

УДК 532.51:532.135

© 2007 г. О.Ю. ЦВЕЛОДУБ

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ НА ПЛЕНКЕ ОБОБЩЕННОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрено течение тонкой пленки обобщенной ньютоновской жидкости, стекающей по вертикальной стенке в поле тяжести. Для случая малых расходов в длинноволновом приближении получено уравнение, описывающее эволюцию возмущений поверхности. Фактически в зависимости от знаков коэффициентов это уравнение представляет собой четыре уравнения, у которых эволюционное поведение решений существенно различно. Численно найдены солитонные решения для наиболее интересного случая.

Ключевые слова: пленочное течение, обобщенная ньютоновская жидкость, эволюционное уравнение, солитонные решения.

Тонкие пленки жидкости, стекающие в поле тяжести, привлекают активное внимание исследователей уже более полувека. В частности, этот интерес вызван их широким использованием в различных технологических процессах.

В данной работе рассматривается течение пленки обобщенной ньютоновской жидкости по вертикальной стенке в поле тяжести. Для таких жидкостей реологическая связь между компонентами тензоров напряжений τ_{ik} и скоростей деформаций \mathbf{D}_{ik} имеет вид (например [1])

$$\tau_{ik} = \varphi(I_2)\mathbf{D}_{ik} \quad (0.1)$$

Компоненты тензора скоростей деформаций \mathbf{D}_{ik} определены как

$$\mathbf{D}_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$$

а $\varphi(I_2)$ – имеющая размерность коэффициента динамической вязкости некоторая скалярная функция от второго инварианта $I_2(v)$ тензора скоростей деформаций

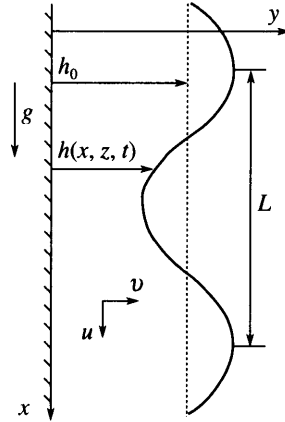
$$I_2(v) = \mathbf{D}_{ik}\mathbf{D}_{ki}$$

Здесь по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В частности, к моделям типа (0.1) относится одна из наиболее известных моделей нелинейно-вязких жидкостей – модель “степенной” жидкости

$$\tau_{ik} = 2\mu_n(2\mathbf{D}_{kl}\mathbf{D}_{kl})^{(n-1)/2}\mathbf{D}_{ik} \quad (0.2)$$

Эта модель достаточно хорошо описывает жидкости как с псевдопластическими, так и с дилатантными свойствами. Здесь постоянная μ_n – показатель консистенции жидкости, параметр n характеризует степень неньютоновского поведения. Чем сильнее n отличается от единицы, тем отчетливее проявляется аномалия вязкости в такой среде. Значениям $0 < n < 1$ отвечают псевдопластические жидкости, кажущаяся вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига. У дилатантных жидкостей значения $n > 1$, а кажущаяся вязкость растет с ростом скоростей сдвига.



Фиг. 1. Схема течения

Основная цель работы – получение модельного уравнения, позволяющего исследовать волновые режимы течения пленок жидкостей, реология которых может быть описана соотношением (0.1).

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение тонкой пленки обобщенной ньютоновской жидкости по вертикальной плоскости в поле тяжести. Схема течения и принятая система координат показана на фиг. 1.

Система уравнений Навье–Стокса и неразрывности, описывающая движение такой пленки, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \text{Div} \boldsymbol{\tau} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0$$

Здесь \mathbf{g} – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжений, $\text{Div} \boldsymbol{\tau}$ – дивергенция тензора напряжений. Реология жидкости моделируется законом (0.1).

