

УДК 532.529:532.517.4

© 2007 г. В.М. АЛИПЧЕНКОВ, Л.И. ЗАЙЧИК

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОЛКНОВЕНИЙ БИДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В АНИЗОТРОПНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Представлена статистическая модель для описания движения и столкновений бидисперсной смеси частиц в анизотропных турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц. Выполнено сопоставление с данными прямых численных расчетов оседания бидисперсной смеси частиц под действием силы тяжести.

Ключевые слова: турбулентность, бидисперсная смесь частиц, столкновения, кинетическое уравнение, функция плотности вероятности.

В [1] представлена статистическая модель для описания столкновений монодисперсных частиц в турбулентном потоке. Определены “столкновительные члены” в уравнениях баланса вторых и третьих моментов пульсаций скорости дисперсной фазы, что позволяет моделировать монодисперсные неоднородные анизотропные турбулентные течения со сталкивающимися частицами в рамках континуального эйлерова подхода.

Задача моделирования столкновений разных (бидисперсных) частиц существенно более сложная по сравнению со случаем одинаковых (монодисперсных). При движении бидисперсных частиц в турбулентном потоке имеют место два механизма возникновения столкновений, один из которых (имеющий место и при движении монодисперсных частиц) обусловлен флуктуациями скоростей частиц, а другой связан с наличием относительной осредненной скорости (дрейфа) между частицами разного сорта. Анализ бидисперсной смеси имеет принципиальное значение, так как легко обобщается на общий случай полидисперсной системы частиц. В [2] предложена статистическая модель для бидисперсных частиц, учитывающая оба механизма столкновений; модель основана на максвелловской ФПВ и поэтому не описывает эффект анизотропии турбулентных пульсаций скорости и коррелированность движения сталкивающихся частиц. Напротив, в [3] на основе метода Грэда построена модель, учитывающая анизотропию турбулентных пульсаций и коррелированность скоростей сталкивающихся частиц, однако не принимается во внимание наличие относительного дрейфа между частицами из разных групп.

В настоящей статье представлена статистическая модель столкновений для бидисперсной системы частиц, учитывающая осредненную относительную скорость между частицами разного сорта, анизотропию турбулентных пульсаций скоростей частиц и коррелированность их движения. В силу сложности рассматриваемой задачи построены столкновительные члены только для уравнений баланса количества движения и турбулентных напряжений частиц, что ограничивает область применения развиваемой модели условием однородности бидисперсного турбулентного течения.

1. Основные уравнения. Математическая формулировка задачи аналогично [1] основана на кинетическом уравнении для ФПВ, описывающем взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущей сплошной среды и взаимодействие частиц друг с другом в результате столкновений. Взаимодействие частиц с турбулентными вихрями описывается на основе моделирования турбулентного поля скорости несущей среды гауссовым случайным процессом с известными корреляционными моментами [4, 5]. Взаимодей-

ствие частиц в результате столкновений рассматривается в рамках модели твердых сфер, когда скорости двух частиц после соударения $\mathbf{v}_{p1}^{\circ}, \mathbf{v}_{p2}^{\circ}$ связаны со скоростями этих частиц перед соударением $\mathbf{v}_{p1}, \mathbf{v}_{p2}$ соотношениями

$$\mathbf{v}_{p1}^{\circ} = \mathbf{v}_{p1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(\mathbf{w}_p \mathbf{l}), \quad \mathbf{v}_{p2}^{\circ} = \mathbf{v}_{p2} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + e)(\mathbf{w}_p \mathbf{l}) \quad (1.1)$$

где m_1 и m_2 – массы сталкивающихся частиц; e – коэффициент восстановления импульса при соударении; $\mathbf{w}_p \equiv \mathbf{v}_{p2} - \mathbf{v}_{p1}$ – относительная скорость сталкивающихся частиц; \mathbf{l} – единичный вектор, направленный от центра первой частицы к центру второй при ударе.

С учетом столкновений кинетическое уравнение для ФПВ частиц группы α в анизотропном турбулентном потоке представляется в виде

$$\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} + v_{\alpha k} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_{\alpha k}} \left[\left(\frac{U_k - v_{\alpha k}}{\tau_{p\alpha}} + F_k \right) P_{\alpha} \right] = \lambda_{ij}^{\alpha} \frac{\partial^2 P_{\alpha}}{\partial v_{\alpha i} \partial v_{\alpha j}} + \mu_{ij}^{\alpha} \frac{\partial^2 P_{\alpha}}{\partial x_i \partial v_{\alpha j}} + \left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\alpha} + \left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad \beta \neq \alpha \quad (1.2)$$

$$\lambda_{ij}^{\alpha} = \langle u_i' u_k' \rangle \left(\frac{f_{ukj}^{\alpha}}{\tau_{p\alpha}} + l_{ukn}^{\alpha} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} + \tau_{p\alpha} m_{ukl}^{\alpha} \frac{\partial U_n \partial U_j}{\partial x_l \partial x_n} \right) - \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} \left(f_{u1kj}^{\alpha} + \tau_{p\alpha} l_{u1kj}^{\alpha} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) \quad (1.3)$$

$$\mu_{ij}^{\alpha} = \langle u_i' u_k' \rangle \left(g_{ukj}^{\alpha} + \tau_p h_{ukn}^{\alpha} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_{p\alpha} D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{2} \frac{g_{ukj}^{\alpha}}{Dt} \quad (1.4)$$

$$\frac{D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u_i' u_k' \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle u_i' u_k' \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u_i' u_k' v_n' \rangle}{\partial x_n}$$

где t – время, x_i – пространственная координата, $v_{\alpha i}$ – скорость частицы, U_i – осредненная скорость сплошной несущей среды, $\tau_{p\alpha}$ – время динамической релаксации частицы группы α , F_i – ускорение внешней силы (например, силы тяжести), $\langle u_i' u_k' \rangle$ – турбулентные напряжения в сплошной среде.

