

УДК 532.517.4:536.25

© 2007 г. И.Б. ПАЛЫМСКИЙ

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ, РОЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрена задача о двумерной, периодической по горизонтальной координате конвекции несжимаемой жидкости между двумя горизонтальными плоскостями при подогреве снизу. Задача решена в двух постановках – со свободными (от напряжений) и жесткими (с условием прилипания) граничными условиями на горизонтальных плоскостях. Показано, что при малой надкритичности расчет двумерной конвекции с жесткими граничными условиями приводит к более точным результатам, чем расчет со свободными граничными условиями. Установлено, что различие в граничных условиях (свободные-жесткие) наиболее сильно проявляется в пульсациях вертикальной составляющей скорости, в то время как зависимость числа Нуссельта и пульсаций горизонтальной составляющей скорости от граничных условий выражена слабее.

*Ключевые слова:* конвекция, несжимаемая жидкость, надкритичность, число Нуссельта, число Эрэля, турбулентность.

Задача о конвекции в различных постановках решалась многими авторами [1–28]. Приведем полученные ранее результаты, ориентируясь на экспериментальные и теоретические исследования конвективных течений при высокой надкритичности  $r = Ra/Ra_{cr}$ , где  $Ra$  и  $Ra_{cr}$  – число Рэлея и критическое значение числа Рэлея [1, 2].

Различают две постановки задачи о конвекции в бесконечном горизонтальном слое – со свободными (от напряжений) и жесткими (с условием прилипания) горизонтальными границами, как правило, решение предполагается периодическим в горизонтальных направлениях. Обе постановки задачи часто приводят к решениям, различающимся лишь количественно, а не качественно [1]. Этим и относительной простотой решения задачи о конвекции со свободными граничными условиями и объясняется интерес к этой постановке.

Идеология использования небольшого количества степеней свободы на основе метода Галеркина получила развитие в [3–6] при численных исследованиях и в линейной теории устойчивости [2, 7]. При решении задач линейной теории устойчивости и при моделировании конвекции при небольшой надкритичности такой подход представляется правильным, а при проведении расчетов при большой надкритичности недостаточное число учитываемых степеней свободы может приводить к ложным хаотическим решениям, обусловленным плохим представлением диссипативной части спектра [8].

Расчеты конвекции по трехмерной модели проводились в [8–10] со свободными и [11–13] с жесткими граничными условиями. Использование суперкомпьютеров сделало реальным прямое численное моделирование турбулентной конвекции в воздухе [9, 10, 13], но, к сожалению, в этих работах отсутствуют спектральный анализ используемых численных методов и детальное сравнение с экспериментальными данными.

До сих пор полный расчет трехмерного нестационарного течения при высокой надкритичности – очень сложная задача, требующая огромных вычислительных ресурсов.

С целью многократно уменьшить используемые вычислительные ресурсы рассматривают конвекцию жидкости в модельной двумерной постановке. В [14, 15] показано, что использование двумерного приближения оправдано при рассмотрении конвекции, возни-

кающей при подогреве сбоку, причем по некоторым характеристикам получено хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных по турбулентной конвекции [15].

В [6, 8, 16–24] рассматривалась двумерная конвекция со свободными, а в [11, 22, 26–28] с жесткими граничными условиями, сложные режимы при высокой надкритичности исследовались в [22, 24, 26, 27].

Конвективные течения в квадратной области рассчитаны в [26, 27] при огромной надкритичности (до  $r \sim 9.6 \cdot 10^4$ ), но использованная разрешимость в горизонтальном направлении в этих работах представляется явно недостаточной (129 и 257 гармоник в [26, 27]). Результаты численного моделирования двумерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями при высокой надкритичности (до  $r = 3.4 \cdot 10^4$  для свободных граничных условий) описаны в [22], однако результаты сравнения с экспериментальными данными требуют уточнений. В [24] получен закон  $Nu \sim Ra^{0.301}$ , но расчеты проводились в области с небольшим аспектным соотношением (отношение горизонтального и вертикального размеров), равным 1.8, и использовалась более простая модель бесконечно большого числа Прандтля.

Цель данной работы – проведение предложенным ранее автором спектрально-разностным численным методом расчетов двумерной, периодической в горизонтальном направлении конвекции, в плоском слое со свободными от напряжений и жесткими горизонтальными границами при высокой надкритичности (до  $r = 3.4 \cdot 10^4$  для свободных и  $r = 7 \cdot 10^3$  для жестких граничных условий), сравнительный анализ полученных результатов с целью выяснения роли граничных условий (свободные-жесткие) и сравнение численных результатов с экспериментальными данными.

