

УДК 532.517.532.546

© 2007 г. А.В. ЗВЯГИН, О.Е. ИВАШНЕВ, О.А. ЛОГВИНОВ

О ВЛИЯНИИ МАЛЫХ ПАРАМЕТРОВ НА СТРУКТУРУ ФРОНТА НЕУСТОЙЧИВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ЯЧЕЙКИ ХЕЛЕ-ШОУ

Исследуется процесс вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу, которая представляет собой две пластины, разделенные малым зазором. Фронт вытеснения вязкой жидкости из ячейки другой, менее вязкой, неустойчив. Менее вязкая жидкость прорывается через слой вытесняемой: образуя в ней каналы, называемые вязкими языками. В результате образуется область – зона смешения, в которой находятся как вытесняемая, так и вытесняющая жидкости. Исследуется структура фронта неустойчивого вытеснения, когда силы поверхностного натяжения не влияют на форму языков. Такая ситуация реализуется при скоростном вытеснении водоглицериновой смеси водой из ячейки.

Путем осреднения уравнений Навье–Стокса по зазору ячейки получены уравнения, учитывающие силы инерции и силы вязкости, действующие в плоскости пластин. С помощью полученных уравнений исследованы устойчивость плоского фронта вытеснения, движущегося по своей нормали, и устойчивость боковых поверхностей вязких языков, когда скорости жидкостей параллельны границе раздела. Из решения об устойчивости поперечного фронта вытеснения следует, что (в случае отсутствия поверхностного натяжения) ширину языков определяют вязкие силы, действующие в плоскости пластин.

На продольной границе жидкостей при ее обтекании также развивается неустойчивость. Дестабилизирующим фактором здесь являются силы инерции. Под действием этой неустойчивости языки, в свою очередь, теряют устойчивость и разрушаются на вязкие пузырьки.

Ключевые слова: ячейка Хеле-Шоу, неустойчивое вытеснение, вязкий язык.

1. Гипотеза о влиянии малых параметров на структуру фронта неустойчивого вытеснения. Впервые, форма вязкого языка была рассчитана в [1]. Использовалась модель Хеле-Шоу [2], состоящая из уравнения неразрывности и полуэмпирического закона Дарси:

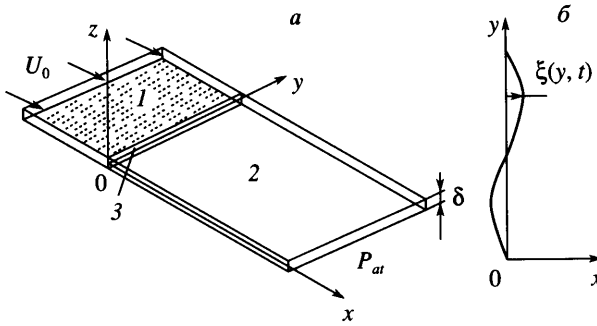
$$\nabla W = 0, \quad \nabla P = -\frac{12\mu}{\delta^2} W \quad (1.1)$$

где: $W = iu + jv$, P , μ – вектор скорости, давление и коэффициент динамической вязкости жидкости; δ – зазор между пластинами ячейки.

На границе жидкостей $x = \xi(t, y)$ ставились условия равенства давлений и нормальных составляющих скорости:

$$x = \xi(t, y): P_1 = P_2, \quad W_{1n} = W_{2n} \quad (1.2)$$

Из решения задачи не удалось определить ширину языка, которая в полученную формулу входит как свободный параметр. Основываясь на проведенных авторами [1] экспериментах, было предложено считать, что ширина языка равна половине ширины ячейки Хеле-Шоу. Однако многочисленные последующие эксперименты опровергли это предположение.



