

УДК 532.517:536.24

© 2007 г. Е.А. ВЕДЕНЕЕВА

**ДВУМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ МАГМЫ В КАНАЛЕ ВУЛКАНА,
УЧИТЫВАЮЩИЕ СЖИМАЕМОСТЬ МАГМЫ И ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ**

Рассмотрены две стационарные модели течения магмы в канале с учетом и без учета сжимаемости магмы. В отличие от работ [1–6], когда решались либо упрощенные уравнения, либо использовались значения параметров, несоответствующие реальным, в настоящей работе решаются полные системы уравнений и используются значения параметров, отвечающие течению магмы в канале вулкана. В случае, когда магма моделируется несжимаемой жидкостью, при учете всех членов в уравнениях, образование вторичных течений, полученных в [5] для модельных условий, не возникает. При учете сжимаемости магмы в изотермическом случае и при постоянной вязкости магмы течение в целом хорошо описывается одномерной изотермической моделью, хотя формально такой подход не применим.

Ключевые слова: сжимаемая вязкая жидкость, переменный коэффициент вязкости, вязкая диссипация, сопротивление канала, расход магмы, двумерное течение магмы.

Вулканические извержения представляют собой подъем расплавленной массы – магмы, находящейся в недрах Земли, на поверхность. На глубине нескольких километров под землей находится приповерхностный магматический очаг, в котором магма накапливается, а затем по каналу выбрасывается на поверхность, преодолевая действие силы тяжести. Магма содержит в себе растворенный газ, который при ее подъеме выделяется из расплава, образуя пузырьки. За счет наличия пузырьков магма является сжимаемой жидкостью. Вязкость магмы зависит от температуры и концентрации растворенного газа.

Большинство существующих моделей течения магмы в канале – одномерные: рассматриваются только средние по сечению значения величин [7–12]. При этом считается, что профиль скорости параболический и сопротивление канала вычисляются по формуле Пуазейля. Такое предположение формально неприменимо, если жидкость сжимаемая или ее вязкость непостоянна.

В [1–4] в предположении, что длина канала много больше его радиуса, построены упрощенные двумерные модели стационарного течения магмы. В [1, 2] рассматривается течение магмы, представляющей собой вязкую теплопроводную несжимаемую жидкость, в круглом цилиндрическом канале. Для вязкости магмы используется эмпирическая формула [13]. Показано, что при подъеме магмы по каналу вулкана за счет вязкой диссипации вблизи стенки образуется сильно разогретый слой жидкости, ширина которого мала вследствие малой теплопроводности магмы. В [3] аналогичные результаты получены в задаче о течении несжимаемой магмы в плоской щели для модельной экспоненциальной зависимости вязкости от температуры.

Учет двумерности и неизотермичности течения в [1, 2] показывает, что формула Пуазейля сильно завышает силу сопротивления канала, особенно при больших расходах магмы. Одна из важнейших характеристик вулканических извержений – расход магмы существенно зависит от силы сопротивления канала.

Обнаруженные в [1, 2] сильно разогретые слои магмы в узкой зоне около стенки объясняют одновременное образование во время одного и того же извержения [14, 15] разных типов пемз, часть из которых имеет признаки сильного разогрева и деформации.

ций. Однако в расчетах доля разогретой магмы много меньше, а ее температура – выше, чем реально наблюдаемые. Это можно объяснить тем, что под действием некоторых факторов вблизи стенки происходит перемешивание магмы.

Проведенные в [5] анализ устойчивости решения [3] задачи о течении магмы в трещине для модельных ее свойств и расчет по полным уравнениям показали, что около стенки канала могут возникать вторичные течения. Поэтому появилось предположение о возможности возникновения вторичных течений и в задаче [1, 2], когда рассматриваются реальные значения параметров: для вязкости магмы используется эмпирическая зависимость, канал моделируется круглым цилиндром, рассматривается характерная длина канала.

В [4] построена упрощенная двумерная модель течения магмы в канале, учитывающая ее сжимаемость. Изменением температуры магмы в этой модели пренебрегается. Аналитически получено, что профиль течения в такой постановке остается параболическим. В [6] задача [4] рассмотрена в полной постановке. Однако решение получено только для неестественно малой начальной концентрации газа, растворенного в магме, когда течение нужно считать сжимаемым только около выхода из канала, в зоне длиной порядка радиуса канала.

В настоящей работе построены две двумерные осесимметричные модели стационарного течения магмы в канале вулкана, в рамках которых исследуется влияние на течение вязкой диссипации, теплопроводности и сжимаемости магмы. В обеих моделях, в отличие от [1-6], для описания течения используются полные уравнения, а значения параметров отвечают реальному течению магмы в канале вулкана. В первой модели магма считается несжимаемой жидкостью с вязкостью, зависящей от температуры и концентрации растворенного в расплаве газа согласно эмпирической формуле. Во второй – учитывается сжимаемость магмы, рассмотрены два случая: изотермическое течение магмы и течение с постоянной вязкостью.