При любых расходах жидкости задача (1.1) может иметь решения с плоской свободной поверхностью $h(x, z, t) = h_0$, удовлетворяющие условиям прилипания на твердой стенке и отсутствию касательных напряжений на свободной границе. В этом случае для профиля скорости течения имеем задачу

$$0 = \rho g + \frac{d}{dy} \left(\varphi(I_{20}) \left(\frac{dU}{dy} \right) \right) \quad (1.2)$$

$$I_{20} = 2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) можно один раз проинтегрировать

$$\varphi(I_{20}) \left(\frac{dU}{dy} \right) = \rho g (h_0 - y) \quad (1.4)$$

При получении (1.4) учтено, что на свободной поверхности касательные напряжения равны нулю

$$\varphi(I_{20})\left(\frac{dU}{dy}\right) = 0, \quad y = 1 \quad (1.5)$$

Для дальнейшего решения этой задачи нужно задаться конкретным видом функции $\varphi(I_{20})$. В случае степенного закона соответствующий профиль находится аналитически и приведен, например, в [2]. Пусть этот профиль найден и представлен в виде

$$U(y) = U_0 f\left(\frac{y}{h_0}\right), \quad f(1) = 1 \quad (1.6)$$

Здесь U_0 – скорость на свободной поверхности.

Однако как и в случае ньютоновской жидкости, уже при самых малых расходах это течение может быть неустойчиво к бесконечно малым возмущениям, а при дальнейшем их развитии – может стать волновым. Для описания таких режимов запишем уравнения движения в безразмерном виде. Пусть L – характерный продольный размер возмущения. Тогда, используя L/U_0 , U_0 как масштабы времени, скорости, $\varphi_{char} U_0/h_0$ – компонент тензора напряжений (φ_{char} – некоторое характерное значение функции $\varphi(I_{20})$) и $\rho g h_0$ – давления, а L и h_0 – масштабы в направлениях x , z и y соответственно, запишем уравнения движения для пленки в виде (знаки обезразмеривания опускаем)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{Fr} \left(1 - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{Fr} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) \\ \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon}{Fr} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Динамические граничные условия на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h(x, z, t)$) границах имеют вид

$$\begin{aligned} u = v = w = 0, \quad y = 0 \\ (p - p_0 - We(K_1 + K_2))n_i - \frac{Fr}{Re} \tau_{ik} n_k = 0, \quad y = h(x, z, t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь u , v , w – компоненты скорости вдоль осей x , y и z соответственно; p – давление в жидкости; p_0 – внешнее давление (без ограничения общности в дальнейшем его можно полагать равным нулю); n_i – компоненты вектора нормали

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2 + \varepsilon^2 h_z^2})(-\varepsilon h_x, 1, -\varepsilon h_z)$$

где K_i – безразмерные главные кривизны свободной поверхности

$$K_1 + K_2 = \frac{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)\varepsilon h_{zz} - 2\varepsilon^3 h_x h_z h_{xz} + (1 + \varepsilon^2 h_z^2)\varepsilon h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2 + \varepsilon^2 h_z^2)^{3/2}}$$

Здесь и ниже индексы у h означают дифференцирование по соответствующей переменной, τ_{ik} – безразмерные компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\varphi(I_2)\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{yy} &= 2\varphi(I_2)\frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{zz} &= 2\varphi(I_2)\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yz} = \varphi(I_2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right), & \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \varphi(I_2)\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \varphi(I_2)\left(\varepsilon\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (1.9)$$

где I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформаций

$$\begin{aligned}I_2 &= 4\left[\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \varepsilon^2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \\ &+ 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

В (1.7)–(1.9) в качестве параметров входят: $\varepsilon = h_0/L$, число Рейнольдса $Re = \rho h_0 U_0 / \varphi_{char}$, число Фруда $Fr = U_0^2 / (gh_0)$, число Вебера $We = \sigma / (\rho g h_0^2)$.

На свободной границе выполняется также кинематическое условие

$$\varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + w\frac{\partial h}{\partial z}\right) = v, \quad y = h(x, z, t) \quad (1.10)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинноволновых возмущений (т.е. будем полагать, что $\varepsilon \ll 1$), и будем считать, что числа Рейнольдса достаточно малы – $Re \sim 1$.