Первые два члена в правой части (1.2) описывают взаимодействие частиц с турбулентными вихрями. Коэффициенты $f_{uij}^{\alpha}, g_{uij}^{\alpha}, l_{uij}^{\alpha}, h_{uij}^{\alpha}, m_{uij}^{\alpha}, f_{u1ij}^{\alpha}, g_{u1ij}^{\alpha}, l_{u1ij}^{\alpha}$ в (1.3) и (1.4) характеризуют степень вовлечения частиц группы α в турбулентное движение сплошной среды и даны в [4, 5]. Последние два члена символизируют вклад столкновений с частицами рассматриваемой и другой группы. Операторы столкновений представляются в виде интегралов Больцмана для модели соударений твердых сред [6–8]

$$\left(\frac{\partial P_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}^{\beta} = \sigma^2 \iint_{\mathbf{wl} < 0} [P(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}^{\circ}, \mathbf{x} + \sigma \mathbf{l}, \mathbf{v}_{\beta}^{\circ}, t) - P(\mathbf{x}, \mathbf{v}_{\alpha}, \mathbf{x} + \sigma \mathbf{l}, \mathbf{v}_{\beta}, t)] (\mathbf{wl}) d\mathbf{l} dv_{\beta} \quad (1.5)$$

где $\sigma \equiv r_1 + r_2$ – радиус сферы столкновений, равный сумме радиусов двух частиц, r_{α} – радиус частиц сорта α ; $P(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)$ – двухчастичная ФПВ.

В результате интегрирования кинетического уравнения по подпространству скоростей с учетом (1.5) получается цепочка уравнений для одноточечных моментов. В дальнейшем ограничимся рассмотрением однородных течений. В этом случае третьи момен-

ты обращаются в нуль, и цепочка для моментов ФПВ обрывается на уровне уравнений для вторых моментов. Кроме того, объемная концентрация частиц обеих групп предполагается небольшой, так что непосредственным вкладом межчастичных столкновений в напряжения и поток пульсационной энергии дисперсной фазы можно пренебречь, и, следовательно, “столкновительные члены” входят в систему уравнений для моментов только в виде источников и не имеют составляющих в виде потоков. Таким образом, система уравнений сохранения для частиц сорта α представляется в виде

$$\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_\alpha V_{\alpha k}}{\partial x_k} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial t} + V_{\alpha k} \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha k} \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_{\alpha i}}{\tau_{p\alpha}} + F_i - (\langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha k} \rangle + \mu_{ik}^\alpha) \frac{\partial \ln \Phi_\alpha}{\partial x_k} + C_i^\alpha \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial t} + V_{\alpha k} \frac{\partial \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\partial x_k} = & - (\langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha k} \rangle + \mu_{ik}^\alpha) \frac{\partial V_{\alpha j}}{\partial x_k} - (\langle v'_{\alpha j} v'_{\alpha k} \rangle + \mu_{jk}^\alpha) \frac{\partial V_{\alpha i}}{\partial x_k} \\ & + \lambda_{ij}^\alpha + \lambda_{ji}^\alpha - \frac{2 \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle}{\tau_{p\alpha}} + C_{ij}^{\alpha\alpha} + C_{ij}^{\alpha\beta}, \quad \beta \neq \alpha \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь Φ_α , $V_{\alpha i}$, $\langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle$ обозначают соответственно объемную концентрацию, осредненную скорость и турбулентные напряжения частиц сорта α . Очевидно, что соударения, как это следует из (1.6), не изменяют объемную концентрацию частиц. Однако в отличие от случая монодисперсных частиц в уравнении баланса количества движения (1.7) появляется столкновительный член C_i^α , обусловленный соударениями частиц из разных групп. Столкновения частиц одного и того же сорта влияния на осредненную скорость этих частиц, естественно, не оказывают. Члены $C_{ij}^{\alpha\alpha}$ и $C_{ij}^{\alpha\beta}$ в (1.8) характеризуют вклад столкновений частиц одной и той же группы и разных групп в баланс турбулентных напряжений.

2. Столкновительные члены. Для замыкания системы (1.6)–(1.8) следует определить столкновительные члены C_i^α и $C_{ij}^{\alpha\beta}$, поскольку столкновительный член для частиц из одной группы $C_{ij}^{\alpha\alpha}$ был определен в [1, 9]. Чтобы найти столкновительные члены необходимо знать ФПВ скоростей двух частиц в момент соударения. Двухчастичную ФПВ для частиц из разных групп, как и в [1, 9], построим с помощью метода Грэда, представляя ее в виде разложения

$$P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = P^{(0)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + P^{(1)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (2.1)$$

Нулевой член разложения (2.1) представляет собой равновесное нормальное распределение, которое может иметь место в изотропной турбулентности [3, 10]

$$P^{(0)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\Phi_1 \Phi_2}{(2\pi v_1' v_2')^3 (1 - \zeta_{12}^2)^{3/2}} \exp \left[- \frac{1}{2(1 - \zeta_{12}^2)} \left(\frac{v_{1k}' v_{1k}'}{v_1'^2} + \frac{v_{2k}' v_{2k}'}{v_2'^2} - \frac{2\zeta_{12} v_{1k}' v_{2k}'}{v_1' v_2'} \right) \right] \quad (2.2)$$

где $v_1'^2 \equiv \langle v'_{\alpha k} v'_{\alpha k} \rangle / 3$ – интенсивность пульсаций скорости частиц сорта α . Коэффициент корреляции скоростей двух частиц $\zeta_{12} \equiv (f_u^1 f_u^2)^{1/2}$ выражается через коэффициент вовлечения частиц в турбулентное движение $f_u^\alpha \equiv f_{u\alpha\alpha}^\alpha / 3$.