**1. Постановка задачи.** В приближении Буссинеска рассматриваются двумерные конвективные течения вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое между двумя горизонтальными плоскостями при подогреве снизу. Течение предполагается периодическим в горизонтальном направлении с периодом  $2\pi/\alpha$ , где  $\alpha$  – минимальное волновое число, а горизонтальные границы области – изотермическими.

Записанная в отклонениях от равновесного решения, после обезразмеривания исходная система уравнений имеет вид [22]

$$\begin{aligned} \omega_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y \omega_x - \varphi_x \omega_y) &= \Delta \omega + Ra Q_x \\ \Delta \varphi &= -\omega \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) &= \frac{1}{Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \varphi_x \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\varphi$  – функция тока,  $\omega$  – вихрь,  $Q$  – отклонение температуры от равновесного линейного профиля (полная температура равна  $\Theta = 1 - y + Q$ ),  $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$  – оператор Лапласа, действующий на функцию  $f$ ,  $Ra = g\beta H^3 dQ/\chi\nu$  – число Рэлея,  $Pr = \nu/\chi$  – число Прандтля,  $g$  – величина ускорения силы тяжести,  $\beta$ ,  $\nu$ ,  $\chi$  – коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности,  $H$  – толщина слоя и  $dQ$  – разность температур на горизонтальных границах,  $x$  и  $y$  – горизонтальная и вертикальная координаты. В дальнейшем, для краткости будем называть  $Q$  и  $\Theta$  температурой.

Рассматривается задача о конвекции в двух постановках, которые различаются граничными условиями на горизонтальных границах.

1. Вертикальная компонента скорости, касательное напряжение и температура обращаются в нуль:  $\varphi = \omega = Q = 0$ , они будут называться свободными.

2. Вертикальная и горизонтальная компоненты скорости (условие прилипания) и температура нулевые:  $\varphi = \varphi_y = Q = 0$ , условия – жесткие.

Граничные условия на боковых границах в обеих постановках не различаются. Рассматриваются периодические по горизонтальной координате  $x$  решения системы (1.1), но для повышения эффективности применения конечно-разностной схемы на втором

этапе расчета вычисления проводятся в области, длина которой равна половине периода решения, поэтому на боковых границах периодические граничные условия для искоемых функций заменяются на граничные условия первого и второго рода в соответствии с видом решения. Никаких дополнительных ограничений на вид решения (типа навязывания решению определенной симметрии) при этом не возникает.

Искомые величины  $\omega$ ,  $\varphi$  и  $Q$  разыскиваются в виде

$$\begin{aligned}\omega(t, x, y) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \omega_{km}(t) \rho_k \cos(\alpha kx) \sin(\pi my) \\ \varphi(t, x, y) &= \sum_{k=0}^N \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\omega_{km}(t)}{\alpha^2 k^2 + \pi^2 m^2} \rho_k \cos(\alpha kx) \sin(\pi my) \\ Q(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \sin(\alpha kx) \sin(\pi my)\end{aligned}\quad (1.2)$$

для задачи со свободными и

$$\begin{aligned}\omega(t, x, y) &= \sum_{k=0}^N \omega_k(t, y) \rho_k \cos(\alpha kx) \\ \varphi(t, x, y) &= \sum_{k=0}^N \varphi_k(t, y) \rho_k \cos(\alpha kx) \\ Q(t, x, y) &= \sum_{k=1}^{N-1} Q_k(t, y) \sin(\alpha kx)\end{aligned}$$

для задачи с жесткими граничными условиями, где  $\rho_k = 0.5$  при  $k=0, N$  и  $1$  при  $1 \leq k \leq N-1$ .

Итак, система (1.1) решается в области  $G = \{0 \leq x \leq \pi/\alpha, 0 \leq y \leq 1\}$  с граничными условиями на вертикальных границах:  $\varphi_x = \omega_x = Q = 0$  при  $x = 0, \pi/\alpha$ ;  $0 \leq y \leq 1$ .

Пусть  $r = Ra/Ra_{cr}$  – надкритичность, где  $Ra_{cr}$  – критическое значение числа Рэлея, равное 657.5 и 1708 для задач со свободными и жесткими граничными условиями соответственно.

**2. Численный метод.** Кратко опишем спектрально-разностный метод, используемый для решения системы (1.1). Данный метод применялся для расчетов двумерной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями при высокой надкритичности [22]. Подробное описание метода расчета со всеми формулами для свободных граничных условий можно найти в [29, 30], в [30] даны результаты линейного и нелинейного (на модельной нелинейной системе уравнений) анализа численного метода.