1. Математическая постановка задачи. Рассматривается стационарное двумерное осесимметричное течение магмы в круглом цилиндрическом канале. Движение происходит за счет перепада давления на входе и выходе из канала, преодолевая действие силы тяжести. Магма представляет собой вязкую теплопроводную многокомпонентную жидкость, состоящую из расплава, газа, растворенного в расплаве, и пузырьков газа. Плотность расплава считается постоянной, газ в пузырьках – совершенным. Вязкость магмы зависит от температуры и концентрации растворенного в расплаве газа. Температура изменяется за счет процессов вязкой диссипации и теплопроводности. Относительным движением фаз пренебрегается.

Полная система уравнений, описывающая такое течение, состоит из уравнения неразрывности (1.1), уравнений Навье–Стокса (1.2), (1.3) и уравнения притока тепла (1.4). В безразмерной форме в цилиндрических координатах эта система имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v) = 0 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v) = & -\frac{Eu}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \frac{2}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{2}{Re} \frac{1}{r^2} \mu w + \\ & + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v^2) = & -\frac{Eu}{2} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} + 2 \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{Fr^2} \rho \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w e) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v e) = - \frac{Eu Ec}{2} p \operatorname{div} v + \frac{Ec}{Re} \left(-\frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} v)^2 + \\
& + \frac{Ec}{Re} \mu \left(2 \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + 2 \frac{w^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \\
& + \frac{1}{Pe} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{Pe} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \\
\operatorname{div} v &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r w) + \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$Re = \frac{\rho_0 v_0 R}{\mu_0}, \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2 / 2}, \quad Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gR}}, \quad Ec = \frac{v_0^2}{c_{v0} T_0}, \quad Pe = \frac{\rho_0 v_0 R c_{v0}}{\kappa}$$

Здесь оси z и r направлены вдоль оси канала и по радиусу; w и v – радиальная и продольная составляющие скорости; ρ , p , μ , e и T – плотность, давление, вязкость, плотность внутренней энергии и приращение температуры магмы относительно заданной на входе в канал, соответственно; Re , Eu , Fr , Ec , Pe – числа Рейнольдса, Эйлера, Фруда, Эккерта и Пекле. Для получения безразмерных уравнений в качестве основных размерных величин были выбраны: R – радиус канала, v_0 – характерное значение скорости течения магмы, ρ_0 – плотность расплава, T_0 – температура магмы на входе в канал, которая считается постоянной во всем сечении, p_0 – гидростатическое давление на входе в канал при отсутствии в магме пузырьков с газом, c_{v0} – удельная теплоемкость расплава и μ_0 – вязкость магмы, отвечающая давлению p_0 и температуре T_0 . В выражения для безразмерных параметров также входят: g – ускорение силы тяжести, κ – коэффициент теплопроводности магмы.

Согласно определению p_0

$$p_0(1 - p_{out}) = \rho_0 g L R, \quad Eu = \frac{2}{Fr^2} \frac{L}{1 - p_{out}} \tag{1.5}$$

где p_{out} – безразмерное давление на выходе из канала, L – безразмерная длина канала.

Для динамической вязкости магмы μ используется эмпирическая зависимость [13], массовая концентрация растворенного газа в расплаве c определяется согласно равновесному закону растворимости

$$\begin{aligned}
\mu(c, T) &= \frac{10^{A(c, T)}}{\mu_0} \\
A(c, T) &= 0.291 + 0.833 \ln(c) - \frac{1304 + 2368 \ln(c)}{(T + 1)T_0 - (344.2 + 32.25 \ln(c))}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$c = c(p) = \min(c_0 \sqrt{p}, c_{max}), \quad c_0 = C_f \sqrt{p_0}$$

где c_{max} – концентрация газа в расплаве, при отсутствии в магме пузырьков, C_f – размерный коэффициент растворимости. Величина μ_0 определяется из соотношения: $\mu = 1$ при $p = 1, T = 0$.

При учете сжимаемости уравнение состояния магмы в безразмерных переменных имеет вид [16] (оно же используется в [4, 6])

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - c_{\max}}{1 - c} \frac{1}{\rho_m} + \frac{c_{\max} - c}{1 - c} \frac{1}{\rho_g} \quad (1.7)$$

$$\rho_m \equiv 1, \quad \rho_g = \rho_{g0} \frac{p}{T + 1}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_0}{\rho_0 R_g T_0}$$

где ρ_m – плотность расплава, ρ_g – плотность газа в пузырьках, R_g – газовая постоянная.

Поясним это уравнение. Предполагается, что для плотности магмы ρ выполнено соотношение

$$\rho = (1 - \alpha)\rho_m + \alpha\rho_g \quad (1.8)$$

где α – объемная доля пузырьков с газом в единице объема магмы. Рассмотрим одномерное течение магмы без массообмена между фазами в случае, когда скорости газа в пузырьках и расплава равны. Тогда из законов сохранения массы для расплава и газа для объемной доли, занятой пузырьками, следует формула

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1 - c_{\max}}{c_{\max} - c} \frac{\rho_g}{\rho_m} \quad (1.9)$$

Подставив (1.9) в (1.8), получим (1.7).