Первый член разложения (2.1) учитывает анизотропию скоростей частиц и в соответствии с методом Грэда представляется как

$$P^{(1)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left[R_{1i} \frac{\partial}{\partial v_{1i}} + R_{2i} \frac{\partial}{\partial v_{2i}} + \frac{R_{1ij}}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_{1i} \partial v_{1j}} + \frac{R_{2ij}}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_{2i} \partial v_{2j}} + \right. \\ \left. + \frac{Q_{ij}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial v_{1i} \partial v_{2j}} + \frac{\partial^2}{\partial v_{2i} \partial v_{1j}} \right) \right] P^{(0)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \quad (2.3)$$

Коэффициенты $R_{\alpha i}$ и $R_{\alpha ij}$ в (2.3) находятся из условий

$$\frac{1}{\Phi_1 \Phi_2} \iint v'_{\alpha i} P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \langle v'_{\alpha i} \rangle = 0, \quad \frac{1}{\Phi_1 \Phi_2} \iint v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle \\ \frac{1}{\Phi_1 \Phi_2} \iint v'_{\alpha i} v'_{\beta j} P(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = \langle v'_{\alpha i} v'_{\beta j} \rangle, \quad \beta \neq \alpha$$

Откуда, согласно (2.1)–(2.3), следует

$$R_{\alpha i} = 0, \quad R_{\alpha ij} = \langle v'_{\alpha i} v'_{\alpha j} \rangle - v_{\alpha}^2 \delta_{ij}, \quad Q_{ij} = \frac{\langle v'_{1i} v'_{2j} \rangle + \langle v'_{1j} v'_{2i} \rangle}{2} - \zeta_{12} v'_1 v'_2 \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Далее примем линейную связь между корреляционным моментом пульсаций скоростей частиц разных групп и соответствующими моментами частиц одной группы

$$\frac{\langle v'_{1i} v'_{2j} \rangle + \langle v'_{1j} v'_{2i} \rangle}{2} = C_1 \langle v'_{1i} v'_{1j} \rangle + C_2 \langle v'_{2i} v'_{2j} \rangle \quad (2.5)$$

Поскольку согласно ФПВ (2.2) $\langle v'_{1k} v'_{2k} \rangle = 3\zeta_{12} v'_1 v'_2$, то из свертки (2.5) следует

$$C_1 v_1'^2 + C_2 v_2'^2 = \zeta_{12} v'_1 v'_2 \quad (2.6)$$

Так как C_1 и C_2 связаны только одним соотношением (2.6), то остается одна степень свободы в выборе этих коэффициентов. В качестве дополнительного условия для определения C_1 и C_2 потребуем, чтобы члены, содержащие скорости частиц одного сорта, не зависели от характеристик частиц другого сорта. Для этого нужно принять

$$C_1 = \frac{\zeta_{12} v_2'}{2 v_1'}, \quad C_2 = \frac{\zeta_{12} v_1'}{2 v_2'} \quad (2.7)$$

С учетом (2.4), (2.5) и (2.7) “анизотропная составляющая” ФПВ (2.1) примет вид

$$P^{(1)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \left[\frac{R_{1ij} v'_{1i} v'_{1j}}{v_1'^4} + \frac{R_{2ij} v'_{2i} v'_{2j}}{v_2'^4} - \left(\frac{R_{1ij}}{v_1'^2} + \frac{R_{2ij}}{v_2'^2} \right) \frac{\zeta_{12} (v'_{1i} v'_{2j} + v'_{1j} v'_{2i})}{2 v_1' v_2'} \right] \frac{P^{(0)}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{2(1 - \zeta_{12}^2)} \quad (2.8)$$

Перейдем к новым переменным, характеризующим движение бидисперсной системы в целом и относительное движение двух групп частиц

$$\mathbf{q} = \kappa_1 \mathbf{v}_2 + \kappa_2 \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \kappa_1 = \frac{v_1'^2 - \zeta_{12} v'_1 v'_2}{v_1'^2 + v_1'^2 - 2\zeta_{12} v'_1 v'_2}, \quad \kappa_2 = \frac{v_2'^2 - \zeta_{12} v'_1 v'_2}{v_1'^2 + v_1'^2 - 2\zeta_{12} v'_1 v'_2}$$

В новых переменных ФПВ (2.1) с учетом (2.2) и (2.8) представляется как

$$P(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) + P^{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$$

$$P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = \frac{\Phi_1 \Phi_2}{(2\pi v_1' v_2')^3 (1 - \zeta_{12}^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{w'^2 q_k' q_k'}{2(1 - \zeta_{12}^2) v_1'^2 v_2'^2} - \frac{w_k' w_k'}{2w'^2} \right]$$

$$P^{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = [a_{ij} q_i' q_j' + b_{ij} w_i' w_j' + c_{ij} (q_i' w_j' + q_j' w_i')] P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q})$$

$$a_{ij} = \frac{1}{2(1 - \zeta_{12}^2)} \left[\frac{R_{1ij}}{v_1'^4} \left(1 - \zeta_{12} \frac{v_1'}{v_2'} \right) + \frac{R_{2ij}}{v_2'^4} \left(1 - \zeta_{12} \frac{v_2'}{v_1'} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$b_{ij} = \frac{1}{2(1 - \zeta_{12}^2)} \left[\frac{\kappa_1^2 R_{1ij}}{v_1'^4} \left(1 + \zeta_{12} \frac{\kappa_2 v_1'}{\kappa_1 v_2'} \right) + \frac{\kappa_2^2 R_{2ij}}{v_2'^4} \left(1 + \zeta_{12} \frac{\kappa_1 v_2'}{\kappa_2 v_1'} \right) \right]$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2(1 - \zeta_{12}^2)} \left\{ \frac{R_{2ij}}{v_2'^4} \left[\kappa_2 + \frac{\zeta_{12} (\kappa_1 - \kappa_2) v_2'}{2v_1'} \right] - \frac{R_{1ij}}{v_1'^4} \left[\kappa_1 + \frac{\zeta_{12} (\kappa_2 - \kappa_1) v_1'}{2v_2'} \right] \right\}$$

$$w'^2 = v_1'^2 + v_2'^2 - 2\zeta_{12} v_1' v_2'$$

Далее, используя (2.9), вычислим осредненную относительную радиальную скорость между частицами разного сорта, необходимую для определения ядра столкновений

$$\langle |w_r| \rangle = \langle |w_r| \rangle^{(0)} + \langle |w_r| \rangle^{(1)} \quad (2.10)$$

$$\langle |w_r| \rangle^{(0)} = \frac{1}{2\pi \Phi_1 \Phi_2} \int \int \int_{w_l < 0} (w_l) P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) dldwd\mathbf{q} = \frac{W}{2} F_0(z) \quad (2.11)$$

$$\langle |w_r| \rangle^{(1)} = \frac{1}{2\pi \Phi_1 \Phi_2} \int \int \int_{w_l < 0} (w_l) P^{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) dldwd\mathbf{q} = -\frac{b_{ij} W_i W_j W}{8z^2} \Psi_0(z) \quad (2.12)$$

$$F_0(z) = \frac{\exp(-z)}{\sqrt{\pi z}} + \operatorname{erf} \sqrt{z} \left(1 + \frac{1}{2z} \right), \quad \Psi_0(z) = \frac{3 \exp(-z)}{\sqrt{\pi z}} + \operatorname{erf} \sqrt{z} \left(1 - \frac{3}{2z} \right)$$

Здесь $z \equiv W^2/2w'^2$ обозначает параметр дрейфа, характеризующий отношение осредненной и пульсационной составляющих относительной скорости частиц; $W \equiv (W_k W_k)^{1/2}$, $W_i \equiv V_{2i} - V_{1i}$.