Следуя общей идеологии метода расщепления, переход от слоя  $n$  к слою  $n+1$  по времени производится в два этапа. На первом этапе расщепления устанавливается соответствие в линейном приближении спектральных характеристик численного метода и дифференциальной задачи, а на втором учитываем нелинейные процессы.

На первом этапе расщепления учитываем линейное развитие возмущений без учета взаимодействия гармоник

$$\begin{aligned}\omega_t &= \frac{1}{2} \Delta \omega + Ra Q_x \\ \Delta \varphi &= -\omega \\ Q_t &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q - \frac{1}{Pr} \varphi_x\end{aligned}\quad (2.1)$$

Для эффективного решения уравнений нелинейного конвективного переноса для завихренности  $\omega$  и температуры  $Q$  половина вязких членов учтена на втором этапе расчета. После подстановки решения (1.2) в систему (2.1) вместо (2.1) получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух неизвестных амплитуд  $\omega_{km}$  и  $Q_{km}$ . Полученная система уравнений решается аналитически без применения каких-либо аппроксимаций по времени по формулам, выведенным программой аналитических вычислений Maple V R4 [29, 30].

На втором этапе учитывается нелинейный конвективный перенос, т.е. принимается во внимание взаимодействие гармоник. Здесь применена конечно-разностная схема переменных направлений (продольно-поперечной прогонки), ранее успешно использованная для расчета турбулентных конвективных течений в прямоугольной области при подогреве сбоку [15]

$$\begin{aligned} \omega_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y \omega_x - \varphi_x \omega_y) &= \frac{1}{2} \Delta \omega \\ Q_t + \frac{1}{Pr}(\varphi_y Q_x - \varphi_x Q_y) &= \frac{1}{2Pr} \Delta Q \end{aligned} \tag{2.2}$$

Уравнения переноса для  $\omega$  и  $Q$  решаются в два дробных шага, на каждом дробном шаге применяется схема А.А. Самарского для аппроксимации одномерных операторов на верхнем слое по времени и центральными разностями на нижнем. Коэффициенты  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  в разностных уравнениях (2.2) вычислялись по функции тока, найденной на первом этапе расщепления [30].

Пересчет искомых полей из спектрального пространства в физическое и обратно производился по стандартным программам быстрого преобразования Фурье по косинусам и синусам.

Для вычисления числа Нуссельта поле температуры представлялось в виде

$$Q(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} Q_{km}(t) \sin(\alpha kx) \sin(\pi my)$$

потом определялось число Nu в данный момент времени ( $t = t^n$ )

$$Nu = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} (Q_y(t, x, 0) + Q_y(t, x, 1)) dx - 1$$

$$Nu^n \approx 2 \sum_{k1}^N \sum_{m1}^M Q_{km}^n \frac{m}{k} - 1, \quad k1 = 1, 2, \dots, N-1, \quad m1 = 2, 4, \dots, M-2$$

и среднее значение числа Нуссельта

$$Nu \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=N_0}^{N_0+N} Nu^k \right\}$$

Величина  $N$  выбиралась такой, чтобы полученное среднее значение Nu не изменялось при ее увеличении и варьировании  $N_0$ .

Для проверки правильности работы вычислительного алгоритма со свободными граничными условиями проведены сравнения вычисленных значений числа Nu с результатами [17, 20, 21] при небольшой надкритичности  $r = 10, 15, 20$  и  $\alpha = 2.22$ . Расчетные значения Nu хорошо согласовались с результатами [20, 21] ( $Pr = 6.8$ , среднее отклонение 4.95 и 3.44%) и [17] ( $Pr = 10$ ), воспроизведенными с графической точностью.

$r = Ra/Ra_{cr}$	Nr	Nf	Ne
1.42	1.325	1.562	1.45
2.20	1.747	2.234	1.82
2.70	1.914	2.521	1.96
3.80	2.167	2.985	2.18

Алгоритм с жесткими граничными условиями проверялся сравнением числа Нуссельта с результатами [28] при небольшой надкритичности  $r = 1.46, 5.85$  и в квадратной области. В [28] использовался конечно-разностный метод при высокой (для этих значений надкритичности) разрешимости  $[64 \times 64]$  и более простая модель бесконечно большого числа Pr. Вычисленное значение числа Nu (при Pr = 10) хорошо согласовалось с результатами [28], среднее отклонение 4%. Результаты сравнения с экспериментальными данными по двумерной конвекции при небольшой надкритичности  $1.42 \leq r \leq 3.8$  [31] описаны в следующем разделе (см. таблицу).