Внутренняя энергия сжимаемой магмы в безразмерных переменных определяется так

$$\rho e = (\rho_m(1 - \alpha)c_{Vm} + \rho_g\alpha c_{Vg})(T + 1), \quad c_{Vm} = 1, \quad c_{Vg} = \text{const} \quad (1.10)$$

где c_{Vm} и c_{Vg} – безразмерные теплоемкости расплава и газа в пузырьках при постоянном объеме. Подставляя (1.8), (1.9) в (1.10), для плотности внутренней энергии магмы получим

$$e = \varphi(p)(T + 1), \quad \varphi(p) = \frac{1 - c_{\max}}{1 - c(p)} c_{Vm} + \frac{c_{\max} - c(p)}{1 - c(p)} c_{Vg}, \quad c_{Vm} = 1 \quad (1.11)$$

Для несжимаемой магмы $\varphi(p) \equiv 1$.

На входе в канал задаются массовый расход магмы Q_m , параболический профиль скорости и температура магмы

$$z = 0: w(r, 0) = 0, \quad v(r, 0) = 2v_a(1 - r^2), \quad T(r, 0) = 0 \quad (1.12)$$

где v_a – средняя скорость течения на входе, которая связана с величиной Q_m соотношением

$$v_a = Q_m \left(2\pi \int_0^1 \rho(r, 0)(1 - r^2)r dr \right)^{-1} \quad (1.13)$$

Распределение плотности $\rho(r, 0)$ в случае сжимаемой магмы заранее неизвестно и находится в процессе решения.

На оси канала ставятся условия отсутствия источников массы и тепла и условия гладкости решения

$$r = 0: w(0, z) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r}(0, z) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(0, z) = 0 \quad (1.14)$$

На стенке канала выполнены условия прилипания для скорости и изотермичности для температуры (считается, что температура стенки такая же, как температура втекающей в канал магмы)

$$r = 1: w(1, z) = 0, \quad v(1, z) = 0, \quad T(1, z) = 0 \quad (1.15)$$

На выходе из канала считается, что радиальная компонента скорости отсутствует, в качестве граничных условий для продольной компоненты скорости и давления задается значение нормальной компоненты тензора напряжений, изменением температуры вдоль z пренебрегается

$$z = L: w(r, L) = 0, \quad p^{zz}(r, L) = \text{const} = -p_{\text{out}}, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(r, L) = 0 \quad (1.16)$$

Согласно определению p^{zz} , учитывая что $w(r, L) = 0$, предпоследнее условие преобразуется к виду

$$\left(p - \frac{2}{\text{EuRe}} \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) (r, L) = p_{\text{out}} \quad (1.17)$$

В уравнения, описывающие течение, входят 11 безразмерных параметров: $Q_m, L, \text{Re}, \text{Fr}, \text{Ec}, \text{Pe}, \rho_{g0}, c_{\text{max}}, c_0, c_{Vg}, p_{\text{out}}$. Независимы из них только 10. При обезразмеривании уравнений наряду с массовым расходом, для удобства представления результатов, была введена характерная скорость течения v_0 . Это привело к появлению лишнего безразмерного параметра Q_m , от которого можно избавиться, если в качестве характерной скорости течения использовать $v_0(Q_m/\pi)$. Тогда, вместо соответствующих величин, в уравнения вошли бы

$$\text{Re}^* = \text{Re} \frac{Q_m}{\pi}, \quad \text{Fr}^* = \text{Fr} \frac{Q_m}{\pi}, \quad \text{Ec}^* = \text{Ec} \left(\frac{Q_m}{\pi} \right)^2, \quad \text{Pe}^* = \text{Pe} \frac{Q_m}{\pi}$$

В предположении, что длина канала много больше его радиуса, а течение достаточно медленное ($\epsilon = 1/L \ll 1, \text{Re} \lesssim 1/\epsilon = L$ – для реальных вулканов эти условия выполнены), система уравнений (1.1)–(1.4) в первом приближении по малому параметру ϵ принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) = 0$$

$$p(r, z) = p(z), \quad \frac{dp}{dz} = \frac{2}{\text{EuRe}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{2}{\text{EuFr}^2} \rho \quad (1.18)$$

$$\rho w \frac{\partial e}{\partial r} + \rho v \frac{\partial e}{\partial z} = - \frac{\text{EuEc}}{2} p \text{div} v + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\text{Pe}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Для течения несжимаемой жидкости система, соответствующая (1.18), была получена и решена в [1, 2]; для вязкости магмы использовалась формула (1.6), задача решалась с граничными условиями (1.12), (1.14), (1.15), на выходе из канала задавалось давление. В разд. 3 проведено сравнение с результатами этих работ.

Сформулируем модели течения магмы в канале вулкана. В модели I магма считается несжимаемой жидкостью. Пренебрегается плотностью газа в пузырьках и объемом, ими занимаемым, по сравнению с плотностью расплава и объемом, занятым расплавом: $\rho = \rho_m = 1$ и $\alpha \equiv 0$. Тогда $v_a = Q_m/\pi$, теплоемкость магмы $c_V = c_{Vm} = 1, \varphi(p) \equiv 1$.

