость разрыва, а квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на нем. Соотношения (2.1), (2.2) есть законы сохранения массы и энергии, а (2.3) следует из требования непрерывности давления, и условия термодинамического равновесия на фронте соответственно.

Уравнения (2.1), (2.2) можно представить в виде [1]

$$W = - \left(\frac{H(s_+)}{1+G_+} - \frac{H(s_-)}{1+G_-} \right) \frac{(1+G_-)}{s_+ - s_-} \psi(s_-) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_- \tag{2.4}$$

$$(1+G_+) \psi(s_+) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_+ = (1+G_-) \psi(s_-) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_- \tag{2.5}$$

$$H(s) = \frac{1}{(\rho_m)'_s} \frac{\kappa(s)}{\psi(s)} > 0, \quad G = \lambda_m \frac{(\rho_m)'_s \partial F}{\psi \partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^{-1} \tag{2.6}$$

$$\psi = (\rho_m)'_s \chi - (\rho e_m)'_s \kappa > 0 \tag{2.7}$$

Здесь $H(s)$ – ударная адиабата разрыва. Неравенство (2.7) есть условие диссипативности (1.2) в смеси [1].

Пусть в начальный момент времени поверхность разрыва испытывает синусоидальное возмущение малой амплитуды, тогда координата фронта имеет вид

$$x(y, t) = x_0(t) + \zeta, \quad \frac{dx_0}{dt} = W \tag{2.8}$$

$$\zeta = \delta \zeta \exp i(k_y y - \omega t), \quad \text{Im} k_y = 0, \quad |\delta \zeta| \rightarrow 0$$

Здесь $x_0(t)$ – положение невозмущенного разрыва. Рябь на поверхности ударной волны может привести к возмущению течения за и перед фронтом. Если с течением времени амплитуды возмущений уменьшаются, то в отношении выбранного k_y разрыв гидродинамически устойчив. В противном случае фронт неустойчив.

Возмущенное течение среды рассматриваем в коротковолновом приближении, причем считаем, что характерное время $t \rightarrow 0$ пропорционально характерному масштабу $l \sim l$, который, однако, остается существенно больше масштаба пор. При $l \rightarrow 0$ время распространения волн P и T , которые описываются уравнением диффузии, пропорцио-

нально l^2 , что на порядок меньше характерного времени t , поэтому считаем, что распределения P и T в воде (паре, смеси) квазистационарны. В этом случае система (1.2) в воде (паре) примет вид

$$\operatorname{div}\left(-\kappa\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div}\left(-\chi\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right) + \operatorname{div}\left(-\lambda_m\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0$$

где κ , χ , λ_m постоянны. Ищем решение (2.9) в виде

$$P = P_0 + \left.\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right|_0 \mathbf{r} + \delta P \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad |\delta P| \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$$F = F_0 + \left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right|_0 \mathbf{r} + \delta F \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad |\delta F| \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Подставив (2.10), (2.11) в (2.9), получим, что возмущения состоят из двух типов волн

$$\mathbf{k}^2 = 0, \quad \delta P \neq 0, \quad \delta F = 0 \quad (2.12)$$

$$\mathbf{k}^2 = 0, \quad \delta P = 0, \quad \delta F \neq 0$$

Система в смеси при $t \sim l \rightarrow 0$ имеет вид

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\kappa\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0, \quad \rho_m = \rho_m(s), \quad \kappa = \kappa(s) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \rho e_m}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\chi\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right) = 0, \quad \rho e_m = \rho e_m(s), \quad \chi = \chi(s)$$

Ищем решение (2.13) в виде (2.10), (2.14).

$$s = s_0 + \delta s \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad |\delta s| \rightarrow 0 \quad (2.14)$$

Подставив (2.10), (2.14) в (2.13), получим, что возмущенное течение в смеси состоит из волн (2.15), (2.16).