Для применения метода многих масштабов (например [3]) введем набор быстрых и медленных времен и новые функции

$$\begin{aligned}\tau_m &= \varepsilon^m t, \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ u &= U + \varepsilon u', \quad v = \varepsilon^2 v', \quad w = \varepsilon w', \quad p = p_0 + \varepsilon p', \quad h = 1 + \varepsilon h'\end{aligned}\quad (1.11)$$

Пренебрегая членами порядка ε^2 и выше и перенося граничные условия со свободной поверхности на ее невозмущенный уровень (т.е. разлагая все функции по степеням $\varepsilon h'$), приходим к системе (штрихи у возмущенных величин опускаем)

$$\begin{aligned}\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial \tau_0} + U\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{dU}{dy} + \frac{1}{Fr}\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\varphi_0 + 4\varphi_0'\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + \\ &+ \frac{\varepsilon}{Re}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left[\varphi_0'\left(6\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) + 8\varphi_0''\left(\frac{dU}{dy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{dU}{dy}\right)\right] \\ \frac{1}{Fr}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{Re}\left[\left(\varphi_0 + 4\varphi_0'\left(\frac{dU}{dy}\right)^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \varphi_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\end{aligned}\quad (1.12)$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial \tau_0} + U\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{Fr}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0\frac{\partial w}{\partial y}\right) + 4\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0'\frac{dU}{dy}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями

$$u = v = w = 0, y = 0$$

$$\left(\varphi_0 + 4\varphi_0' \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \left[\varphi_0' \left(6 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + 8\varphi_0'' \left(\frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \times \\ \times \left(\frac{dU}{dy} \right) + h \frac{d}{dy} \left(\varphi_0 \frac{dU}{dy} \right) + \varepsilon h \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\varphi_0 + 4\varphi_0' \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0, \quad y = 1 \quad (1.13)$$

$$p + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} h - We \varepsilon^2 \Delta h = 2 \frac{Fr}{Re} \varepsilon \left(\varphi_0 \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad y = 1$$

$$0 = \varphi_0 \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon \left[h \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 4\varphi_0' \frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right], \quad y = 1$$

Смысл функций φ_0 , φ_0' и φ_0'' поясняется в приложении. В условии (1.13) $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа. Здесь оставлены члены более высокого порядка по ε , так как для тонких пленок многих жидкостей значения We обычно велики, поэтому полагаем, что $We \gg 1$, $We \varepsilon^2 \sim 1$.

Кинематическое условие (1.10) теперь принимает вид

$$h_{\tau_0} + \varepsilon h_{\tau_1} + h_x + \varepsilon u h_x + \varepsilon w h_z = v + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} h, \quad y = 1 \quad (1.14)$$

Решение задачи (1.12)–(1.13) ищем в виде рядов по ε

$$(u, v, w, p, h) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m (u^m, v^m, w^m, p^m, h^m) \quad (1.15)$$

Приравнивая в исходной системе коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, приходим к более простым, чем задача (1.12), (1.13), системам, отвечающим разным порядкам ε . Действуя последовательно, из них нетрудно получить выражения для различных порядков возмущений u^m , v^m , w^m как функции h^m . Подставляя полученные данные в кинематическое условие (1.14), в итоге приходим к уравнению на возмущение толщины пленки. Краткая схема вывода этого уравнения дана в приложении. Так, из уравнений для нулевого порядка (П.2), (П.3) найдены u^0 , v^0 , w^0 (см. (П.4)).

Подставляя (П.4) в (1.14), получим уравнение, описывающее поведение возмущений в первом приближении

$$h_{\tau_0}^0 + c_0 h_x^0 = 0, \quad c_0 = 1 + \frac{Re}{Fr} \varphi_3(1) \quad (1.16)$$

Отсюда следует, что в этом приближении все возмущения распространяются с постоянной скоростью в c_0 раз большей скорости течения на свободной плоской границе, т.е.

$$h^0 = h^0(\xi), \quad \xi = x - c_0 \tau_0$$

Из очередного приближения для следующих членов рядов (1.15) получаются приведенные в приложении выражения (П.8).

2. Результаты. Подставляя (П.8) в кинематическое условие (1.14), получаем нелинейное уравнение для определения h^0

$$h_{\tau_1}^0 + 2\frac{\text{Re}}{\text{Fr}}Ah^0h_x^0 + \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}}Bh_{xx}^2 + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}\text{We}\varepsilon^2D(\Delta h_{xx}^0 + n\Delta h_{zz}^0) = 0$$

$$A = \varphi_2(1) - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(\varphi_3(1)\varphi_6(0) - \varphi_{13}(1)), \quad B = \varphi_{10}(1) - \varphi_3(1)\varphi_5(1) \quad (2.1)$$

$$D = \varphi_{11}(1) - \varphi_3(1), \quad n = \frac{\varphi_{12}(1)}{\varphi_{11}(1) - \varphi_3(1)}$$

Зная h^0 , остальные возмущенные величины в (1.15) до первого порядка включительно определяются из (П.4), (П.8).