Считая, что уравнение неразрывности (1.1) выполнено на границе области $z = L$, условия на выходе из канала (1.16), (1.17) принимают вид:

$$z = L: w(r, L) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z}(r, L) = 0, \quad p(r, L) = p_{\text{out}}, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(r, L) = 0 \quad (1.19)$$

Решается система уравнений (1.1)–(1.4), (1.6), (1.11) с граничными условиями (1.12), (1.14), (1.15), (1.19).

Учет влияния сжимаемости рассмотрен в модели II в двух случаях. В первом случае (II а) пренебрегается изменением температуры магмы и считается, что $T = 0$ во всей области течения. Решается система уравнений (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), которая в этом случае является замкнутой, с граничными условиями для w , v , p из (1.12)–(1.17). Во втором случае (II б) вязкость магмы считается постоянной: $\mu = \mu(c(1), 0)$. Решается система уравнений (1.1)–(1.4), (1.7), (1.11) с граничными условиями (1.12)–(1.17).

2. Метод решения. Задача решалась численно методом контрольного объема, для решения дискретных аналогов уравнений использовался алгоритм SIMPLER [17, 18]. Расчеты проводились на сетках: 52×2502 , 72×2502 , 202×5002 контрольных объемов (приведено количество контрольных объемов по осям $r \times z$). Использовалось равномерное разбиение вдоль оси z и сильно сгущающееся в области около стенки канала – вдоль оси r . Считалось, что сходимость итераций достигнута, если совместно выполнены два условия: изменения всех искомых величин во всех узловых точках на текущей и предыдущей итерациях не превышают числа порядка 10^{-6} – 10^{-7} , невязки решаемых уравнений во всех узловых точках не превышают числа порядка 10^{-5} – 10^{-6} . Кроме того, проверялось выполнение интегральных законов сохранения для объемов, представляющих собой канал неполной длины.

Тестирование численной схемы осуществлялось на течениях несжимаемой жидкости в предположении, что радиальная компонента скорости отсутствует. Рассматривались случаи постоянной вязкости (течение Пуазейля) и вязкости, заданной аналитически в виде функции от координат. В этих случаях уравнения (1.1)–(1.3) образуют замкнутую систему без уравнения (1.4) и имеют аналитические решения. Полученные численно распределения скорости и давления полностью совпадают с аналитическими. Соответствующие поля температуры были найдены численно в рамках упрощенной и полной модели, они совпадают между собой с точностью до $5 \cdot 10^{-2}$.

Рассматриваемая задача обладает рядом особенностей: расчетная область – канал вулкана представляет собой очень узкий цилиндр, характерное значение отношения длины канала к его радиусу – 200, вязкость магмы зависит от давления и температуры, вблизи стенки образуется очень узкий слой жидкости с высокой температурой, вязкость в этом слое меняется более чем на два порядка. В связи с этим для решения задачи требуется использовать очень мелкий шаг разбиения в пристеночной области, что, в свою очередь, ограничивает величину шага вдоль канала и приводит к большому количеству расчетных узлов. Вследствие вышесказанного, задачу о течении сжимаемой магмы с реальной зависимостью для вязкости без дополнительных предположений решить не удалось, так как скорость сходимости итераций в этом случае очень низкая и для выполнения расчетов требуется слишком продолжительное время. Поэтому были рассмотрены два случая (модели II а, II б), когда задача упрощается.

3. Результаты расчетов. Ниже приведены результаты расчетов для характерных для течения магмы в канале вулкана значений параметров:

$$R = 25 \text{ м}, \quad L' = 5000 \text{ м}, \quad Q'_m = 2.45 \cdot 10^6 \text{ кг/с}, \quad v_0 = 1.0 \text{ м/с}$$

$$\rho_0 = 2500 \text{ кг/м}^3, \quad T_0 = 1123 \text{ К}, \quad p_0 = 132.5 \text{ МПа}$$

$$c_{V0} = 1200 \text{ Дж/(кг К)}, \quad c'_{Vg} = 1460 \text{ Дж/(кг · К)}, \quad R_g = 462.0 \text{ Дж/(кг · К)}$$

$$\mu_0 = 3.19 \cdot 10^4 \text{ Па с}, \quad c_{\max} = 0.05, \quad C_f = 4.1 \cdot 10^{-6} \text{ Па}^{1/2}$$

$$g = 9.8 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad \kappa = 0.8 \text{ Дж/(м с К)}, \quad p'_{\text{out}} = 10 \text{ МПа}$$

штрихами отмечены размерные значения соответствующих величин.