$$\omega = -\left.\frac{\partial H}{\partial s}\psi\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}}\right|_0 \mathbf{k}, \quad \delta P \neq 0, \quad \delta s \neq 0 \quad (2.15)$$

$$\mathbf{k}^2 = 0, \quad \delta P \neq 0, \quad \delta s = 0 \quad (2.16)$$

Рассматриваем гидродинамическую устойчивость имеющих структуру разрывов, которую в предположении слабой неравновесности $T = T_f(P) - \varepsilon s$, $\varepsilon \ll 1$ имеют только те разрывы, от которых не уходят волны (2.15) [1]. Следовательно, так как в неустойчивой ситуации источником возмущений должен быть сам фронт, возмущенное течение слева и справа от разрыва состоит из уходящих от него волн (2.12) или (2.16), в которых $\delta s = 0$, $\mathbf{k}^2 = 0$. Таким образом, фронт гидродинамически неустойчив, если существуют экспоненциально возрастающие со временем возмущения, которые экспоненциально убывают с удалением от поверхности разрыва: $\operatorname{Im}\omega > 0$, $\operatorname{Im}k_{x+} > 0$, $\operatorname{Im}k_{x-} < 0$ [11]. Пусть для определенности $k_y > 0$, тогда $k_{x+} = ik_y$, $k_{x-} = -ik_y$, поэтому фронт неустойчив при $\omega/ik_y > 0$.

Возмущенное течение слева и справа от разрыва ищем в виде (2.8), (2.10), (2.11) при условии $\mathbf{k}^2 = 0$ и $s = s_{\pm}$ в соответствующем случае. Преобразования проводим в первом

приближении по амплитудам возмущений, поэтому единичные нормальный и касательный векторы к поверхности разрыва имеют вид

$$\mathbf{n} = (1, -ik_y \zeta), \quad \mathbf{T} = (ik_y \zeta, 1) \quad (2.17)$$

Условия (2.1)–(2.3) на возмущенном прямом фронте ($\partial P/\partial y = 0$) имеют вид

$$\left(W + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)[\rho_m] + \left[\kappa \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}\right] = 0$$

$$\left(W + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)[\rho e_m] + \left[\chi \frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}\right] + \left[\lambda_m \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{n}\right] = 0 \quad (2.18)$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{T}\right] = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}}\right|_{\pm} \mathbf{T} = 0$$

Подставив (2.8), (2.10), (2.11), (2.17) в (2.18), получим систему линейных однородных уравнений на $\delta \zeta$, δP_{\pm} , δF_{\pm}

$$i\omega(\rho_m)'_s[s]\delta \zeta + k_y \kappa_+ \delta P_+ + k_y \kappa_- \delta P_- = 0$$

$$i\omega(\rho e_m)'_s[s]\delta \zeta + k_y \kappa_+ \delta P_+ + k_y \kappa_- \delta P_- + k_y \lambda_{m+} \delta F_+ + k_y \lambda_{m-} \delta F_- = 0 \quad (2.19)$$

$$\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right] \delta \zeta + \delta P_+ - \delta P_- = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\pm} \delta \zeta + \delta F_{\pm} = 0$$

Система (2.19) совместна, если инкремент ω/ik_y равен левой части неравенства (2.20).

$$-\frac{[H] \Psi_- - \Psi_+}{[s] \Psi_- + \Psi_+} (1 + G_-) \Psi_- \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- +$$

$$+ \frac{1}{[s]} \left\{ \frac{H_+ G_+}{1 + G_+} + \frac{H_- G_-}{1 + G_-} \right\} (1 + G_-) \Psi_- \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- > 0 \quad (2.20)$$

Условие (2.20) – критерий гидродинамической неустойчивости разрыва. При (2.20) присутствуют неустойчивые длины волн ($k_y \rightarrow \infty$), поэтому (2.20) суть достаточное условие неустойчивости разрыва. Если выполнено обратное неравенство, то разрыв в отношении коротких волн устойчив.

В случае разрыва вода–пар в (2.20) $s_- = 1$, $s_+ = 0$, в случае разрыва вода–смесь $s_- = 1$, $G_+ = 0$, разрыва смесь–пар $G_- = 0$, $s_+ = 0$. Для разрыва смесь–смесь в (2.20) следует положить $G_{\pm} = 0$, тогда в (2.20) второе слагаемое обратится в ноль.