Фиг. 1. Схема вытеснения из ячейки Хеле-Шоу: 1 – вытесняющая жидкость; 2 – вытесняемая; 3 – фронт вытеснения (а); отклонения фронта (б)

Оценим ширину вязких языков из анализа начальной стадии их формирования, используя ту же, классическую, постановку задачи о вытеснении (1.1), (1.2). На удалении от фронта вытеснения потребуем затухания возмущений

$$x \rightarrow \pm: W_j = iU_0, \quad U_0 = \text{const} \quad (1.3)$$

где: $j = 1, 2$ – номер жидкости: “1” – вытесняющая, “2” – вытесняемая (фиг. 1, а).

Линеаризуя граничные условия (1.2) и “снося” возмущения на невозмущенное положение границы раздела жидкостей ($x = 0$), получаем

$$x = 0: -\frac{12\mu_1}{\delta^2}U_0\xi + P'_1 = -\frac{12\mu_2}{\delta^2}U_0\xi + P'_2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = u'_1 = u'_2 \quad (1.4)$$

где $x = \xi(t, y)$ – уравнение границы раздела жидкостей (фиг. 1, б).

В результате имеем линейную систему уравнений (1.1), (1.3), (1.4) с постоянными коэффициентами. После подстановки решения в виде экспоненты $P'(t, x, y) = \text{Пехр}(\omega t - rx - i2\pi y/\lambda)$ в уравнения системы получаем дисперсионное уравнение, связывающее интенсивность роста возмущений ω с длиной волны λ :

$$\omega = 2\pi \frac{M-1}{M+1} \frac{U_0}{\lambda}, \quad M = \frac{\mu_2}{\mu_1} > 1 \quad (1.5)$$

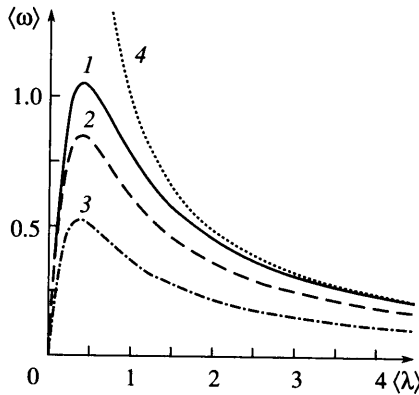
Решение задачи о росте малых возмущений в классической постановке показывает (линия 4 на фиг. 2), что чем меньше длина волны синусоидального возмущения, тем выше темп роста его амплитуды. Причем возмущения нулевой длины нарастают с бесконечной скоростью.

Таким образом, из анализа начальной стадии формирования вязких языков следует, что на фронте вытеснения должно мгновенно образоваться огромное количество тонких “трещин”, чего в действительности не происходит. Следовательно, решение задачи в классической постановке не позволяет оценить ширину языков.

Впервые оценить ширину вязких языков удалось экспериментально [4]. Обработка экспериментов по вытеснению водоглицериновой смеси воздухом показала, что критерием, определяющим отношение ширины языков и ячейки, является модифицированное капиллярное число:

$$Ca' = \frac{l^2 \mu_2 U_0}{\delta^2 \sigma} \quad (1.6)$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения; l – ширина ячейки.



Фиг. 2. Зависимость инкремента возмущений ω от длины волны λ . Кривые 1–3 по решению (3.11) при $M = 84, 9, 3$. Кривая 4 – по решению (1.5) при $M = 84$

Модифицированное капиллярное число представляет собой отношение перепада давлений между входом и выходом ячейки за счет сил вязкости $\mu_2 U_0 l / \delta^2$ к перепаду давлений на межфазной поверхности за счет сил поверхностного натяжения, действующих в плоскости ячейки σ/l . Как было замечено в [4], в [3] по существу показано, что при неустойчивом вытеснении определяющую роль начинают играть малые силы поверхностного натяжения, действующие в плоскости ячейки. После того как эти силы были добавлены в уравнение (1.2), процесс образования вязких языков был смоделирован численно [5].