Этим значениям отвечают безразмерные параметры:

$$L = 200, \quad Q_m = 1.57, \quad p_{\text{out}} = 0.075$$

$$\text{Re} = 1.96, \quad \text{Fr} = 6.39 \cdot 10^{-2}, \quad \text{Ec} = 7.42 \cdot 10^{-7}, \quad \text{Pe} = 9.375 \cdot 10^7$$

$$c_{\max} = 0.05, \quad c_0 = 4.72 \cdot 10^{-2}, \quad \rho_{g0} = 0.1, \quad c_{Vg} = 1.22$$

$$\text{Eu} = 1.06 \cdot 10^5$$

Рассмотрим сначала результаты расчетов по модели I (магма – несжимаемая жидкость). Массовому расходу $Q_m = 1.57$ соответствует средняя скорость течения $v_a = 0.5$. Расчеты для средней скорости течения $v_a = 1.0, 2.0, 3.0$ показали, что характер течения для них аналогичен случаю со скоростью $v_a = 0.5$ и поэтому не приводятся.

Изменение вязкости магмы происходит за счет двух конкурирующих процессов. При подъеме магмы по каналу на поверхность давление в ней падает, следовательно, согласно (1.6), уменьшается концентрация растворенного в магме газа и ее вязкость увеличивается. С другой стороны, за счет вязкого трения происходит выделение тепла. Наиболее интенсивно этот процесс происходит около стенок канала, где велики градиенты скорости (фиг. 1, а, б). Передача тепла от стенок к центральной части канала за счет теплопроводности при рассматриваемых значениях параметров незначительна. Таким образом, около стенок канала образуется узкий разогретый слой жидкости, температура в котором растет по мере приближения магмы к поверхности. За счет роста температуры вязкость жидкости уменьшается (1.6), около стенок канала образуется “смазочный” слой жидкости с малой вязкостью. Вследствие этого параболический профиль скорости, заданный на входе в канал, ближе к выходу становится все более плоским, приближаясь к прямоугольному профилю, соответствующему течению идеальной жидкости (фиг. 1, б, в).

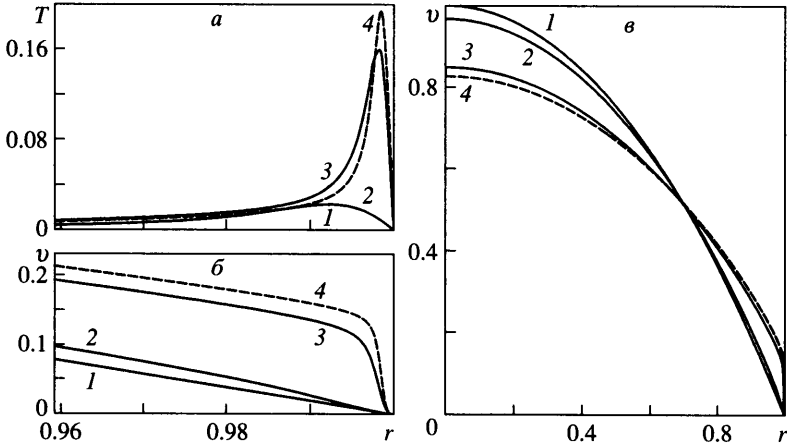
На фиг. 1 для сечения $z = (3/4)L$ кривые, полученные в рамках упрощенной модели [1, 2], совпадают с кривыми, отвечающими полной модели, так что неразличимы на графиках. Радиальная составляющая скорости w мала, она не превосходит 10^{-3} .

В силу граничных условий на стенке (1.15)

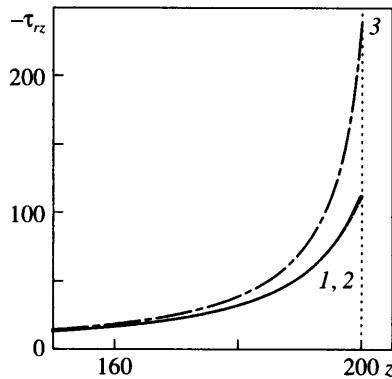
$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \tau_{rz}|_{r=1} = \mu(c(p), 0) \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=1}$$

где τ_{rz} – компонента тензора вязких напряжений. При подъеме магмы ее вязкость на стенке канала увеличивается за счет падения давления, это ведет к росту сопротивления. Абсолютное значение градиента скорости, напротив, уменьшается, так как вблизи стенки вязкость магмы падает вследствие ее разогрева; сопротивление падает. На выходе из канала процесс уменьшения сопротивления становится преобладающим, особенно для больших расходов магмы (фиг. 2).

В случае одномерной изотермической модели течения профиль скорости предполагается параболическим, и сила сопротивления вычисляется по формуле: $\tau_{rz} = -4 v_a \mu$, как



Фиг. 1. Модель I: распределения температуры T (а) и вертикальной компоненты скорости v (б, в) при: $z = 0, (3/4)L, L$ (кривые 1–3). Кривые 4 – упрощенная модель [1, 2] при $z = L$