3. Об устойчивости разрыва смесь–смесь. В случае фронта смесь–смесь (2.20), при условиях (2.5), (2.7), можно представить в виде

$$-\frac{[H]}{[s]} \left(\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_+ - \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- \right) > 0 \quad (3.1)$$

Не ограничивая общности считаем, что $\partial P/\partial x|_- > 0$, тогда, согласно (2.4), (2.5), (2.7), $\partial P/\partial x|_+ > 0$, а скорость разрыва W пропорциональна с положительным коэффициентом $-[H]/[s]$. Если $-[H]/[s] > 0 (< 0)$, то разрыв смесь–смесь движется в положительном (отрицательном) направлении оси x , причем, согласно (3.1), он неустойчив при

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_+ > \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- \left(\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_+ < \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_- \right)$$

Таким образом, разрыв неустойчив, когда за ним модуль градиента давления меньше, чем перед ним. Условие неустойчивости (3.1) и критерий при классической неустойчивости Саффмана–Тейлора имеют одну и ту же интерпретацию. Действительно, в классическом случае, когда происходит вытеснение одной жидкости другою несмешивающейся с первой [12, 13], фронт вытеснения неустойчив, если вытесняющая жидкость (индекс +) имеет меньшую вязкость, чем вытесняемая (–). Следовательно, так как скорости жидкостей совпадают, то, согласно закону Дарси, в неустойчивом случае модуль градиента давления за разрывом меньше, чем перед ним. Отличие от классической ситуации состоит в том, что разрыв смесь–смесь может распространяться против потока (при $-[H]/[s] < 0$) и поэтому может быть неустойчивым, когда вытесняющая смесь менее подвижна, чем вытесняемая: $\partial P/\partial x|_+ > \partial P/\partial x|_-$.

Таким образом, при (3.1) на фронте смесь–смесь имеется дестабилизирующий скачок градиента давления, который, по аналогии с классическим случаем, соответствует неустойчивому вытеснению смеси другою более подвижной смесью. Подвижная жидкость стремится опередить менее подвижную смесь, находящуюся перед разрывом, вследствие чего она в форме пальцев будет проникать в область перед разрывом, а поверхность фронта будет искривляться. Процессы теплопроводности и фазовых превращений, которые способствуют нагреванию и выкипанию пальцев, в случае (3.1) не могут стабилизировать разрыв.

4. Об устойчивости разрывов вода–пар и вода(пар)–смесь. Пусть, для определенности, область воды ($F \leq 0$), если она присутствует, находится слева от разрыва, а область пара ($F \geq 0$) – справа. Тогда $\partial F/\partial x|_{\pm} \geq 0$, причем, если хотя бы одно из неравенств строгое, $s_+ - s_- \leq 0$, так как тогда $s_+ = 0$ или $s_- = 1$. Таким образом, на разрыве выполнено условие $[s]\partial F/\partial x|_- \leq 0$, и поэтому, согласно (2.5)–(2.7)

$$\text{sign}\left(\frac{1 + G_- \partial P}{s_+ - s_- \partial x}\right) = -\text{sign}\left(\frac{G_{\pm}}{1 + G_{\pm}}\right)$$

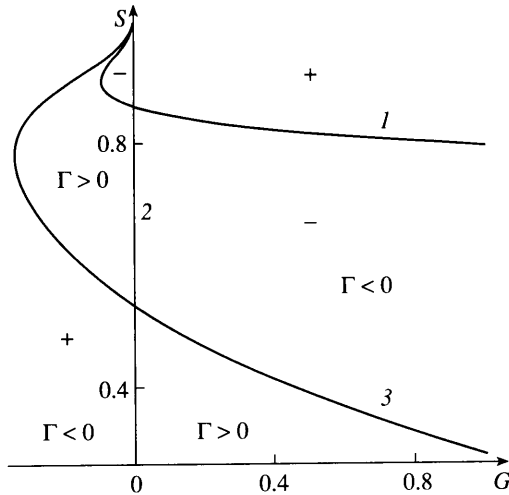
Следовательно, второе слагаемое в (2.20) при любых G_{\pm} отрицательно.