Таким образом, уравнение (2.1) описывает эволюцию пространственных возмущений на вертикальной пленке обобщенной ньютоновской жидкости в системе отсчета, движущейся со скоростью c_0 относительно стенки.

Теперь можно конкретизировать выбор характерного продольного масштаба L . Потребуем, чтобы модули коэффициентов при третьем и четвертом слагаемых в уравнении (2.1) были равны. Тогда для используемого в разложении малого параметра ε имеем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\text{Re}|B|}{|D|\text{We}}} \quad (2.2)$$

и соответственно характерный продольный размер возмущений определяется равенством

$$L = \sqrt{\frac{|D|\text{We}}{\text{Re}|B|}}h_0$$

Как видно из этих соотношений, предположение о длинноволновости рассматриваемых возмущений будет выполняться, как и в случае ньютоновских жидкостей, для больших значений числа Вебера. Кроме того, отношение $|B|/|D|$ должно быть порядка единицы.

С учетом этого и с помощью замены

$$h = aH; \quad \tau = d\tau_1$$

$$a = \frac{2\text{Re}B}{A}, \quad d = \frac{\text{Re}^2B}{\text{Fr}} \quad (2.3)$$

уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sign}B\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \text{sign}D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + n\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – типичный пример модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. Фактически в зависимости от знаков коэффициентов оно представляет собой четыре разных уравнения.

Знаки в (2.4) можно определить только имея конкретный вид реологического соотношения (0.1). Отметим, что возможные типы плоских волн $H = H(x, \tau)$ для систем, описываемых уравнением (2.4), рассматривались в [4]. Там отмечено, что уравнение (2.4) наиболее интересно с точки зрения возможности реализации достаточно сложных волновых решений в случае, когда оба знака при второй и четвертой производных – поло-

жительны. Поэтому в настоящей работе остановимся на анализе некоторых волновых режимов задачи (2.4) только для этого случая.

Тогда для плоских возмущений уравнение (2.4) совпадает с уравнением, описывающим волны на поверхности ньютоновской пленки

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0 \quad (2.5)$$

В настоящее время это уравнение широко известно как уравнение Курамото – Сивашинского. Для описания пленочных течений оно впервые было получено в [5]. На сегодняшний день уравнение (2.5) достаточно подробно исследовано, известны многие его решения, например [6, 7].

Таким образом, в рамках используемых приближений, как следует из (2.5), в случае плоских возмущений для широкого класса обобщенных ньютоновских жидкостей, моделируемых реологическими зависимостями, волны будут похожи друг на друга. Реология влияет на их характерные скорости c_0 , а профили волн подобны друг другу и определяются параметрами в преобразовании (2.3), т.е. коэффициенты зависят от конкретного вида (0.1), но в рамках модели плоские волны “топологически” подобны – конкретные виды профилей волн для разных моделей могут быть получены друг из друга простым пересчетом.

В случае пространственных возмущений для разных моделей уравнение (2.4) содержит неприводимый к единичному значению параметр n . В результате решения для различных значений n и карты режимов могут существенно отличаться. Тем не менее структура уравнения достаточно универсальна. В частности, могут существовать различные модели с одинаковыми значениями параметра n .

При $n = 1$ (и когда оба знака при второй и четвертой производных – положительны) уравнение (2.4) переходит в уравнение из [8], описывающее пространственные волны для ньютоновской жидкости.