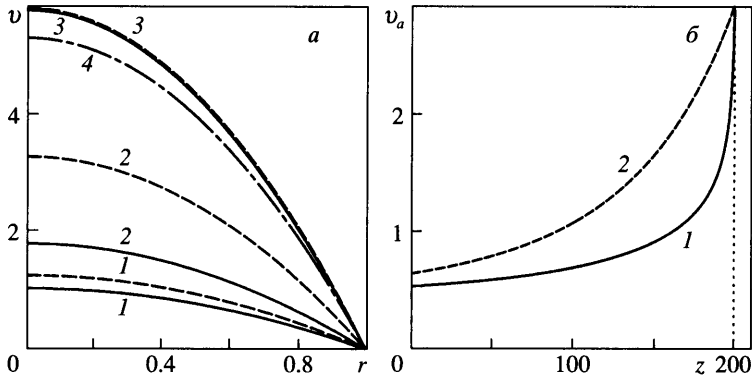
Фиг. 2. Модель I: зависимость сопротивления канала $\tau_{rz}(1, z)$. Кривая 1 – полная, 2 – упрощенная [1, 2], 3 – одномерная изотермическая модели

для течения с постоянной вязкостью – течения Пуазейля. Соответственно расчет сопротивления стенок канала по одномерной изотермической модели сильно завышает реальное его значение.

Получено, что давление поперек канала не меняется (его изменение не превосходит погрешности вычислений). Изменения давления вдоль канала по полной и упрощенной моделям совпадают с точностью до $2 \cdot 10^{-4}$.

Проведенные расчеты показывают, что решения, полученные по полной и упрощенной моделям, хорошо совпадают друг с другом. Учет всех членов исходных уравнений не приводит к выявлению новых физических эффектов при значениях параметров, отвечающих течению магмы в канале вулкана. Стационарные вторичные течения, аналогичные [5], в решении полной задачи (фиг. 1, 2) не возникают. Количественное несовпадение результатов расчетов в [1, 2] и полевых наблюдений [14, 15], таким образом, не связано с возникновением стационарных вторичных течений.

Перейдем к рассмотрению результатов расчетов по модели II течения магмы в канале, когда учитывается ее сжимаемость. Профиль скорости течения при расчетах по обе-



Фиг. 3. Распределение вертикальной компоненты скорости v : при $z = 0$, $(3/4)L$, L (а, кривые 1–3), кривая 4 – по одномерной изотермической модели при $z = L$. Изменение средней скорости течения v_a по оси z (б). Сплошные кривые – модель Па, штриховые – Пб

им моделям Па, Пб – параболический (с точностью до $2 \cdot 10^{-3}$), средняя скорость течения растет вниз по потоку (фиг. 3). Компонента скорости w , направленная по радиусу, не превосходит 10^{-2} в обоих случаях.

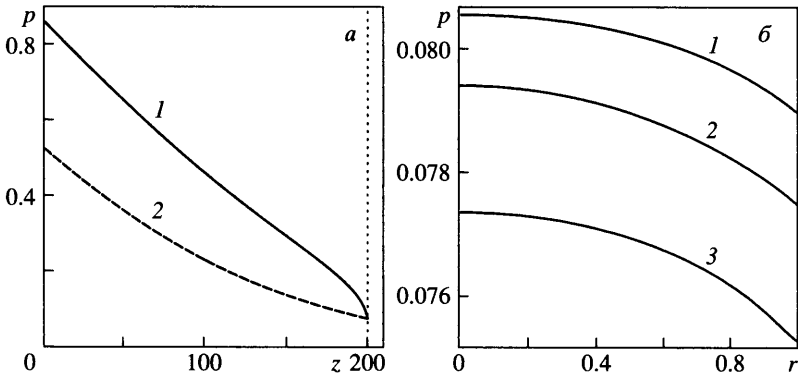
Из упрощенных уравнений импульсов (1.18) для изотермического течения жидкости аналитически следует, что профиль течения всегда является параболическим. Для случая течения жидкости с единственной ненулевой компонентой скорости по оси канала этот вывод получен в [4]. Расчеты хорошо соответствуют этому аналитическому результату, что еще раз подтверждает работоспособность численной схемы.

Из расчетов получено, что изменение давления поперек канала мало. Наиболее сильно поперек канала давление меняется на выходе, где сказывается действие граничного условия (1.17). Кривые давления для изотермического течения (Па) приведены на фиг. 4, б.

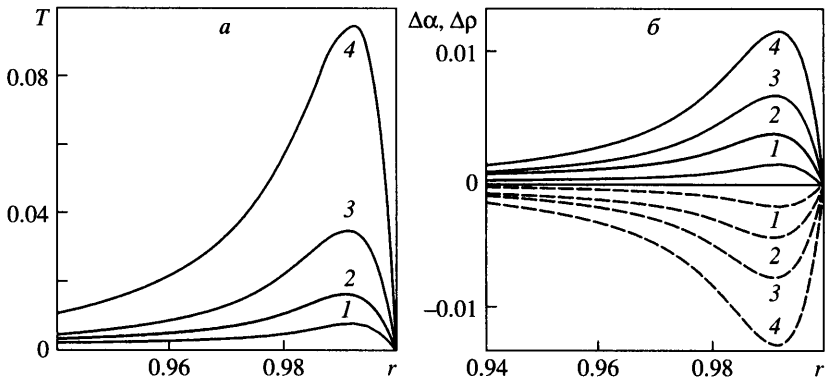
Из (1.17) следует, что в выходном сечении давление на стенке канала равно p_{out} , в силу выполнения условия прилипания, и минимально, так как скорость течения при подъеме магмы растет (фиг. 3). Рост скорости течения максимален на оси канала, поэтому значение давления здесь максимальное. В случае неизотермического течения с постоянной вязкостью (Пб) давление поперек канала не меняется с точностью до 10^{-5} , так как условие (1.17) влияет на течение слабее в силу того, что вязкость магмы не зависит от давления.