Ядро столкновений в соответствии с (2.10) равно

$$\beta = 2\pi \sigma^2 \langle |w_r| \rangle = 2\pi \sigma^2 (\langle |w_r| \rangle^{(0)} + \langle |w_r| \rangle^{(1)}) = \beta^{(0)} + \beta^{(1)} \quad (2.13)$$

Выражение (2.13) представляет собой сумму двух членов, первый из которых определяет ядро столкновений в случае изотропных пульсаций скоростей частиц, а второй учитывает вклад анизотропии пульсаций. Формула для $\beta^{(0)}$, где $\langle |w_r| \rangle^{(0)}$ определяется согласно (2.11), была впервые получена в [11] и впоследствии воспроизведена в [2, 12, 13]. Поскольку $b_{ij} W_i W_j = O(z)$, то легко получить

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(0)}} = O(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\beta^{(1)}}{\beta^{(0)}} = O(z^{-1})$$

Следовательно, в предельных ситуациях малого и большого относительного дрейфа вклад анизотропии пульсаций скоростей частиц в ядро столкновений несущественен. Эффект анизотропии, по-видимому, может играть заметную роль только при $z = O(1)$.

Столкновительный член в уравнении сохранения количества движения частиц сорта α с учетом закона соударений (1.1) и ФПВ (2.9) выражается как

$$C_i^\alpha = C_i^{\alpha(0)} + C_i^{\alpha(1)} \tag{2.14}$$

$$C_i^{\alpha(0)} = \frac{\sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e)}{\Phi_\alpha \Phi_\beta (m_\alpha + m_\beta)} \int \int_{w_l < 0} \int (\mathbf{w}l)^2 l_i P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) dldw d\mathbf{q} =$$

$$= \frac{\pi \sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e) W}{2(m_\alpha + m_\beta)} W_i F_1(z) \tag{2.15}$$

$$C_i^{\alpha(1)} = \frac{\sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e)}{\Phi_\alpha \Phi_\beta (m_\alpha + m_\beta)} \int \int_{w_l < 0} \int (\mathbf{w}l)^2 l_i P^{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) dldw d\mathbf{q} =$$

$$= \frac{\pi \sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e) w^4}{(m_\alpha + m_\beta) W^2} \left[W b_{ik} W_k \Psi_1(z) - \frac{b_{jk} W_i W_j W_k}{2W} \Psi_2(z) \right] \tag{2.16}$$

$$F_1(z) = \frac{\exp(-z)}{\sqrt{\pi z}} \left(1 + \frac{1}{2z} \right) + \operatorname{erf} \sqrt{z} \left(1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{4z^2} \right)$$

$$\Psi_1(z) = 4F_0(z) - 3F_1(z), \quad \Psi_2(z) = \Psi_1(z) - \frac{2\Psi_0(z)}{z}$$

где N_β – числовая концентрация частиц сорта β .

Когда коэффициент корреляции скоростей частиц равен нулю, (2.15) переходит в выражение, полученное в [2]. В предельных случаях малого и большого значений параметра дрейфа из (2.15) и (2.16) следует

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{C_i^{\alpha(1)}}{C_i^{\alpha(0)}} = O(1), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{C_i^{\alpha(1)}}{C_i^{\alpha(0)}} = O(z^{-1})$$

Таким образом, вклад анизотропии пульсаций скоростей частиц в C_i^α более важен в случае малых значений параметра дрейфа.

Перейдем к вычислению столкновительного члена в уравнении баланса турбулентных напряжений для застига из разных групп. В результате вычисления столкновительных интегралов для закона соударений (1.1) и ФПВ (2.9) получаем

$$C_{ij}^{\alpha\beta} = C_{ij}^{\alpha\beta(0)} + C_{ij}^{\alpha\beta(1)} \tag{2.17}$$

$$C_{ij}^{\alpha\beta(0)} = \frac{\sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e)}{\Phi_\alpha \Phi_\beta (m_\alpha + m_\beta)} \int \int_{w_l < 0} \int \left[\frac{m_\beta (1+e)}{(m_\alpha + m_\beta)} (\mathbf{w}l)^3 l_i l_j - \kappa_\alpha (\mathbf{w}l)^2 (w_i l_j + w_j l_i) \right] \times$$

$$\times P^{(0)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) dldw d\mathbf{q} + \kappa_\alpha (C_i^{\alpha(0)} W_j + C_j^{\alpha(0)} W_i) = \pi \sigma^2 N_\beta W \times$$

$$\times \frac{m_\beta (1+e)}{m_\alpha + m_\beta} \left\{ \frac{m_\beta (1+e)}{4(m_\alpha + m_\beta)} \left[\left(W_i W_j + \frac{W^2}{3} \delta_{ij} \right) F_2(z) - \left(W_i W_j - \frac{W^2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{3F_1(z)}{2z} \right] - \right.$$