**3. Сравнение при малой надкритичности.** В [31] описаны результаты экспериментов по стационарной двумерной конвекции в дистиллированной воде при небольшой надкритичности (до  $r < 14$ ). Для сравнения с экспериментальными данными [31] были выполнены расчеты стационарной конвекции по двумерной модели со свободными и жесткими граничными условиями на горизонтальных границах, аспектное отношение и размер окна для наблюдения в расчетах и эксперименте совпадали, все результаты данного раздела получены с разрешимостью  $[513 \times 17]$  и при Pr = 6.8.

Изотермы полной температуры, полученные в эксперименте и в расчетах по двумерной модели со свободными и жесткими граничными условиями при  $r = 2.2$ , сравниваются на фиг. 1.

Видно, что обе расчетные изотермы качественно близки к экспериментальной, но результаты расчетов по двумерной модели с жесткими граничными условиями кажутся более точными по форме изотерм.

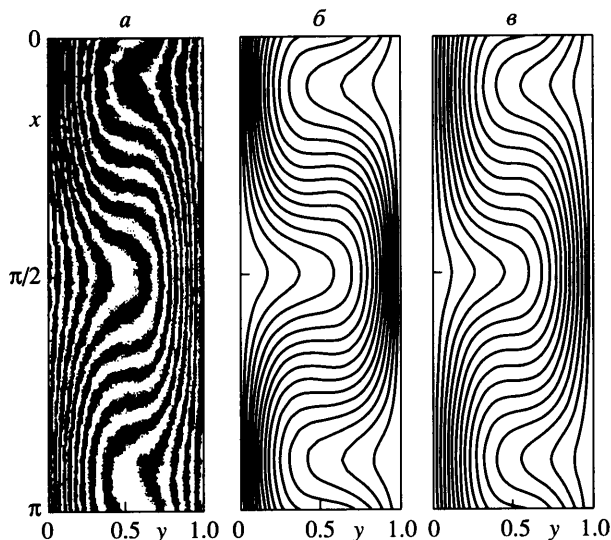
Число Нуссельта было равно: 1.82 – в эксперименте, 2.23 и 1.75 – в расчетах по двумерной модели со свободными и жесткими граничными условиями соответственно. Отклонения составили 23 и 4% для расчетов со свободными и жесткими граничными условиями.

Горизонтальный размер конвективной ячейки в эксперименте был равен примерно  $2.35 \cdot H$ , где  $H$  – толщина слоя. В расчетах стационарной конвекции со свободными и жесткими граничными условиями размер конвективной ячейки  $2.37 \cdot H$ .

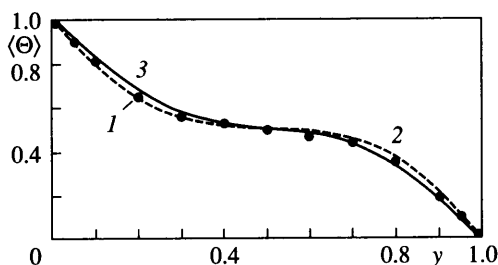
На фиг. 2 приведены экспериментальный и расчетные профили средней температуры, полученные со свободными и жесткими граничными условиями при  $r = 2.2$ . Результаты расчетов и эксперимента хорошо согласуются, но профиль средней температуры, полученный в расчете со свободными границами, имеет более крутой наклон вблизи обеих горизонтальных границ.

Экспериментальные данные [31] показывают при  $r \approx 2.34$  точку перехода теплового потока (разрыв производной  $Nu(r)r$  как функции  $r$ ), в расчетах точка перехода теплового потока наблюдалась при  $r = 2.48$  (для свободных) и 2.78 (жестких) граничных условий.

В таблице сравниваются значения числа Нуссельта, полученные расчетом со свободными (Nf), жесткими граничными условиями (Nr) и экспериментальные данные [31] (Ne) для дистиллированной воды при надкритичности  $r = 1.42, 2.2, 2.7$  и 3.8. Видно, что использование жестких граничных условий приводит к результату, более близкому к экспериментальному (среднее отклонение 4.2%), чем использование свободных (24%).



Фиг. 1. Экспериментальная (а) и расчетные (б, в) изотермы полной температуры при надкритичности  $r = 2.2$  и  $Pr = 6.8$ : а – эксперимент [31]; б, в – расчеты со свободными и жесткими граничными условиями



Фиг. 2. Экспериментальный [31] (1) и расчетные профили температуры со свободными (2) и жесткими (3) граничными условиями

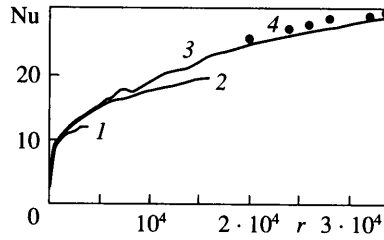
Более крутой наклон профиля средней температуры вблизи горизонтальных границ и обусловленное этим завышение значений числа Нуссельта связано с большей интенсивностью конвекции в случае свободных граничных условий из-за отсутствия торможения на границах силами вязкости.