Повторим этот результат, исследуя устойчивость плоского фронта вытеснения. Следуя [5], добавим силы поверхностного натяжения, действующие в плоскости ячейки, в условия на межфазной поверхности (1.2):

$$x = \xi(t, y): P_1 = P_2 - \sigma \left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \quad W_{1n} = W_{2n}$$

Тогда анализ устойчивости первоначально плоского фронта вытеснения приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega = 2\pi \frac{M-1}{M+1} \frac{U_0}{\lambda} - \frac{2\pi^3 \sigma \delta^2}{3(\mu_2 + \mu_1) \lambda^3} \quad (1.7)$$

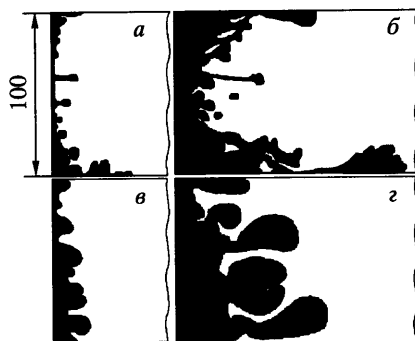
Функция $\omega(\lambda)$, определенная уравнением (1.7), имеет максимум при

$$\lambda^* = \pi \delta \sqrt{\frac{\sigma}{(\mu_2 - \mu_1) U_0}}$$

Таким образом, темп роста возмущений с длиной волны λ^* будет наибольшим. Следовательно, образующиеся на плоском фронте вытеснения вязкие пальцы будут иметь ширину $\approx \lambda^*/2$.

Полагая, что течения в двух ячейках Хеле-Шоу подобны, если в них образуется одинаковое число вязких языков, т.е. отношение ширины ячейки к ширине языка одно и то же, $l/\lambda^* = \text{inv}$, получаем критерий подобия, совпадающий с критерием (1.6) при $\mu_2 \gg \mu_1$

$$\text{Ca}' = \frac{l^2 (\mu_2 - \mu_1) U_0}{\delta^2 \sigma}$$



Фиг. 3. Структура фронта неустойчивого вытеснения для смешивающихся жидкостей в экспериментах [7]

Проведенный анализ дает возможность обобщить критерий подобия (1.6) на случай $\mu_2 \sim \mu_1$.

Таким образом, на основе линейного анализа начальной стадии образования вязких языков можно оценить их ширину и выработать критерий подобия для процесса вытеснения.

Существуют эксперименты по неустойчивому вытеснению вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу когда обе (вытесняемая и вытесняющая) жидкости смешиваются друг с другом. Тогда на поверхности раздела жидкостей нет сил поверхностного натяжения, так как не требуется никакая дополнительная энергия для перемещения молекулы жидкости из “глубины” на межфазную поверхность. Однако оказывается, что ширина вязких языков и в этом случае конечна.

Пример такого вытеснения – эксперименты [6] по вытеснению водоглицериновой смеси водой (вода и глицерин – смешивающиеся жидкости). Ширина ячейки 100, длина 200 мм. Вытесняющая жидкость – вода, вытесняемая – водоглицериновая смесь. В экспериментах, показанных на фиг. 3, а, б, зазор между пластинами ячейки $\delta = 1.2$ мм, а представленных на фиг. 3, в, г – $\delta = 3.7$ мм. Отношение вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкостей в обоих представленных экспериментах $M = 84$, средняя скорость $U_0 = 1$ см/с, даны фотографии фронта в два момента времени: фиг. 3, а, в – $t_1 = 2$ с, фиг. 3, б, г – $t_2 = 8$ с.

На фотографиях для первого момента наблюдаются вязкие языки “классической” формы (фиг. 3, а, в). Причем их ширина конечна. Впоследствии языки разрушаются и в вытесняемой жидкости появляются “вязкие пузырьки” (фиг. 3, б, г).

В [4] было замечено, что силы вязкости между пластинами огромны в сравнении с силами поверхностного натяжения, действующими в плоскости течения. Именно поэтому их отношение – критическое значение модифицированного капиллярного числа Ca' (1.6), определенное для случая, когда в ячейке существует единственный палец ≈ 100 . Однако, несмотря на малость, именно они диктуют структуру фронта неустойчивого вытеснения.