Рассмотрим, например, разрыв вода–смесь и зафиксируем параметры справа от него, причем рассмотрим случай, когда $\partial P/\partial x|_+ > 0$. Тогда величина

$$(1 + G_-)\psi_- \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_- = m(\rho_w - \rho_v) \left(\frac{G_-}{1 + G_-}\right)^{-1} \left(\lambda_{m-} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_-\right) > 0 \quad (4.1)$$

которая не рвется на разрыве (2.5), фиксирована и положительна, поэтому, так как $\partial F/\partial x|_- \geq 0$, то $G_- \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$. Будем менять параметры слева от разрыва, увеличивая кондуктивный поток тепла $\lambda_{m-} \partial F/\partial x|_-$, который соответствует неравновесному распределению температуры в области воды. Тогда в (2.20) первое слагаемое остается постоянным, а во втором изменяется только вторая дробь в фигурных скобках. Из (4.1) следует, что при $G_- \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ с возрастанием $\lambda_{m-} \partial F/\partial x|_-$ величина $G_-/(1 + G_-)$ во втором слагаемом (2.20) будет расти по модулю, а само слагаемое будет убывать. Следовательно, с увеличением $\lambda_{m-} \partial F/\partial x|_-$ показатель роста возмущений ω/ik_y уменьшается. Рассмотрение случая $\partial P/\partial x|_+ < 0$ разрыва вода–смесь, а также случая фронтов смесь–пар и вода–пар приводит к аналогичному результату; с ростом $\lambda_{m\pm} \partial F/\partial x|_{\pm}$ инкремент ω/ik_y убывает.

Таким образом, увеличение неравновесных кондуктивных потоков тепла способствует стабилизации поверхности раздела фаз. Фронт наиболее неустойчив, когда неравновесный поток тепла со стороны однофазной области равен нулю ($\lambda_{m-} \partial F/\partial x = 0$). Следовательно, среди разрывов, на которых фиксированы s_{\pm} и хотя бы одно из $s_{\pm} = 0, 1$, наиболее неустойчив фронт смесь–смесь.



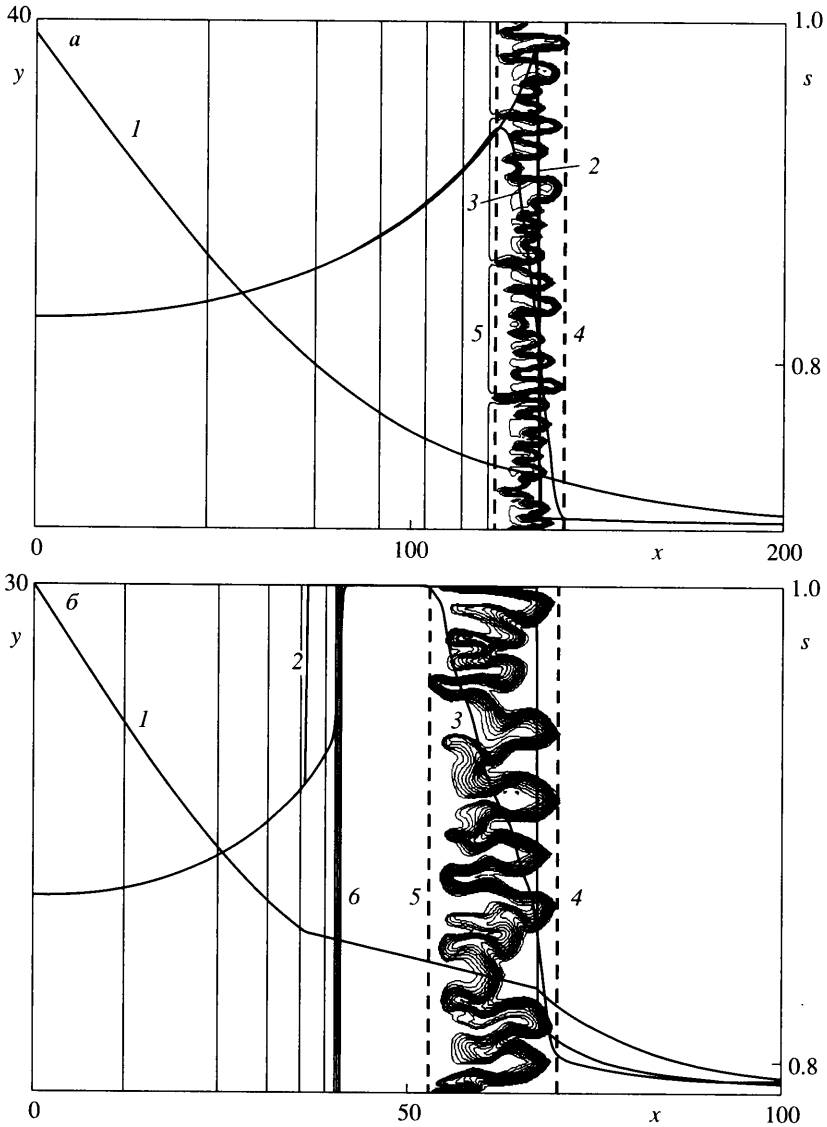
Фиг. 1. Диаграмма устойчивости разрыва вода–смесь на плоскости (G, s) . Линии 1 и 2 ($G = 0$) ограничивают области, в которых структура разрыва существует (+) или не существует (-). Линии 2, 3 ограничивают неустойчивые ($\Gamma > 0$) и устойчивые ($\Gamma < 0$) области