Отметим здесь, что для моделей степенных жидкостей знаки коэффициентов в (2.1) всегда положительны, а параметр n совпадает с n , содержащимся в показателе степени в соотношении (0.2). Для этих моделей уравнение (2.4) было получено в [2]. В ней было показано, что у уравнения (2.4) имеются решения, распространяющиеся под углом к направлению течения невозмущенного потока (к оси x). Действительно, делая преобразования

$$\xi_1 = a_1(x + b_1 z), \quad t_1 = a_1^2 \tau, \quad a_1^4 = 1/((1 + b_1^2)(1 + n b_1^2)), \quad H_1 = a_1 H(t_1, \xi_1)$$

приходим к уравнению (2.5). В результате имеем режимы в виде плоских волн, распространяющихся под углом ψ к оси x , тангенс которого удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg} \psi = b_1$. Таким образом, эти фактически одномерные решения получают простым пересчетом из решений уравнения (2.5).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением пространственных решений уравнения (2.4), бегущих вдоль потока.

В [2] проведен линейный анализ устойчивости тривиального решения $H = 0$, и было найдено, что оно неустойчиво относительно возмущений вида

$$\exp[i\alpha(x - c\tau) + i\beta z]$$

с компонентами волнового вектора (α, β) , лежащими внутри области, ограниченной нейтральной кривой

$$n\beta^4 + (n + 1)\alpha^2\beta^2 + \alpha^4 - \alpha^2 = 0 \quad (2.6)$$

Такие возмущения экспоненциально нарастают (а возмущения с волновыми числами, лежащими вне области, ограниченной кривой (2.6) – затухают). Дальнейший рост неустойчивых возмущений со временем обычно останавливается за счет действия нелинейных эффектов. В результате могут сформироваться установившиеся стационарно-бегущие режимы.

Для стационарно-бегущих решений

$$H = H(\xi, z), \quad \xi = x - ct \quad (2.7)$$

уравнение (2.4) (в случае, когда знаки при второй и четвертой производных положительны) переходит в

$$-c \frac{\partial H}{\partial \xi} + 4H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + n \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) инвариантно относительно преобразований

$$H \rightarrow H + \text{const}, \quad c \rightarrow c + 4 \text{const}$$

$$H \rightarrow -H, \quad c \rightarrow -c, \quad \xi \rightarrow -\xi$$

поэтому при рассмотрении симметричных по z решений $H(\xi, z) = H(\xi, -z)$ можно использовать условие нормировки

$$c \geq 0, \quad \int_0^{\lambda_z \lambda_\xi} \int_0^{\lambda_z \lambda_\xi} H(\xi, z) d\xi dz = 0; \quad \lambda_\xi = \frac{2\pi}{\alpha}, \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta}$$

Здесь α, β – волновые числа в ξ - и z - направлениях соответственно.

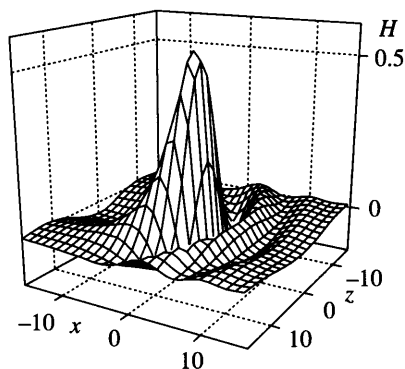
На плоскости (α, β) пространственные периодические решения уравнения (2.8) бесконечно малой амплитуды ответвляются от тривиального решения по нейтральной кривой (2.6). Характер ветвления этих решений исследован в [2]. Там аналитически найдены решения малой, но конечной амплитуды, существующие в окрестности этой кривой.

Для волновых чисел, лежащих в области неустойчивости достаточно далеко от нейтральной кривой (2.6), задачу нужно решать численно. Систематическое исследование требует проведения глобальных расчетов, так как необходимо проанализировать влияние трех параметров (n, α, β) на вид решений. Кроме того, на примере ньютоновской пленки жидкости ($n = 1$) известно, что существует счетное число семейств решений вида (2.7) (например [9, 10]). Поэтому в данной работе ограничимся только одним характерным примером – в качестве иллюстрации приведем для нескольких значений параметра n решение в виде уединенной волны, так называемым “подковообразным солитоном”.