Обобщая гипотезу Хомси [3], предположим, что и в случае отсутствия сил поверхностного натяжения структуру фронта неустойчивого вытеснения определяют малые параметры, но другие. Поскольку в этом случае уже нечего добавить в граничные условия (1.2), проанализируем, какие малые параметры могут дополнительно содержать уравнения модели (1.1).

2. Уточненная модель движения вязкой жидкости в ячейке. В течениях, реализуемых в ячейках Хеле-Шоу, числа Рейнольдса $Re \leq 1$. Уравнения Навье–Стокса [7] хорошо

описывают динамику таких потоков. Получим модель движения вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу путем осреднения по зазору ячейки общих уравнений.

Интегрируя уравнения Навье–Стокса по зазору ячейки Хеле–Шоу и введя средние компоненты вектора скорости и среднее давление как

$$u^* = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta/2} u dz, \quad v^* = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta/2} v dz, \quad w^* = 0, \quad P^* = \frac{2}{\delta} \int_0^{\delta/2} P dz$$

приходим к уравнениям типа уравнений Рейнольдса [7].

Предполагаем, что изменения параметров течения по координатам x и y мало влияют на профиль скоростей по z , который остается таким же, как для слоистого течения между двумя бесконечными плоскопараллельными пластинами (течение Куэтта [7]):

$$u' = \frac{u^*}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{2z}{\delta} \right)^2 \right], \quad v' = \frac{v^*}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{2z}{\delta} \right)^2 \right], \quad w' = 0$$

где $u' = u - u^*$, $v' = v - v^*$, $w' = w$ – отклонения x -ой, y -ой и z -ой компонент вектора скорости от их средних значений.

После подстановки выражения для отклонений профиля скоростей от средних значений в осредненные уравнения, получим уравнения, связывающие средние параметры

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{6}{5} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{6}{5} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial P^*}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right) - \frac{12\mu u^*}{\delta^2} \quad (2.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v^*}{\partial t} + \frac{6}{5} u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{6}{5} v^* \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial P^*}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} \right) - \frac{12\mu v^*}{\delta^2} \quad (2.3)$$

Звездочки сверху, которыми обозначены осредненные параметры, в дальнейшем опускаем. Вместо коэффициента $6/5$ будем использовать единицу.

Получена осредненная система уравнений, описывающая течение в ячейке Хеле-Шоу, которая, в отличие от закона Дарси (1.1), содержит члены, характеризующие инерционные свойства жидкости и силы вязкости, действующие в плоскости течения. Исследуем их влияние на структуру фронта неустойчивого вытеснения.

3. Задача об устойчивости первоначально плоского фронта вытеснения, распространяющегося по своей нормали, с учетом вязких сил, действующих в плоскости пластин ячейки. Пусть в ячейке Хеле-Шоу (фиг. 1, а) находятся две жидкости: более вязкая – справа (жидкость 2), а менее вязкая – слева (жидкость 1). Первоначально граница раздела между жидкостями – плоскость, перпендикулярная направлению движения (3). Требуется оценить темп роста неустойчивостей, образующихся при фронтальном вытеснении вязкой жидкости из ячейки.

Проведем анализ устойчивости плоского фронта вытеснения к малым возмущениям с учетом только вязких сил, действующих в плоскости ячейки xy , т.е., в уравнениях (2.2), (2.3) пренебрежем силами инерции.

На межфазной поверхности ставятся условия равенства напряжений и скоростей вытесняемой и вытесняющей жидкостей:

$$x = \xi(t, y): \quad \sigma_{n1} = \sigma_{n2}, \quad W_1 = W_2 \quad (3.1)$$

На удалении от фронта вытеснения скорость жидкости принимается постоянной (1.3).