Множество неустойчивых фронтов состоит из тех имеющих структуру разрывов [1], для которых справедлив критерий (2.20). При рассмотренных свойствах воды и пара (1.3), (1.4) большинство разрывов, для которых выполнено (2.20), не имеет структуры. Например, при $G > 0$ все имеющие структуру фронты вода–смесь устойчивы (фиг. 1), а разрывы, для которых справедливо (2.20), не имеют структуры и не могут реализовываться в пласте. При $G < 0$ для части имеющих структуру разрывов критерий (2.20) выполнен, поэтому именно эти разрывы неустойчивы.

5. Задача об инжекции. Рассмотрим горизонтальный резервуар прямоугольной формы $L_x \times L_y$, в котором в начальный момент времени присутствует пароводяная смесь. Начальные распределения в пласте однородны: $P = P_+$, $T = T_f(P_+)$, $s = s_+$. На границах резервуара $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$ заданы условия непроницаемости $\partial P / \partial n = 0$ и теплоизолированной стенки $\partial T / \partial n = 0$. В начальный момент времени на границе $x = 0$ P , T , s скачком меняются и удерживаются постоянными: $P = P_-$, $T = T_f(P_-)$, $s = s_-$, причем давление возрастает ($P_- > P_+$) – происходит инжекция пароводяной смеси в резервуар.

В одномерной постановке задачи об инжекции смеси в полубесконечный пласт $x \in [0, +\infty)$ возможны случаи однофронтного решения, когда внутри резервуара распространяется разрыв смесь–смесь [4]. Эта задача по постановке автомодельна: существуют ее решения, которые зависят только от комбинации $\xi \sim x / \sqrt{t}$. На фиг. 2, а при $\Pi_- = 22.470$ ($\Pi = P/P_0$), $\Pi_+ = 21.946$, $s_- = 0.826$, $s_+ = 0.706$, $L_x = 200$ м, $L_y = 40$ м изображено решение задачи в случае, когда (3.1) выполнено и фронт смесь–смесь неустойчив.