В случае изотермического течения (Па) вдоль радиуса канала r плотность магмы ρ и объемная доля пузырьков в магме α не меняются с точностью до 10^{-3} , так как являются только функциями давления, согласно (1.7), (1.9), а давление поперек канала меняется мало. В случае неизотермического течения с постоянной вязкостью (Пб) изменение этих величин поперек канала происходит вблизи стенки из-за роста температуры в этой области (фиг. 5, а) за счет вязкого трения. Рост температуры приводит к падению плотности газа в пузырьках и увеличению объема, ими занимаемого, плотность магмы в целом в этой области падает (фиг. 5, б).

Проанализируем полученные результаты. По мере продвижения магмы к поверхности давление в магме падает (фиг. 4, а). За счет падения давления объемная доля пузырьков в магме растет, а плотность газа в пузырьках уменьшается, падает плотность магмы в целом (фиг. 6). Это вызывает рост скорости течения, так как на входе в канал задан постоянный массовый расход (фиг. 3). Соответственно растет сопротивление стенок канала (фиг. 7). В случае (Па) изотермического течения с вязкостью, зависящей от



Фиг. 4. График давления $p(0, z)$ (а): кривые 1, 2 – модели Па, Пб. Профили давления по сечениям канала (б): $z = 0.999L, 0.9994L, 1L$ (кривые 1–3) для Па

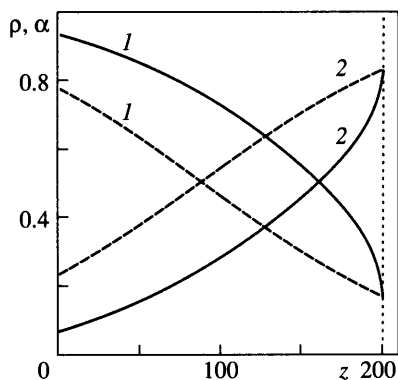


Фиг. 5. Модель Пб: распределения температуры $T(r, z)$ (а), изменения плотности $\Delta\rho(r, z) = \rho(r, z) - \rho(0, z)$ (штриховые кривые) и объемной доли пузырьков $\Delta\alpha(r, z) = \alpha(r, z) - \alpha(0, z)$ (сплошные) по радиусу r в пристеночной области (б) при: $z = L/4, L/2, (3/4)L, L$ (кривые 1–4)

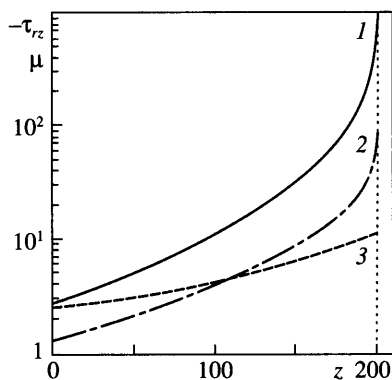
давления, падение давления влияет и на вязкость магмы: по мере подъема магмы ее вязкость увеличивается (1.6). Это приводит к еще большему росту сопротивления стенок канала.

С другой стороны, падение плотности магмы при подъеме по каналу уменьшает величину силы тяжести. Для неизотермического течения с постоянной вязкостью (Пб) перепад давления, обеспечивающий течение на отрезке канала фиксированной длины, уменьшается при подъеме магмы (фиг. 4, а), так как снижение необходимого перепада давления за счет снижения веса преобладает над его увеличением за счет роста сопротивления. В случае, когда вязкость магмы меняется (Па), преобладающую роль при воздействии на давление имеет процесс увеличения сопротивления стенок канала.

Полученные решения сравним с результатами расчетов по одномерной изотермической модели течения, когда сопротивление стенок канала вычисляется по формуле Пуазейля. Плотность магмы при этом – функция только давления, согласно (1.7). Вязкость магмы полагается зависящей от давления согласно (1.6), при сопоставлении с результатами расчетов Па, и постоянной: $\mu \equiv 1$, при сравнении с результатами расчетов по Пб. Для одномерной модели давление задано не на выходе из канала, а на входе, и оно равно соответствующему давлению, полученному в полной модели.



Фиг. 6. Зависимости плотности $\rho(0, z)$ (кривые 1) и объемной доли пузырьков $\alpha(0, z)$ (2). Сплошные кривые – модель Па, штриховые – Пб



Фиг. 7. Зависимости сопротивления канала $\tau_{rz}(1, z)$ (1, 3) и вязкости магмы на стенке канала $\mu(1, z)$ (2): кривые 1, 2 – модель Па, кривая 3 – Пб ($\mu(r, z) \equiv 1$)

Полученные так кривые совпадают с соответствующими кривыми на фиг. 3, 4а, 6, 7 с точностью до $2 \cdot 10^{-3}$, за исключением кривой 4 на фиг. 3, а – распределения продольной компоненты скорости v на выходе из канала ($z = L$) в случае вязкости, зависящей от давления (Па). Таким образом, одномерная изотермическая модель течения хорошо описывает решения, полученные в рамках модели П, если не рассматривать детали поведения решений на выходе из канала и вблизи стенки, которые не влияют на характер течения в целом.