**4. Умеренные и высокие значения надкритичности.** Все результаты данного раздела получены при  $\alpha = 1$  при длине периода решения в горизонтальном направлении  $2\pi$ .

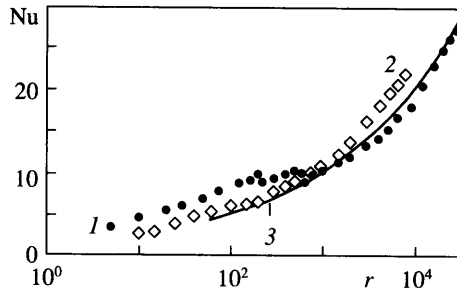
Значения числа Нуссельта как функции надкритичности при различной разрешимости для свободных граничных условий ( $Pr = 10$ ) на фиг. 3 показывают, что разрешимости  $[257 \times 65]$  достаточно для проведения расчетов до  $r \leq 3.4 \cdot 10^4$  со свободными граничными условиями.

В расчетах со свободными граничными условиями использовалось  $[65 \times 17]$  гармоник – при  $r < 10^3$ ,  $[129 \times 33]$  –  $10^3 \leq r \leq 6 \cdot 10^3$  и  $[257 \times 65]$  гармоник –  $6 \cdot 10^3 < r \leq 3.4 \cdot 10^4$ . При проведении тестовых расчетов учитывалось  $[513 \times 129]$  гармоник.

Аналогичные методические расчеты с различной разрешимостью были выполнены и с жесткими граничными условиями, но смогли продвинуться только до  $r = 7 \cdot 10^3$ .



Фиг. 3. Зависимость  $Nu(r)$  при различной разрешимости для свободных граничных условий: 1 –  $[65 \times 17]$ , 2 –  $[129 \times 33]$ , 3 –  $[257 \times 65]$ , 4 –  $[513 \times 129]$



Фиг. 4. Зависимость  $Nu(r)$  для расчетов со свободными (1), жесткими (2) граничными условиями и эксперимент [32] (3)

Основываясь на результатах методических расчетов, расчеты с жесткими граничными условиями проводились с разрешимостью:  $[17 \times 17]$  – при  $10 \leq r < 40$ ,  $[33 \times 33]$  –  $40 \leq r < 225$ ,  $[65 \times 33]$  –  $225 \leq r < 500$ ,  $[65 \times 65]$  –  $500 \leq r < 750$ ,  $[129 \times 65]$  –  $750 \leq r < 2 \cdot 10^3$ ,  $[257 \times 65]$  –  $2 \cdot 10^3 \leq r < 4 \cdot 10^3$  и  $[513 \times 65]$  –  $4 \cdot 10^3 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ .

На фиг. 4 изображены зависимости чисел Нуссельта как функции надкритичности для расчетов со свободными, жесткими граничными условиями и экспериментальные данные [32] (все при  $Pr = 10$ ).

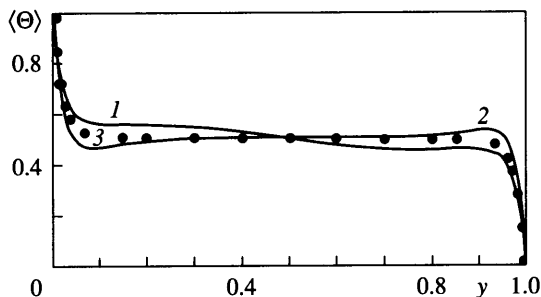
Эмпирический закон при  $Pr = 10$  и  $Ra = 1708r$  имеет вид  $Nu = 1.22 \cdot r^{0.305}$ ,  $60 < r < 6 \cdot 10^4$ .

Зависимость числа Нуссельта от надкритичности в расчетах с жесткими граничными условиями с графической точностью представляется формулой  $Nu = 1.246 \cdot r^{0.317}$ ,  $150 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ .

В зависимости  $Nu(r)$  в расчетах со свободными граничными условиями можно выделить три участка:  $Nu = 2.468 \cdot r^{0.261}$ ,  $5 \leq r \leq 200$  (малые надкритичности),  $200 < r < 600$  – переходной участок без выраженного степенного закона и  $Nu = 1.223 \cdot r^{0.302}$ ,  $6 \cdot 10^2 \leq r \leq 3.4 \cdot 10^4$  (большие надкритичности).