Соответствующая задача в плоском горизонтальном пласте решалась аналогичным [14] численным методом. В двумерном решении поверхность разрыва не плоская: образуются пальцы с высоким содержанием воды, проникающие в область перед разрывом (фиг. 2, а). Развивается область перемешивания, в которой поверхность разрыва случайным образом искривлена и решение задачи двумерно. Скорость распространения области совпадает со скоростью фронта в автомодельном решении. В области перемешивания распределение s отличается от $\bar{s}(x)$ – осредненной вдоль оси y водонасыщенности, вне области решение задачи одномерно $s = \bar{s}(x)$ и совпадает с автомодельным решением

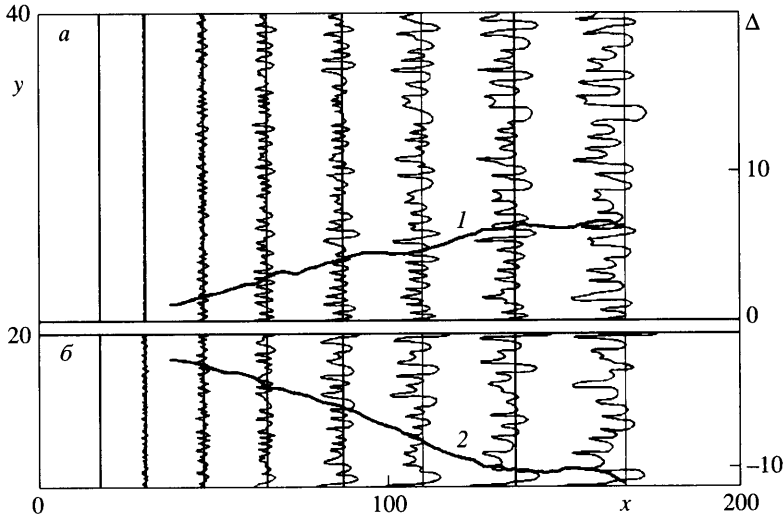


Фиг. 2. Распределение P , s в автомодельном решении (линии 1, 2), распределение $\bar{s}(x)$ (линии 3). Линии уровня распределения s в двумерном решении. Прямые 4, 5 – передний и задний фронт перемешивания, 6 – задний фронт смесь-вода

ем. Распределение P в области мало отличается от P в автомодельном решении задачи и остается существенно одномерным. Это объясняется тем, что распространение волн P описывается уравнением диффузии, и тем, что P на разрыве непрерывно.

Если параметры инъекции таковы, что выполнено обратное неравенство (3.1), соответствующее устойчивому фронту смесь-смесь, то в двумерной постановке при рассмотренных параметрах задачи поверхность разрыва остается плоской.

В расчетах начальное распределение водонасыщенности случайным образом возмущалось: $s = s_+ + \delta s$, $|\delta s| \ll 1$. В неустойчивом случае распределения в области перемеши-



Фиг. 3. Поверхность фронта смесь–смесь в последовательные моменты времени в широком (а) и узком (б) резервуарах. Вертикальные прямые – положение разрыва в автомодельном решении. Линии 1, 2 – траектории переднего и заднего фронта перемешивания

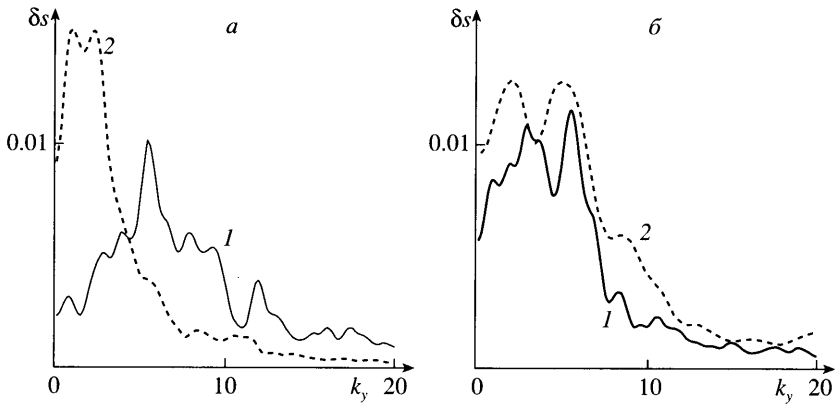
вания и положения поверхности разрыва разные при разных δs , однако при больших фиксированных t протяженность области и характерная толщина пальцев не зависят от δs и являются инвариантными характеристиками течения.