$$\left. - \kappa_\alpha \left[W_i W_j \frac{2F_0(z)}{z} - \left(W_i W_j - \frac{W^2}{3} \delta_{ij} \right) \frac{3F_1(z)}{2z} \right] \right\}, \quad F_2(z) = F_1(z) + \frac{2F_0(z)}{z} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
C_{ij}^{\alpha\beta(1)} &= \frac{\sigma^2 N_\beta m_\beta (1+e)}{\Phi_\alpha \Phi_\beta (m_\alpha + m_\beta)} \int_{\mathbf{w}\mathbf{l} < 0} \int \int \left[\frac{m_\beta (1+e)}{(m_\alpha + m_\beta)} (\mathbf{w}\mathbf{l})^3 l_i l_j - \kappa_\alpha (\mathbf{w}\mathbf{l})^2 (w_i l_j + w_j l_i) \right] \times \\
&\times P^{(1)}(\mathbf{w}, \mathbf{q}) d\mathbf{l} d\mathbf{w} d\mathbf{q} + \kappa_\alpha (C_i^{\alpha(1)} W_j + C_j^{\alpha(1)} W_i) = \frac{\pi \sigma^2 N_\beta W (1+e)^2 m_\beta^2}{4(m_\alpha + m_\beta)^2} \times \\
&\times \{ 2w^4 b_{ij} \Psi_3(z) + w^2 [\delta_{ij} W_k W_n b_{kn} + 2(W_i b_{jk} + W_j b_{ik}) W_k] \times \\
&\times \left. \frac{\Psi_4(z)}{2z} - W_i W_j W_k W_n b_{kn} \frac{\Psi_5(z)}{4z^2} \right\} - \pi \sigma^2 N_\beta W \frac{(1+e) m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \left\{ \kappa_\alpha \left[2w^4 b_{ij} \Psi_3(z) - \right. \right. \\
&- w^2 \delta_{ij} W_k W_n b_{kn} \frac{\Psi_2(z)}{4z^2} + w^2 (W_i b_{jk} + W_j b_{ik}) W_k \frac{\Psi_6(z)}{2z} - W_i W_j W_k W_n b_{kn} \frac{\Psi_7(z)}{2z^2} \left. \right] - \\
&- \frac{v_\alpha^2 v_\beta^2 (1 - \zeta_{12}^2)}{w^4} \left[2w^4 c_{ij} F_1(z) + w^2 (W_i c_{jk} + W_j c_{ik}) W_k \frac{\Psi_1(z)}{2z} \right] \left. \right\} \\
\Psi_3(z) &= F_1(z) + \frac{2\Psi_1(z)}{z}, \quad \Psi_4(z) = \Psi_1(z) - \frac{\Psi_2(z)}{2z}, \quad \Psi_5(z) = \Psi_1(z) - \frac{7\Psi_2(z)}{2z} \\
\Psi_6(z) &= \Psi_1(z) - \frac{\Psi_2(z)}{z}, \quad \Psi_7(z) = \frac{\Psi_2(z) + \Psi_5(z)}{2}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

В случае одинаковых частиц (2.18) и (2.19) переходят в соотношения [1, 9]

$$C_{ij}^{\alpha\alpha(0)} = -\frac{4\pi^{1/2} \sigma^2 N_\alpha (1+e^2) v^3 (1-f_u)^{3/2}}{3} \delta_{ij} \tag{2.20}$$

$$C_{ij}^{\alpha\alpha(1)} = -\frac{4\pi^{1/2} \sigma^2 N_\alpha (1+e)(3-e) v (1-f_u)^{3/2}}{5} R_{ij} \tag{2.21}$$

В пределах большого параметра дрейфа сопоставление (2.18) и (2.19) дает

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{C_{ij}^{\alpha(1)}}{C_{ij}^{\alpha(0)}} = O(z^{-1})$$

Таким образом, очевидно, что вклад анизотропии пульсаций скоростей частиц в столкновительный член уравнения баланса турбулентных напряжений особенно существенен в случае малого относительного дрейфа с точки зрения перераспределения пульсационной энергии между различными компонентами. Свертка (2.17) $C_{kp}^{\alpha\beta} = C_{kk}^{\alpha\beta}/2$ дает столкновительный член в уравнении баланса турбулентной энергии частиц $k_{p\alpha} \equiv \langle v'_{\alpha k} v'_{\alpha k} \rangle / 2$. При этом $C_{kk}^{\alpha\beta(0)}$ совпадает с выражением, полученным в [2] без учета корреляции между скоростями сталкивающихся частиц.

Рассмотрим вклад столкновительных членов для уравнений баланса характеристик бидисперсной системы в целом, т.е. состоящей из частиц обеих групп. Из (2.14)–(2.16) очевидно, что влияние соударений на импульс бидисперсной системы $\rho_{p1} \Phi_1 V_{1i} + \rho_{p2} \Phi_2 V_{2i}$ отсутствует.

Столкновительные члены в уравнении для турбулентной энергии бидисперсной системы в целом $k_p \equiv (\rho_{p1}\Phi_1 k_{p1} + \rho_{p2}\Phi_2 k_{p2}) / (\rho_{p1}\Phi_1 + \rho_{p2}\Phi_2)$ представляются как

$$C_{kp} = C_{kp}^I + C_{kp}^{II}, \quad C_{kp}^I = \frac{N_1 m_1 C_{kk}^{11} + N_2 m_2 C_{kk}^{22}}{2(N_1 m_1 + N_2 m_2)}, \quad C_{kp}^{II} = \frac{N_1 m_1 C_{kk}^{12} + N_2 m_2 C_{kk}^{21}}{2(N_1 m_1 + N_2 m_2)}$$

Здесь величины C_{kp}^I и C_{kp}^{II} характеризуют соответственно вклад в баланс среднемассовой турбулентной энергии бидисперсной системы столкновений частиц из одной и той же группы и из разных групп. Согласно (2.20) и (2.21), C_{kp}^I равняется нулю при упругих соударениях и меньше нуля при неупругих соударениях, т.е. столкновения частиц одного сорта могут приводить только к диссипации пульсационной кинетической энергии дисперсной фазы. В случае соударений частиц разного сорта ситуация не такая однозначная. Столкновительный член C_{kp}^{II} , согласно (2.17)–(2.19) имеет вид

$$C_{kp}^{II} = C_{kp}^{II(0)} + C_{kp}^{II(1)} \quad (2.22)$$

$$C_{kp}^{II(0)} = \frac{2^{1/2} \pi \sigma^2 N_1 N_2 m_1 m_2 (1+e) w'^3}{(m_1 + m_2)(N_1 m_1 + N_2 m_2)} \Pi(z), \quad \Pi(z) = \frac{(1+e)z^{3/2} F_2(z)}{2} - 2z^{1/2} F_0(z) \quad (2.23)$$