Уравнения (2.1)–(2.3) без инерционных членов линейны, поэтому они описывают малые отклонения параметров от невозмущенного состояния.

Введя функцию тока Ψ и исключив из уравнений (2.2), (2.3) давление, получим

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} - \frac{12}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Линеаризуя граничные условия на границе жидкостей и “снося” их на ее невозмущенное положение $x = 0$, получаем

$$-\frac{12\mu_1}{\delta^2} U_0 \xi + P'_1 - 2\mu_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x} = -\frac{12\mu_2}{\delta^2} U_0 \xi + P'_2 - 2\mu_2 \frac{\partial u'_2}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$\mu_1 \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x} + \frac{\partial u'_1}{\partial y} \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x} + \frac{\partial u'_2}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u'_1 = u'_2, \quad v'_1 = v'_2 \quad (3.5)$$

На удалении от фронта вытеснения ставится условие затухания возмущений:

$$x \rightarrow \pm\infty: u' = v' = 0 \quad (3.6)$$

Решение ищется в виде $\Psi(t, x, y) = S \exp(\omega t - rx - i2\pi y/\lambda)$, где S , ω , r – комплексные постоянные, λ – действительная.

С учетом условий (3.6) решения для первой и второй жидкостей имеют вид

$$\Psi_1 = S_1 \exp\left(ht + \frac{2\pi x}{\lambda} - i2\pi \frac{y}{\lambda} \right) + S_3 \exp\left(ht + \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{12}{\delta^2}} x - i2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$$

$$\Psi_2 = S_2 \exp\left(ht - \frac{2\pi x}{\lambda} - i2\pi \frac{y}{\lambda} \right) + S_4 \exp\left(ht - \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{12}{\delta^2}} x - i2\pi \frac{y}{\lambda} \right)$$

Подстановка полученных решений в условия на межфазной поверхности (3.3)–(3.5) дает четыре алгебраических уравнения относительно параметров S_1, \dots, S_4

$$\left(1 + 6 \langle \lambda \rangle^2 + 6 \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \omega \rangle} \right) S_1 + M \left(1 + 6 \langle \lambda \rangle^2 - 6 \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \omega \rangle} \right) S_2 + \quad (3.7)$$

$$+ \left(\sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} + 6 \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \omega \rangle} \right) S_3 + M \left(\sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} - 6 \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle \omega \rangle} \right) S_4 = 0$$

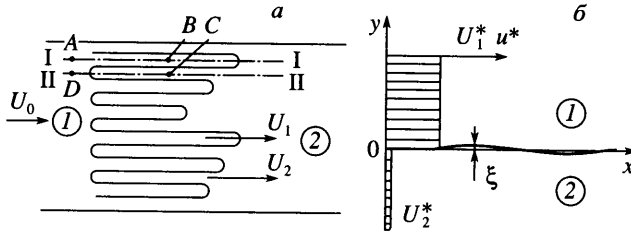
$$S_1 - M S_2 + (1 + 6 \langle \lambda \rangle^2) S_3 - M (1 + 6 \langle \lambda \rangle^2) S_4 = 0 \quad (3.8)$$

$$S_1 - S_2 + S_3 - S_4 = 0 \quad (3.9)$$

$$S_1 + S_2 + \sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} S_3 + \sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} S_4 = 0 \quad (3.10)$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\lambda}{2\pi\delta}, \quad \langle \omega \rangle = \frac{\omega\delta}{U_0}, \quad M = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

где $\langle \lambda \rangle$, $\langle \omega \rangle$, M – безразмерные параметры: длина волны возмущения, интенсивность роста амплитуды и отношение вязкостей



Фиг. 4. Постановки задачи об устойчивости границы жидкостей при ее продольном обтекании: а – регулярная структура фронта вытеснения; б – схема течения к задаче об устойчивости