Из фиг. 4 видно, что при  $r < 650$  расчет двумерной конвекции со свободными граничными условиями приводит к более высоким значениям числа Нуссельта, чем с жесткими, а при  $r > 650$  – наоборот. Двумерная модель со свободными граничными условиями при  $6 \cdot 10^2 \leq r \leq 3.4 \cdot 10^4$  дает числа Нуссельта, близкие к полученным экспериментально (различие 3.7 и 2.2% при  $r = 7 \cdot 10^3$  и  $3.4 \cdot 10^4$ ), в то время как отклонение значений числа Нуссельта, рассчитанных по двумерной модели с жесткими граничными условиями, от экспериментальных значений больше (15.3% при  $r = 7 \cdot 10^3$ ).

Отметим, что эксперименты по конвекции в воде и воздухе [33, 34] показывают закон  $Nu \sim Ra^{0.3}$ , а расчеты по двумерной модели бесконечного числа Прандтля со свобод-



Фиг. 5. Профиль средней температуры  $\langle \Theta \rangle$  для расчетов со свободными (1), жесткими (2) граничными условиями и экспериментальные данные [36] (3)

ными граничными условиями –  $Nu \sim Ra^{0.301}$  [24]. Однако в других экспериментальных работах по конвекции в воде [35, 36] получены несколько другие законы  $Nu \sim Ra^{0.293}$  и  $Ra^{0.278}$ .

Профили средней температуры приведены на фиг. 5 для расчета со свободными, жесткими граничными условиями и автомоделный профиль [36] (все при  $r = 6 \cdot 10^3$  и  $Pr = 6$ ). Числа Нуссельта были равны: 16.28 в эксперименте [36], 18.97 (отклонение 16.5%) и 15.68 (3.7%) – в расчетах с жесткими и свободными границами.

Несмотря на более значительные отличия от экспериментальных значений в средней части слоя, профиль средней температуры, полученный расчетом со свободными граничными условиями, кажется более точным, как не имеющий зон положительного градиента. И напротив, такие участки ясно видны в расчете с жесткими граничными условиями. Последнее находится в противоречии с экспериментом, согласно которому зоны положительного градиента в профиле средней температуры при конвекции в воде наблюдаются при  $r < 300$  [36]. При дальнейшем росте надкритичности в эксперименте увеличение турбулентного перемешивания приводит к тому, что опускающиеся плюмы холодной и поднимающиеся теплой жидкости разрушаются, не достигнув противоположных границ, что способствует исчезновению зон положительного градиента [36].

В расчетах конвекции с жесткими граничными условиями ( $Pr = 10$ ) четко выраженные зоны положительного градиента наблюдались при  $15 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ . А в расчетах конвекции со свободными граничными условиями при том же  $Pr$  такие участки наблюдались лишь при  $r < 250$  в согласии с данными экспериментов [36].

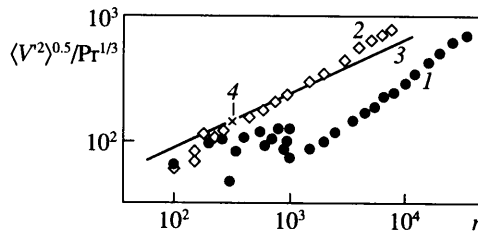
Теперь рассмотрим пульсации вертикальной и горизонтальной составляющей скорости при  $y = 0.5$  как функции надкритичности. Деление значений пульсаций скоростей на  $Pr^{1/3}$  позволяет сравнивать экспериментальные данные с отличающимися  $Pr$  [35].

Значения пульсаций вертикальной составляющей скорости  $\langle V^2 \rangle^{0.5}$  на фиг. 6, полученные расчетом с жесткими, свободными граничными условиями ( $Pr = 10$ ), и экспериментальные данные [35, 37] по конвекции в воде показывают, что величины  $\langle V^2 \rangle^{0.5}$  в случае жестких граничных условий при  $r > 260$  лучше соответствуют экспериментальным данным, чем данные расчета со свободными. При рассмотрении эмпирического закона [35] критическое значение  $Ra_{cr} \approx 1820$  было вычислено по данным [2, 38].