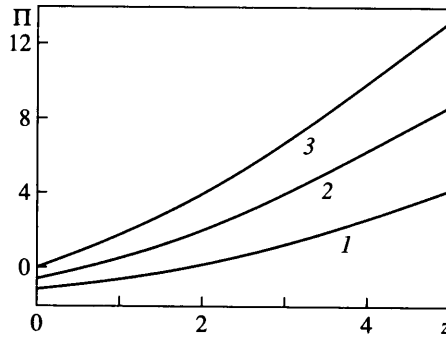
$$C_{kp}^{II(1)} = \frac{2^{1/2} \pi \sigma^2 N_1 N_2 m_1 m_2 (1+e) w'^3}{8(m_1 + m_2)(N_1 m_1 + N_2 m_2)} W_k W_n b_{kn} \left[\frac{(1+e)(7\Psi_4(z) + \Psi_5(z))}{2z^{1/2}} + \frac{3\Psi_2(z)}{4z^{3/2}} + \frac{(\Psi_7(z) - \Psi_6(z))}{z^{1/2}} \right] \quad (2.24)$$

Поскольку согласно (2.23) и (2.24) в предельных случаях

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{C_{kp}^{II(1)}}{C_{kp}^{II(0)}} = O(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{C_{kp}^{II(1)}}{C_{kp}^{II(0)}} = O(z^{-1})$$

то для качественного анализа поведения C_{kp}^{II} в зависимости от параметра дрейфа z можно пренебречь вкладом $C_{kp}^{II(1)}$ в (2.22) по сравнению с $C_{kp}^{II(0)}$. Таким образом, эффект столкновений частиц разного сорта на кинетическую энергию бидисперсной системы определяется зависимостью $\Pi(z)$ в (2.23). Эта зависимость показана на фиг. 1 для разных значений коэффициента восстановления e . Видно, что упругие соударения при наличии относительного дрейфа приводят к генерации пульсационной энергии, т.е. вызывают турбулизацию бидисперсного потока частиц. Этот источник кинетической пульсационной энергии возникает из осредненного движения вследствие наличия разности средних скоростей движения частиц разного сорта. При неупругих соударениях в случае малого дрейфа имеет место диссипация кинетической энергии, а с ростом параметра дрейфа ламинаризирующее влияние столкновений сменяется турбулизирующим. Таким образом, столкновительный механизм может приводить как к диссипации (при малом дрейфе), так и к порождению (при значительном дрейфе) пульсационной кинетической энергии бидисперсной системы частиц.

3. Оседание бидисперсной смеси частиц. Рассмотрим движение бидисперсной смеси частиц в турбулентном газе под действием силы тяжести. Такое течение представляет собой простейшую модель псевдокипящего слоя. Турбулентное поле газа предполагает



Фиг. 1. Влияние параметра дрейфа на столкновительный член $C_{kp}^{\Pi(0)}$: $e = 0, 0.5, 1$ (кривые 1–3)

ся однородным изотропным с нулевой средней скоростью. Однако вследствие действия силы тяжести пульсации скоростей частиц не будут изотропными, так как различаются в вертикальном и горизонтальном направлениях.

В рассматриваемых условиях уравнения (1.7) сводятся к балансу импульса для частиц каждой группы в вертикальном направлении x

$$\frac{V_{\alpha x} - U_x}{\tau_{p\alpha}} + g = C_x^\alpha \quad (3.1)$$

где C_x^α определяется согласно (2.14)–(2.16).

Поскольку течение однородно и его характеристики в горизонтальной плоскости изотропны, то система уравнений (1.8) сводится к балансу вторых моментов пульсаций скоростей частиц в вертикальном (x) и горизонтальном (y) направлениях

$$\frac{2(f_{u\alpha}^x u'^2 - \langle v_{\alpha x}^2 \rangle)}{\tau_{p\alpha}} + C_{xx}^{\alpha\alpha} + C_{xx}^{\alpha\beta} = 0, \quad \frac{2(f_{u\alpha}^y u'^2 - \langle v_{\alpha y}^2 \rangle)}{\tau_{p\alpha}} + C_{yy}^{\alpha\alpha} + C_{yy}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.2)$$

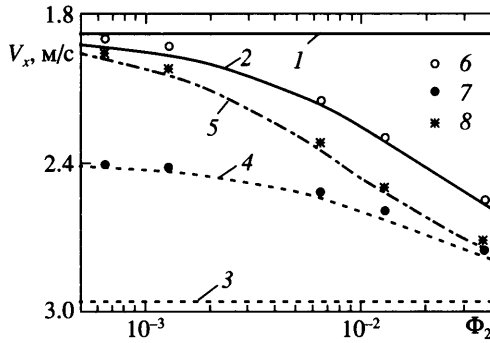
Здесь $u'^2 \equiv \langle u'_k u'_k \rangle / 3$ – интенсивность пульсаций скорости газа, а столкновительные члены задаются соотношениями (2.17)–(2.19).

В дальнейшем будут рассматриваться крупные тяжелые частицы, поэтому коэффициенты вовлечения задаются соотношением

$$f_{u\alpha}^\zeta = \frac{T_{Lp\alpha}^\zeta}{\tau_{p\alpha} + T_{Lp\alpha}^\zeta}, \quad \zeta = x, y \quad (3.3)$$

соответствующим экспоненциальной автокорреляционной функции пульсаций скорости турбулентного газа, определенной вдоль траектории частицы [4, 5]. Коэффициенты вовлечения в столкновительных членах вычисляются как среднеарифметические по различным направлениям $f_{u\alpha}^m = (f_{u\alpha}^x + 2f_{u\alpha}^y) / 3$.

Главным фактором, определяющим отличие интегральных временных масштабов взаимодействия крупных тяжелых частиц с турбулентными вихрями $T_{Lp\alpha}^\zeta$ от лагранжева масштаба турбулентности T_L , является осредненное скоростное скольжение частиц относительно турбулентного газа, обусловленное силой тяжести (так называемый “эф-



Фиг. 2. Осредненные скорости движения частиц: 1 – V_{1x}^∞ ; 2, 6 – V_{1x} ; 3 – V_{2x}^∞ ; 4, 7 – V_{2x} ; 5, 8 – V_x ; 2, 4, 5 – модель (3.1) и (3.2); 6, 7, 8 – [16]

фект пересечения траекторий”). В этом случае связь между $T_{Lp\alpha}^{\zeta}$ и T_L может быть описана простыми корреляциями [14]

$$T_{Lp\alpha}^x = \frac{T_L}{(1 + C_\gamma \gamma_\alpha^2)^{1/2}}, \quad T_{Lp\alpha}^y = \frac{T_L}{(1 + 4C_\gamma \gamma_\alpha^2)^{1/2}}, \quad \gamma_\alpha = \tau_{p\alpha} g \tag{3.4}$$

где g – ускорение силы тяжести. Из сопоставления с экспериментальными данными и собственными численными расчетами в [15] получено $C_\gamma = 0.45$.