На фиг. 3 эволюция поверхности разрыва изображена в двух резервуарах, длина которых L_x одинакова, а ширина первого L_y (фиг. 3, а) вдвое больше ширины второго (фиг. 3, б). Параллельные оси y прямые показывают в соответствующие моменты времени положение поверхности разрыва в автомодельном решении. Распределения в зоне перемешивания зависят от размеров резервуара, однако ширина зоны инвариантна.

В узком резервуаре (фиг. 3, б) амплитуда начального возмущения $|\delta s| = 10^{-3}$ на порядок больше, чем в широком (фиг. 3, а), из-за чего при малых t в первом случае пальцы растут быстрее, чем во втором – область перемешивания шире. Однако при $t \rightarrow \infty$ в обоих резервуарах протяженность области одинакова и не зависит от $|\delta s|$.

Обозначим $\Delta_{\pm} = x_{\pm} - x_0$, где $x_{\pm}(t)$ – положение передней и задней границы области перемешивания соответственно, а $x_0(t) \sim \sqrt{t}$ – координата разрыва в одномерной постановке задачи. Линиями 1, 2 на фиг. 3 изображена зависимость Δ_{\pm} от x_0 . При малых t , когда $x_0 < L_x/2$, величины Δ_{\pm} зависят от x_0 линейно, поэтому $x_{\pm} \sim \sqrt{t}$ и ширина области $x_+ - x_-$ также растет пропорционально \sqrt{t} , по автомодельному закону [15]. При больших t , когда существенно влияние непроницаемой границы $x = L_x$, скорость переднего фронта перемешивания уменьшается и он распространяется не автомодельно.

Сглаженные спектральные разложения s по гармоническим функциям при малых и больших t взяты вдоль линии разрыва автомодельного решения (кривые 1, 2 на фиг. 4, а). При малых t , когда поверхность фронта смесь–смесь еще относительно плоская и развитие неустойчивости происходит на линейной стадии, наиболее быстро растут коротковолновые возмущения поверхности фронта (фиг. 4, а, 1), так как, согласно (2.20), при $k_y \rightarrow \infty$ мнимая часть $Im\omega$ наибольшая. При больших t , когда развитие неустойчивости вступает в нелинейную стадию, максимум спектра сдвигается (фиг. 4, а, 2) в область



Фиг. 4. Спектр s : a – линии 1, 2 при малых и больших t соответственно, b – линии 1, 2 (b) в широком и узком резервуарах

длинных волн – происходит укрупнение пальцев. Соседние пальцы сливаются, и их характерная толщина растёт. Действительно, пальцы более подвижной среды распространяются в сторону областей с наименьшим давлением в зоне перед разрывом, поэтому палец, проникший в область перед разрывом чуть дальше, чем соседние, быстро опередит и будет экранировать их от дальнейшего роста и в своем последующем развитии поглотит их [13].

Линиями 1, 2 на фиг. 4, b изображены в фиксированный момент времени спектральные разложения s в широком и узком резервуаре соответственно (фиг. 3). В обоих случаях характерный масштаб в зоне перемешивания одинаков, поэтому толщина пальцев при малых t не зависит от размеров пласта.

Пусть инжекция происходит в два резервуара, длина и ширина первого из которых в n раз больше второго, причем начальные возмущения δs во втором случае с точностью до растяжения равны возмущениям в первом. В результате сопоставления расчетов обнаружено, что распределения в каждом случае с точностью до растяжения пространства равны, когда в первом случае t в n^2 раз больше, чем во втором, поэтому, так же как и протяженность области перемешивания, характерная толщина пальцев растёт пропорционально \sqrt{t} .