Заключение. Результаты расчетов течения магмы в канале вулкана по двумерной, осесимметричной неизомермической модели сравнивались с расчетами по упрощенной модели, получающейся предельным переходом при стремлении отношения длины канала к его радиусу к бесконечности.

Показано, что в случае когда магму можно считать несжимаемой жидкостью, с вязкостью зависящей от температуры, результаты расчетов по полной и упрощенной моделям практически совпадают. Возникновение вторичных стационарных течений, полученное в [5] для модельных условий, для реальных условий подъема магмы не происходит. Учет двумерности и неизомермичности течения показывает, что формула Пуазейля, используемая в одномерных моделях, завышает силу сопротивления канала, особенно при больших расходах магмы.

При учете сжимаемости магмы в неизотермических течениях с постоянной вязкостью профиль скорости остается близким к параболическому, и формула Пуазейля хорошо описывает сопротивление канала, хотя формально и не применима. Одномерная изотермическая модель хорошо согласуется с полной при описании течения в целом, хотя не учитывает детали поведения течения в узкой зоне около стенки канала и вблизи его выхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00228) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4710.2006.1).

Автор благодарит А.А. Бармина и О.Э. Мельника за внимание и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А.А., Веденева Е.А., Мельник О.Э. Неизотермическое течение сильновязкой магмы в канале вулкана с учетом влияния вязкой диссипации // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 21–32.
2. Vedeneva E.A., Melnik O.E., Barmin A.A., Sparks R.S.J. Viscous dissipation in explosive volcanic eruptions // *Geophys. Research Letters*. 2005. V. 32. № 5. L05303. 10.1029/2004GL020954.
3. Costa A., Macedonio G. Viscous heating in fluids with temperature-dependent viscosity: implications for magma flows // *Nonlinear Processes Geophys.* 2003. V. 10. № 6. P. 545–555.
4. Massol H., Jaupart C. The generation of gas overpressure in volcanic eruptions // *Earth and Planetary Science Letters*. 1999. V. 166. № 1–2. P. 57–70.
5. Costa A., Macedonio G. Viscous heating effects in fluids with temperature-dependent viscosity: triggering of secondary flows // *J. Fluid Mech.* 2005. V. 540. P. 21–38.
6. Massol H., Jaupart C., Pepper D.W. Ascent and decompression of viscous vesicular magma in a volcanic conduit // *J. Geophys. Research*. 2001. V. 106. № B8. P. 16223–16240.
7. Слезин Ю.Б. Динамика дисперсионного режима вулканических извержений, 2. Условие неустойчивости расхода и природа катастрофических эксплозивных извержений // *Вулканология и сейсмология*. 1984. № 1. С. 23–35.
8. Sparks R.S.J., Bursik M.I., Carey S.N., Gilbert J.S., Glaze L., Sigurdsson H., Woods A.W. *Volcanic Plumes*. Chichester: Wiley, 1997. P. 550.
9. Wilson L., Sparks R.S.J., Walker G.P.L. Explosive volcanic eruptions – IV. The control of magma properties and conduit geometry on eruption column behaviour // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1980. V. 63. № 1. P. 117–148.
10. Woods A.W. The dynamics of explosive volcanic eruptions // *Rev. Geophysics*. 1995. V. 33. № 4. P. 495–530.
11. Бармин А.А., Мельник О.Э. Об особенностях динамики извержения сильновязких газонасыщенных магм // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 49–60.
12. Woods A.W., Koyaguchi T. Transitions between explosive and effusive eruptions of silicic magmas // *Nature*. 1994. V. 370. № 6491. P. 641–644.
13. Hess K.U., Dingwell D.B. Viscosities of hydrous leucogranite melts: a non-Arrhenian model // *Amer. Mineralogist*. 1996. V. 81. № 7. P. 1297–1300.
14. Rosi M., Landi P., Polacci M., Di Muro A., Zandomeneghi D. Role of conduit shear on ascent of the crystal-rich magma feeding the 800-year-b.p. Plinian eruption of Quilotoa Volcano (Ecuador) // *Bull. Volcanology*. 2004. V. 66. № 4. P. 307–321.
15. Polacci M., Papale P., Rosi M. Textural heterogeneities in pumices from the climactic eruption of Mount Pinatubo, 15 June 1991, and implications for magma ascent dynamics // *Bull. Volcanology*. 2001. V. 63. № 2–3. P. 83–97.
16. Jaupart C., Tait S. Dynamics of eruptive phenomena // *Rev. Mineralogy and Geochemistry*. 1990. V. 24. P. 213–238.
17. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. N. Y.: Hemisphere, 1980. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М: Энергоатомиздат, 1984. 150 С.
18. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2002. 423 p.