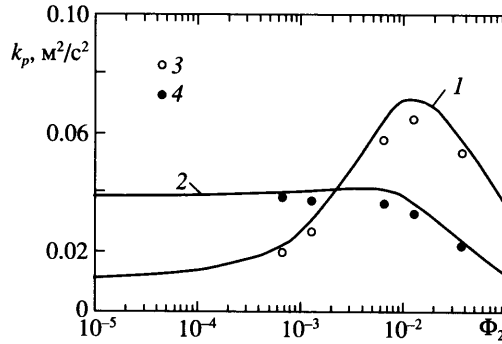
Время релаксации частицы сорта α рассчитывается в соответствии с известной зависимостью

$$\tau_{p\alpha} = \frac{\tau_{p\alpha 0}}{\varphi(\text{Re}_{p\alpha})}, \quad \tau_{p\alpha 0} = \frac{2\rho_{p\alpha} r_\alpha^2}{9\rho\nu}, \quad \varphi(\text{Re}_{p\alpha}) = \begin{cases} 1 + 0.15\text{Re}_{p\alpha}^{0.687}, & \text{Re}_{p\alpha} \leq 10^3 \\ 0.11\text{Re}_{p\alpha}/6, & \text{Re}_{p\alpha} > 10^3 \end{cases} \tag{3.5}$$

где $\tau_{p\alpha 0}$ – время релаксации в стоковом пределе ($\text{Re}_{p\alpha} \rightarrow 0$), $\text{Re}_{p\alpha} \equiv 2r_\alpha \tau_{p\alpha} g/\nu$ – число Рейнольдса обтекания частицы, $\rho_{p\alpha}$ и ρ – плотности материала частиц и газа, ν – коэффициент кинематической вязкости газа.

Решения уравнений (3.1) и (3.2) с учетом соотношений (3.3)–(3.5) проведены для условий, соответствующих результатам прямого лагранжева траекторного моделирования движения частиц в турбулентном поле, моделируемом методом крупных вихрей [16]. Рассматривалось движение смеси частиц одинакового размера ($r_\alpha = 325$ мкм), но разной плотности ($\rho_{p1} = 117.5$, $\rho_{p2} = 235$ кг/м³) в воздушном потоке с плотностью $\rho = 1.17$ кг/м³. Объемная концентрация частиц сорта 1 фиксировалась $\Phi_1 = 1.3 \cdot 10^{-2}$, а частиц сорта 2 варьировалась. Столкновения предполагались упругими ($e = 1$).

Фигура 2 представляет осредненные скорости частиц обеих групп $V_{\alpha x}$ и среднемассовую скорость бидисперсной системы $V_x \equiv (\rho_{p1}\Phi_1 V_{1x} + \rho_{p2}\Phi_2 V_{2x})/(\rho_{p1}\Phi_1 + \rho_{p2}\Phi_2)$ в зависимости от концентрации тяжелых частиц Φ_2 . Также показаны скорости седиментации частиц $V_{\alpha x}^\infty$, соответствующие их свободному падению при отсутствии столкновений. Приведенные скорости удовлетворяют неравенствам: $V_{1x}^\infty < V_{1x} < V_x < V_{2x} < V_{2x}^\infty$. Благодаря столкновениям происходит перенос импульса от тяжелых частиц, имеющих большую скорость седиментации, к легким частицам, в результате чего разность между скоростями V_{2x} и V_{1x} с ростом Φ_2 уменьшается. Среднемассовая скорость бидисперсной системы в



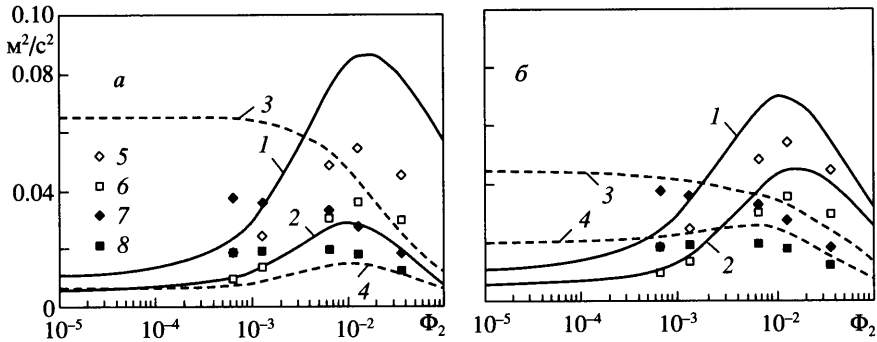
Фиг. 3. Кинетическая энергия частиц: 1, 3 – k_{p1} ; 2, 4 – k_{p2} ; 1, 2 – модель (3.1) и (3.2); 3, 4 – [16]

целом V_x близка к V_{1x}^∞ при малых значениях Φ_2 и стремится к V_{2x}^∞ при относительно больших Φ_2 . Видно хорошее согласие между результатами, полученными на основе модели (3.1) и (3.2), и данными численного моделирования [16].

На фиг. 3 показано влияние концентрации Φ_2 на кинетическую энергию частиц обоих сортов. Обращает на себя внимание отчетливо выраженный максимум в зависимости кинетической энергии легких частиц k_{p1} от концентрации тяжелых Φ_2 . Наличие максимума объясняется тем, что при малой концентрации Φ_2 кинетическая энергия легких частиц не зависит от столкновений, а определяется взаимодействием с турбулентностью. По мере роста Φ_2 увеличивается генерация k_{p1} за счет столкновений с тяжелыми частицами. При относительно больших значениях Φ_2 осредненное скоростное скольжение между легкими и тяжелыми частицами в результате столкновений становится незначительным, и, следовательно, вклад столкновений в генерацию кинетической энергии частиц снижается.