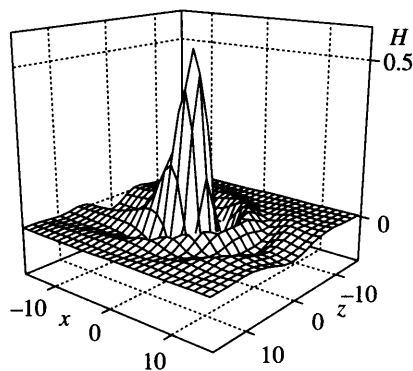
Для ньютоновской пленки жидкости такое решение впервые было найдено численно в [11]. Экспериментально такие режимы для ньютоновской жидкости, количественно хорошо совпадающие с теоретически рассчитанными в [11], получены в [12, 13].

При нахождении уединенных локализованных волн решение представляется в виде интеграла по фурье-гармоникам. В результате на эти гармоники получается интегральное уравнение, которое решалось итерациями. При этом для подавления счетной расходимости был использован модифицированный метод стабилизирующего множителя, который достаточно подробно описан в [14].

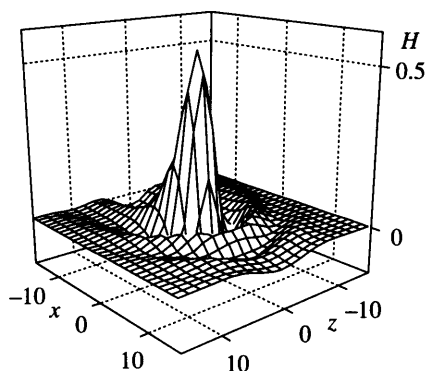
На фиг. 2–4 для различных значений параметра n представлены уединенные решения уравнения (2.8), рассчитанные этим методом. Как оказалось, влияние этого параметра на форму таких решений незначительно. Как и для ньютоновской жидкости, в случае обобщенной ньютоновской жидкости они имеют характерную подковообразную форму. На фиг. 5 для сравнения показан вид профилей с фиг. 2 и 3, построенных в трех раз-



Фиг. 2. Солитонное решение для $n = 3, c = 0.595$



Фиг. 3. Солитонное решение для ньютоновской жидкости ($n = 1$), $c = 0.6$

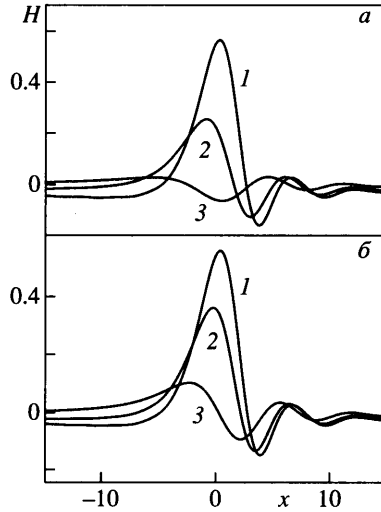


Фиг. 4. Солитонное решение для $n = 0.2, c = 0.588$

личных сечениях $z = \text{const}$. Стоит отметить, что чем меньше значение n , тем, как можно видеть, подковообразные солитоны более локализованы.

Их фазовая скорость – собственное число задачи. Спектр этих собственных значений – дискретен. Для представленных на этих рисунках одnogорбых солитонов он, по-видимому, состоит так же, как и для ньютоновской жидкости ([11]), из одного собственного значения. Так как при численном решении соответствующего интегрального уравнения интегралы представлялись в виде конечных сумм, данные здесь решения – фактически часть периодического решения с волновыми числами $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$. Эти значения волновых чисел задаются дискретным шагом интегрирования. Как показывают тестовые расчеты, при дальнейшем уменьшении этого шага форма решения практически не меняется, возрастают длины волн в направлениях x и z , соответственно увеличивается доля спокойных участков волны, на которых толщина пленки практически постоянна.

Заключение. Полученное уравнение можно использовать при моделировании волновых процессов в стекающих пленках для широкого класса реологических жидкостей – обобщенных ньютоновских жидкостей. Несмотря на единообразное представление, фактически это уравнение – четыре различных уравнения, отвечающие различным



Фиг. 5. Профили солитонов: $a - n = 1, c = 0.6$, $b - n = 3, c = 0.595$; $l - 3 - z = 0, 2.5\pi, 5\pi$

комбинациям знаков при второй и четвертых производных. Это означает, что в зависимости от конкретных реологических свойств жидкости поведение возмущений на их стекающих пленках будет существенно различным. На пленках, для которых в модельном уравнении оба знака положительны, должны существовать режимы в виде подковообразных солитонов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00183).