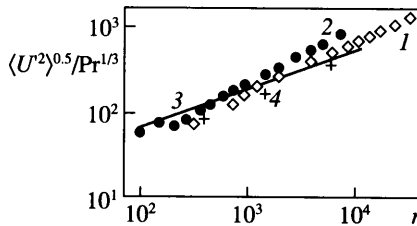
В расчете с жесткими граничными условиями при  $r = 7 \cdot 10^3$  отклонение от экспериментальной кривой [35] составило 33.6%, а в расчете со свободными – более чем в два раза.

Пульсации горизонтальной составляющей скорости  $\langle U^2 \rangle^{0.5}$  приведены на фиг. 7 для расчетов со свободными, жесткими граничными условиями и экспериментальные данные по конвекции в воздухе [34, 39]. Отметим, что при  $r > 10^3$  величины пульсаций, полученные расчетом со свободными граничными условиями, ближе к эксперименталь-





Фиг. 6. Пульсации вертикальной скорости  $\langle V^2 \rangle^{0.5}$  как функции  $r$  для расчетов со свободными (1), жесткими (2) граничными условиями и экспериментальные данные [35] (3) и [37] (4)



Фиг. 7. Пульсации горизонтальной скорости  $\langle U^2 \rangle^{0.5}$  как функции  $r$ , обозначения расчетов как на фиг. 6 и экспериментальные данные [34] (3) и [39] (4)

ным значениям, чем с жесткими (например, при  $r = 7 \cdot 10^3$  различия составляют 19 и 70% для свободных и жестких горизонтальных границ).

Из данных, приведенных на фиг. 6 и 7, видно, что в распределениях пульсаций горизонтальной составляющей скорости влияние граничных условий (свободные-жесткие) проявляется слабее, чем в пульсациях вертикальной составляющей. Например, при  $r = 7 \cdot 10^3$  значения пульсаций  $\langle U^2 \rangle^{0.5}$  отличаются примерно на 42%, в то время как значения пульсаций  $\langle V^2 \rangle^{0.5}$  – более чем в два раза.

**Заключение.** Задача о двумерной, периодической по горизонтальной координате конвекции между двумя горизонтальными плоскостями при подогреве снизу решена в двух постановках – со свободными и жесткими граничными условиями на горизонтальных плоскостях.

При малой надкритичности расчет двумерной конвекции с жесткими граничными условиями приводит к более близким к эксперименту значениям числа Nu, а поля температуры в расчетах со свободными и жесткими границами различаются незначительно.

При  $r < 650$  расчет двумерной конвекции со свободными граничными условиями дает более высокие значения числа Нуссельта, чем с жесткими, а при  $r > 650$  – наоборот. При использовании двумерной модели со свободными граничными условиями при  $6 \cdot 10^2 \leq r \leq 3.4 \cdot 10^4$  расчетные числа Нуссельта близки к полученным экспериментально.

Числа Нуссельта как функции надкритичности следуют приближенно установленным степенным зависимостям.

В расчетах по двумерной модели с жесткими граничными условиями профиль средней температуры с четко выраженными участками положительного градиента наблюдался при  $15 \leq r \leq 7 \cdot 10^3$ , что противоречит экспериментальным данным, где подобный профиль при конвекции в воде наблюдался лишь при  $r < 300$ . Двумерная модель со свободными граничными условиями дает профиль средней температуры с четко выраженными такими зонами при  $r < 250$ , что согласуется с экспериментальными данными.