При инжекции смеси в пласт возможно образование внутренней области воды, распространяющейся внутрь резервуара [4] (фиг. 2, b : $\Pi_- = 30.215$, $\Pi_+ = 29.946$, $s_- = 0.869$, $s_+ = 0.789$, $L_x = 100$ м, $L_y = 30$ м). Возможны случаи, когда передний фронт вода–смесь неустойчив, вследствие чего развивается зона перемешивания, которая не дестабилизирует задний устойчивый разрыв смесь–вода. Поверхность фронта остается плоской, однако его скорость выше, чем скорость соответствующего разрыва в автомодельном решении. Последнее объясняется тем, что волны P в однофазной зоне воды из-за ее слабой сжимаемости распространяются существенно быстрее, чем в смеси. Следовательно, из-за искривления поверхности разрыва изменение P на переднем фронте приведет к мгновенному перераспределению давления во всей области воды и, в частности, к изменению его градиента на заднем разрыве, из-за чего скорость последнего возрастет.

Заключение. В линейной постановке получено достаточное условие неустойчивости фронтов фазового перехода: разрывов смесь–смесь, смесь–вода(пар), вода–пар. Фронт смесь–смесь неустойчив, если за разрывом модуль градиента давления меньше, чем перед ним. Неравновесные кондуктивные потоки тепла на фронтах смесь–вода(пар) и во-

да–пар способствуют стабилизации поверхности разрыва. При фиксированной слева и справа от разрыва водонасыщенности наиболее неустойчив фронт смесь–смесь.

В задаче об инжекции пароводяной смеси в двумерный горизонтальный насыщенный смесью резервуар обнаружено, что вместо неустойчивых в одномерной постановке разрывов в двумерном случае развивается зона перемешивания, в которой поверхность разрыва искривлена: насыщенные водой “пальцы” проникают в область перед фронтом. Поверхность устойчивых разрывов остается плоской. Протяженность области перемешивания и характерный размер пальцев не зависят от ширины пласта и с течением времени растут по автомодельному закону. Вне зоны перемешивания распределение параметров течения одномерно и совпадает с распределениями в автомодельном решении задачи.

При инжекции, когда образуется внутренняя зона воды, возможно развитие неустойчивости на переднем фронте вода–смесь, что не дестабилизирует задний устойчивый разрыв смесь–вода, поверхность которого остается плоской, однако приводит к увеличению скорости его распространения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00228) и гранта президента РФ поддержки ведущих научных школ (№ НШ-1697.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев А.А., Бармин А.А.* О фазовых разрывах в фильтрационных течениях воды // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 100–111.
2. *Куликовский А.Г.* О фронтах испарения и конденсации в пористых средах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 85–92.
3. *Куликовский А.Г.* О фазовых переходах при фильтрации в теплопроводном скелете // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 85–90.
4. *Афанасьев А.А., Бармин А.А.* Нестационарные одномерные фильтрационные течения воды и пара с учетом фазовых переходов // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 134–143.
5. *Насырова Л.А., Рахматуллин И.Р., Шаганов В.Ш.* Гидродинамические и тепловые поля в пористой среде при инжекции перегретого пара // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 113–126.
6. *Woods A.W., Fitzgerald S.D.* The instability of a vaporization front in hot porous rock // *Nature*. 1994. V. 367. P. 450–453.
7. *Fitzgerald S.D., Woods A.W.* Instabilities during liquid migration into superheated geothermal reservoirs // *Water Res.* 1998. V. 34. № 9. P. 2089–2101.
8. *Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г.* Гравитационная устойчивость движущейся поверхности раздела вода–пар в гидротермальных системах // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 3–12.
9. *Ильичев А.Т., Цыпкин Г.Г.* Критерий гидродинамической неустойчивости поверхности раздела фаз в геотермальных системах // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 100–109.
10. *Li K., Horne R.N.* Fractal modeling of capillary pressure curves for The Geysers rock // *Geothermics*. 2006. № 35. P. 198–207.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
12. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
13. *Нотсы Г.М.* Viscous fingering in porous media // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1987. № 19. P. 271–311.
14. *Benard J., Eymard R., Nicolas X., Chavant C.* Boiling in porous media: model and simulations // *Transp. Porous Media*. 2005. № 60. P. 1–31.
15. *Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Э.Е.* Гидродинамика перемешивания. М.: Изд-во МФТИ, 1999, 464 с.