Приложение. При постановке задачи (1.12), (1.13) пренебрегалось членами высоких порядков по ϵ , а граничные условия со свободной поверхности переносились на ее невозмущенный уровень. В соответствии с этим, для второго инварианта тензора скоростей деформаций I_2 и функции $\varphi(I_2)$ от него имеем

$$I_2 = I_{20} + 4\epsilon \left(\frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\epsilon^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' \left[4\epsilon \frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} + 2\epsilon^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + 8\epsilon^2 \varphi_0'' \left(\frac{dU}{dy} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

Здесь $I_{20} = 2(dU/dy)^2$, $\varphi_0 = \varphi(I_{20})$, $\varphi_0' = \partial\varphi(I_2)/\partial I_2$ при $I_2 = I_{20}$, $\varphi_0'' = \partial^2\varphi(I_2)/\partial I_2^2$ при $I_2 = I_{20}$, т.е. значения функции $\varphi(I_2)$ и ее производных берутся при значении ее функционального аргумента, отвечающего плоскому течению пленки, описываемому постановкой (1.2)–(1.6). Все уравнения представлены в безразмерном виде, в частности, уравнение (1.2) теперь имеет вид

$$\frac{1}{Fr} + \frac{1}{Re} \frac{d}{dy} \left(\varphi(I_{20}) \left(\frac{dU}{dy} \right) \right) = 0; \quad U(1) = 1 \quad (\text{П.1})$$

Подставляя (1.15) в (1.12), (1.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ нулю, для нулевого порядка нетрудно получить выражения

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\varphi_0 + 4\varphi_0' \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right) \frac{\partial u^0}{\partial y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial p^0}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial z} = 0$$

с граничными условиями

$$u^0 = v^0 = w^0 = 0, \quad y = 0$$

$$\left(\varphi_0 + 4\varphi_0' \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \right) \frac{\partial u^0}{\partial y} + h^0 \frac{d}{dy} \left(\varphi_0 \frac{dU}{dy} \right) = 0, \quad y = 1 \quad (\text{П.3})$$

$$p^0 - \text{We}\varepsilon^2 \Delta h^0 = 0, \quad \varphi_0 \frac{\partial w^0}{\partial y} = 0$$

Решая задачу (П.2), (П.3), в результате для возмущенных величин этого порядка имеем выражения

$$u^0(x, y, z, t) = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \varphi_2 h^0, \quad v^0(x, y, z, t) = -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \varphi_3 h_x^0 \quad (\text{П.4})$$

$$w^0(x, y, z, t) = 0, \quad p^0 = \text{We}\varepsilon^2 \Delta h^0$$

Здесь и ниже для краткости описания используются функции

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 4\varphi_0' \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 \quad (\text{П.5})$$

$$\varphi_2 = \int_0^y \frac{dy}{\varphi_1(y)}, \quad \varphi_3 = \int_0^y \varphi_2(y) dy$$

При получении решения (П.4) полагалось, что функция φ_0 не обращается в ноль внутри интервала $0 < y < 1$ и интеграл φ_2 существует для всех точек из этого же интервала.

Из (1.12), (1.13) для следующего порядка по ε имеем систему

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^0}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial u^0}{\partial x} + v^0 \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^0}{\partial x} = \\ & = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_1 \frac{\partial u^1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(6\varphi_0' \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} \right)^2 + 8\varphi_0'' \left(\frac{dU}{dy} \frac{\partial u^0}{\partial y} \right)^2 \right) \left(\frac{dU}{dy} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^1}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial v^0}{\partial y} \right) \right]$$

$$\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^0}{\partial z} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w^1}{\partial y} \right)$$

$$\varphi_1(1) \frac{\partial u^1}{\partial y} + \left[6\varphi_0' \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} \right)^2 + 8\varphi_0'' \left(\frac{dU}{dy} \frac{\partial u^0}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{dU}{dy} - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} h^1 = 0, \quad y = 1 \quad (\text{П.7})$$

$$p^1 - \text{We}\varepsilon^2 \Delta h^1 = 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \varphi_0 \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad y = 1$$