Различие в граничных условиях (свободные-жесткие) наиболее сильно проявилось в пульсациях вертикальной составляющей скорости, в то время как зависимость пульсаций горизонтальной составляющей от граничных условий выражена слабее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея–Бенара. Структуры и динамика. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 247 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Yahata H. Onset of chaos in the Rayleigh-Benard convection // Progr. Theor. Phys. Suppl. 1984. № 79. P. 26–74.
4. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 1. С. 59–62.
5. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемого снизу // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 545–548.
6. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б. О моделях перехода к турбулентности при конвективной неустойчивости // Моделирование в механике. 1989. Т. 3(20). № 4. С. 59–65.
7. Gelfgat A.Yu. Different modes of Rayleigh-Benard instability in two-and three-dimensional rectangular enclosures // J. Comp. Phys. 1999. V. 156. № 2. P. 300–324.
8. Curry J.H., Herring J.R., Loncaric J., Orszag S.A. Order and disorder in two-and three-dimensional Benard convection // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 1–38.
9. Cortese T., Balachandar S. Vortical nature of thermal plumes in turbulent convection // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5. № 12. P. 3226–3232.
10. Malevsky A.V. Splines-characteristic method for simulation of convective turbulence // J. Comput. Phys. 1996. V. 123. № 2. P. 466–475.
11. Grotzbach G. Direct numerical simulation of laminar and turbulent Benard convection // J. Fluid Mech. 1982. V. 119. P. 27–53.
12. McLaughlin J.B., Orszag S.A. Transition from periodic to chaotic thermal convection // J. Fluid Mech. 1982. V. 122. P. 123–142.
13. Kerr R.M. Rayleigh number scaling in numerical convection // J. Fluid Mech. 1996. V. 310. P. 139–179.
14. Никитин Н.В., Полежаев В.И. Трехмерные эффекты переходных и турбулентных режимов тепловой гравитационной конвекции в методе Чохральского // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 6. С. 81–90.
15. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
16. Гетлинг А.В. Нелинейная эволюция непрерывного спектра двумерных возмущений в задаче Бенара–Рэлея // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 2. С. 308–311.
17. Бабенко К.И., Рахманов А.И. Численное исследование двумерной конвекции. Препринт / ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша. 1988. № 118. 26 с.
18. Родичева О.В., Родичев Е.Б. О двумерной турбулентности в задаче Рэлея–Бенара // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 486–489.
19. Zienicke E., Seehafer N., Feudel F. Bifurcations in two-dimensional Rayleigh-Benard convection // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. № 1. P. 428–435.
20. Veronis G. Large-amplitude Benard convection // J. Fluid Mech. 1966. V. 26. Pt 1. P. 49–68.
21. Moore D.R., Weiss N.O. Two-dimensional Rayleigh-Benard convection // J. Fluid Mech. 1973. V. 58. Pt 2. P. 289–312.
22. Palymskiy I. Direct numerical simulation of turbulent convection // Progress in Computational Heat and Mass Transfer / ed. R. Bennacer, Lavoisier (Proc. 4th Intern. Conf. on Comput. Heat and Mass Transfer (ICCHMT2005). Paris, France, 2005. V. 1. P. 101–106.
23. Palymskiy I.B. Numerical investigation stochastic convection of chemically equilibrium gas // Proc. 2nd Intern. Conf. Applied Mech. and Mater (ICAMM 2003). Durban, South Africa, 2003. P. 145–150.
24. Malevsky A.V., Yuen D.A. Characteristics-based methods applied to infinite Prandtl number thermal convection in the hard turbulent regime // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3. № 9. P. 2105–2115.

25. Goldhirsch I., Pelz R.B., Orszag S.A. Numerical simulation of thermal convection in a two-dimensional finite box // *J. Fluid Mech.* 1989. V. 199. P. 1–28.
26. DeLuca E.E., Werne J., Rosner R., Cattaneo F. Numerical simulation of soft and hard turbulence: preliminary results for two-dimensional convection // *Phys. Rev. Letters.* 1990. V. 64. № 20. P. 2370–2373.
27. Werne J. Structure of hard-turbulent convection in two dimensions: Numerical evidence // *Phys. Rev. E.* 1993. V. 48. № 2. P. 1020–1035.
28. Lennie T.B., McKenzie D.P., Moore D.R., Weiss N.O. The breakdown of steady convection // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 188. P. 47–85.
29. Пальмский И.Б. Метод численного моделирования конвективных течений // *Вычисл. технологии.* 2000. Т. 5. № 6. С. 53–61.
30. Пальмский И.Б. Линейный и нелинейный анализ численного метода расчета конвективных течений // *Сиб. ж. вычисл. математики.* 2004. Т. 7. № 2. С. 143–163.
31. Farhadieh R., Tankin R.S. Interferometric study of two-dimensional Benard convection cells // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 66. Pt 4. P. 739–752.
32. Denton R.A., Wood I.R. Turbulent convection between two horizontal plates // *Intern. J. Heat and Mass Transfer.* 1979. V. 22. № 10. P. 1339–1346.
33. Rossby H.T. A study of Benard convection with and without rotation // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 36. Pt 2. P. 309–335.
34. Fitzjarrald D.E. An experimental study of turbulent convection in air // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 73. Pt 4. P. 693–719.
35. Garon A.M., Goldstein R.J. Velocity and heat transfer measurements in thermal convection // *Phys. Fluids.* 1973. V. 16. № 11. P. 1818–1825.
36. Chu T.Y., Goldstein R.J. Turbulent convection in a horizontal layer of water // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 60. Pt 1. P. 141–159.
37. Malkus W.V.R. Discrete transitions in turbulent convection // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1954. V. 225. № 1161. P. 185–195.
38. Neumann G. Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 214. P. 559–578.
39. Deardorff J.W., Willis G.E. Investigation of turbulent thermal convection between horizontal plates // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 28. Pt 4. P. 675–704.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
11.X.2006