Интересным является также тот факт, что при малых Φ_2 величина k_{p2} больше, чем k_{p1} , а при относительно больших значениях Φ_2 , наоборот, k_{p2} меньше, чем k_{p1} . Соотношение $k_{p2} > k_{p1}$ при малых Φ_2 связано с тем, что концентрация Φ_1 остается неизменной, и поэтому кинетическая энергия тяжелых частиц k_{p2} определяется, главным образом, их столкновениями с легкими частицами. Поскольку с ростом Φ_2 роль генерации за счет столкновений уменьшается, k_{p2} становится меньше, чем k_{p1} , так как тяжелые частицы хуже вовлекаются в турбулентное движение, чем легкие.

На фиг. 4 показаны зависимости интенсивностей пульсаций скоростей частиц обеих групп. Фигура 4, а представляет интенсивности пульсаций скоростей, полученные в результате учета только столкновительных членов $C_{ij}^{\alpha\beta(0)}$ (2.18), соответствующих изотропной гауссовой ФПВ (2.2), а фиг. 4, б – на основе полных столкновительных членов $C_{ij}^{\alpha\beta}$ (2.17), учитывающих также анизотропную составляющую ФПВ (2.8). Обращает на себя внимание сильная анизотропия пульсаций скоростей частиц, связанная с двумя механизмами генерации пульсаций. Во-первых, “столкновительный механизм” генерации, как следует из (2.17)–(2.19), играет преимущественную роль в направлении средней скорости дрейфа между частицами разного сорта, т.е. в вертикальном направлении. И, во-вторых, вследствие разницы временных масштабов взаимодействия частиц с турбулентными вихрями $T_{Lp\alpha}^x$ и $T_{Lp\alpha}^y$, согласно (3.4) (так называемый “эффект неразрывности”), степень вовлечения частиц в пульсационное движение турбулентной жидкости в верти-



Фиг. 4. Интенсивности пульсаций скоростей частиц: 1, 5 – $\langle v_{1x}^2 \rangle$; 2, 6 – $\langle v_{1y}^2 \rangle$; 3, 7 – $\langle v_{2x}^2 \rangle$; 4, 8 – $\langle v_{2y}^2 \rangle$; 1–4 – модель (3.1) и (3.2); 5–8 – [16]

кальном направлении оказывается большей, чем в горизонтальном. Влияние этих двух механизмов генерации на анизотропию пульсаций скоростей частиц направлено в одну и ту же сторону, что и приводит к существенно большей интенсивности пульсаций скоростей частиц в вертикальном, чем в горизонтальном направлении при всех значениях Φ_2 . Как видно из сравнения фиг. 4,а и 4,б учет столкновительных членов $C_{ij}^{\alpha\beta(1)}$ (2.19) приводит к значительному снижению анизотропии пульсаций скоростей частиц обеих групп.

Заключение. Развита статистическая модель для описания столкновений бидисперсных частиц в анизотропных турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для ФПВ скорости частиц, одновременно учитывающем взаимодействие частиц с турбулентными вихрями и столкновения частиц друг с другом. Для определения двухчастичной ФПВ используется метод Грэда, обобщенный с целью учета коррелированности движения сталкивающихся частиц. Представленная модель столкновений учитывает относительную осредненную скорость (дрейф) между частицами разного сорта, анизотропию турбулентных пульсаций скоростей частиц и коррелированность их движения. Получены аналитические зависимости для ядра столкновений и столкновительных членов в уравнениях баланса количества движения и турбулентных напряжений для бидисперсной системы частиц.

Одним из наиболее интересных эффектов в бидисперсной системе по сравнению с монодисперсной является наличие механизма порождения пульсационной энергии дисперсной фазы, обусловленного относительным дрейфом между частицами разного сорта. Результаты сравнения с данными прямых численных расчетов оседания частиц под действием силы тяжести позволяют сделать вывод, что представленная модель адекватно описывает все основные особенности статистики поля скорости бидисперсной смеси частиц в однородной турбулентной среде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-01292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алипченков В.М., Зайчик Л.И. Столкновения частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 3.
2. Gourdel C., Simonin O., Brunier E. Two-Maxwellian equilibrium distribution function for the modeling of a binary mixture of particles // Proc. 6th Int. Conf. on Circulating Fluidized Beds. Frankfurt, Germany. 1999. P. 205–210.

3. *Fede P., Simonin O.* Application of a perturbed two-Maxwellian approach for the modelling of kinetic stress transfer by collision in non-equilibrium binary mixture of inelastic particles // Proc. ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting and Exhibition. Houston, USA. 2005. FEDSM2005-77127.
4. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Статистическая модель движения и дисперсии частиц в анизотропном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 70–83.
5. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Моделирование турбулентного движения частиц в вертикальном канале // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 50–65.
6. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge Univ. Press, 1970.
7. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.* Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow an slightly inelastic particles in a general flow field // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 223–256.
8. *Jenkins J.T., Richman M.W.* Grad's 13-moment system for a dense gas of inelastic spheres // Arch. Rat. Mech. Anal. 1985. V. 87. № 4. P. 355–377.
9. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Моделирование динамики сталкивающихся частиц в турбулентном сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 105–112.
10. *Zaichik L.I., Simonin O., Alipchenkov V.M.* Collision rates of bidisperse inertial particles in isotropic turbulence // Phys. Fluids. 2006. V. 18. № 3. P. 0351101–1–035110–13.
11. *Abrahamson J.* Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid // Chem. Eng. Sci. 1975. V. 30. № 11. P. 1371–1379.
12. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Частота столкновений частиц в турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 93–105.
13. *Dodin Z., Elperin T.* On the collision rate in turbulent flow with gravity // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 8. P. 2921–2924.
14. *Csanady G.T.* Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere // J. Atmosph. Sci. 1963. V. 20. № 3. P. 201–208.
15. *Deutsch E., Simonin O.* Large eddy simulation applied to the modelling of particulate transport coefficients in turbulent two-phase flows // Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows. Munich, Germany. 1991. P. 10–1–1–10–1–6.
16. *Gourdel C., Simonin O., Brunier E.* Modeling and simulation of gas–solid turbulent flows with a binary mixture of particles // Proc. 3rd Int. Conf. on Multiphase Flow. Lyon, France. 1998. Paper № 504.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.2006