$$\varphi_0 \frac{\partial w^1}{\partial y} = 0, \quad y = 1$$

Решая задачу (П.6) и (П.7), с учетом (1.16), (П.4), для возмущений в этом порядке имеем

$$\begin{aligned}
 w^1(x, y, z, t) &= \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 \varphi_4 \Delta h_z^0 \\
 h^1 &= \text{Re} \varphi_5(1) h_x^0 + \text{We} \varepsilon^2 \Delta h_x^2 + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \varphi_6(0) (h^0)^2 \\
 u^1(x, y, z, t) &= \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}} \varphi_7 h_x^0 + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \text{We} \varepsilon^2 \varphi_8 \Delta h_x^0 + \frac{\text{Re}^2}{\text{Fr}^2} \varphi_9 (h^0)^2 \\
 v^1(x, y, z, t) &= -\frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \left(\text{Re} \varphi_{10} h_{xx}^0 + \text{We} \varepsilon^2 (\varphi_{11} \Delta h_{xx}^0 + \varphi_{12} \Delta h_{zz}^0) + 2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \varphi_{13} h^0 h_x^0 \right)
 \end{aligned} \tag{П.8}$$

В (П.8) у возмущений h^1 , $v^1(x, y, z, t)$, $u^1(x, y, z, t)$ не приведены слагаемые, относительно которых кинематическое условие инвариантно. Функции φ_i в этих выражениях определяются так

$$\begin{aligned}
 \varphi_4 &= \int_0^y \frac{y-1}{\varphi_0(y)} dy, \quad \varphi_5 = \int_0^y \varphi_2 y (2U - c_0) dy - \varphi_3 U(y) \\
 \varphi_6(y) &= \left(6\varphi_0'(\varphi_2')^2 + 8\varphi_0'' \left(\frac{dU}{dy} \varphi_2' \right)^2 \right) \frac{dU}{dy} \\
 \varphi_7 &= \int_0^y \frac{\varphi_5(y)}{\varphi_1(y)} dy, \quad \varphi_8 = \int_0^y \frac{y dy}{\varphi_1(y)}, \quad \varphi_9 = \int_0^y \frac{\varphi_6(0) - \varphi_6(y)}{\varphi_1(y)} dy \\
 \varphi_{10} &= \int_0^y \varphi_7(y) dy, \quad \varphi_{11} = \int_0^y \varphi_8(y) dy, \quad \varphi_{12} = \int_0^y \varphi_4(y) dy, \quad \varphi_{13} = \int_0^y \varphi_9(y) dy
 \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 с.
2. Цвелодуб О.Ю., Шушеначев В.Ю. Волновые режимы на пленке нелинейно-вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости // ПМТФ. 2005. № 3. С. 73–84.
3. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
4. Цвелодуб О.Ю. Об эволюционном уравнении на возмущения в двуслойном пленочном течении // ПМТФ. 1990. № 2. С. 57–66.
5. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28–34.
6. Трифонов Ю.Я., Цвелодуб О.Ю. О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Препринт № 188–88. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988.
7. Tsvlodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya. On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. V. 34. P. 255–269.
8. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // Гидродинамика: Пермь. 1974. Вып. 5. С. 91–104.

9. Котыченко Л.Н., Цвелодуб О.Ю. Пространственные волновые режимы на поверхности тонкой вязкой пленки жидкости. Препринт № 252–91. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1991.
10. Tsvlodub O.Yu., Kotychenko L.N. Spatial wave regimes on the surface of a thin viscous liquid film // Physica D. 1993. V. 63. P. 361–377.
11. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // Докл. АН СССР. 1978. № 6. С. 1061–1063.
12. Алексеенко С.В., Антипин В. А., Гузанов В. В., Маркович Д.М., Харламов С.М. Стационарные уединенные трехмерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 2. С. 193–195.
13. Alekseenko S.V., Antipin V.A., Guzanov V.V., Markovich D.M., Kharlamov S.M. 3-d solitary waves on falling liquid film at low reynolds numbers // Physics Fluids. 2005. 17. 121704. 4p.
14. Цвелодуб О. Ю. Стационарно бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 142–143.

Новосибирск
Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН
Новосибирский государственный университет
tsvel@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию
27.IX 2006