Из условия существования нетривиального решения системы (3.7)–(3.10), получаем дисперсионное уравнение

$$\langle \omega \rangle = \frac{12 \langle \lambda \rangle^3 N (\sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} - 1)}{\sqrt{1 + 12 \langle \lambda \rangle^2} [1 + 6 \langle \lambda \rangle^2 + 18 N^2 \langle \lambda \rangle^4] - 1 - 12 \langle \lambda \rangle^2 - 18 \langle \lambda \rangle^4} \quad (3.11)$$

$$N = \frac{M + 1}{M - 1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$$

Ее асимптотики имеют вид

$$\langle \lambda \rangle \rightarrow 0: \langle \omega \rangle = \frac{6 \langle \lambda \rangle}{N}, \quad \langle \lambda \rangle \rightarrow \infty: \langle \omega \rangle = \frac{1}{\langle \lambda \rangle N}$$

Вторая из асимптотик совпадает с полученным ранее решением (1.5), описывающим рост возмущений без учета вязких сил, действующих в плоскости пластин ячейки.

Из графика зависимости $\langle \omega \rangle(\langle \lambda \rangle)$ (3.11) при $M = 3, 9$ и 84 (условия экспериментов [6]) видно, что существует длина волны $\langle \lambda \rangle^*$ при которой темп роста возмущений будет наибольшим (фиг. 2). Образующиеся вязкие языки будут иметь ширину $\sim \lambda^*/2 \approx \lambda \delta$.

Экспериментальные данные [6] подтверждают этот вывод. На фиг. 3 сопоставлены результаты экспериментов в ячейках зазора $\delta = 1.2$ и 3.7 мм. В первом случае ширина языков должна быть ≈ 4 мм, во втором – 10 . Видно, что чем больше зазор между пластинами, тем толще языки, причем их оценочная ширина соответствует экспериментальной на начальной стадии процесса при $t = 2$ с. (Ширина ячейки – 100 мм.)

Решение задачи с учетом инерции, но без учета сил вязкости в плоскости пластин не позволило оценить размер пальцев. При решении этой задачи, как и при решении классической, возмущения нулевой длины волны имели бесконечный темп роста амплитуды.

4. Задача об устойчивости плоской границы параллельной направлению движения жидкостей. Опишем дальнейшую эволюцию вязких языков. Пусть в ячейке установилась регулярная структура фронта вытеснения, состоящая из чередующихся языков, заполненных вытесняющей жидкостью 1, и промежутков между ними, в которых находится вытесняемая жидкость 2. Жидкость в пальцах движется со скоростью u_1 , а жидкость в промежутках – с меньшей, u_2 (фиг. 4, а). Таким образом, при удалении в обе стороны от межфазной поверхности существует разность скоростей, а возле нее реализуется сдвиговой поток.

Исследуем устойчивость плоской межфазной границы в ячейке Хеле–Шоу, когда скорости фаз u_1 и u_2 параллельны межфазной поверхности (фиг. 4, б).

Движение жидкостей опишем системой уравнений (2.5)–(2.7), из которой исключим члены, определяющие вязкие силы, действующие в плоскости пластин ячейки.

Введем безразмерную скорость, координаты, время и давление

$$\langle u \rangle = \frac{u}{U_1}, \quad \langle v \rangle = \frac{v}{U_1}, \quad \langle x \rangle = \frac{x}{\delta}, \quad \langle y \rangle = \frac{y}{\delta}, \quad \langle t \rangle = \frac{tU_1}{\delta}, \quad \langle P \rangle = \frac{P\delta}{\mu_2 U_1} \quad (4.1)$$

где U_1 – скорость вытесняющей жидкости на бесконечном удалении от межфазной поверхности.

В безразмерных переменных система уравнений примет вид

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \langle x \rangle} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \langle y \rangle} = 0 \quad (4.2)$$

$$\langle \rho_j \rangle \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \langle t \rangle} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + v \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \langle y \rangle} \right) + \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \langle x \rangle} = -12 \langle \mu_j \rangle \langle u \rangle \quad (4.3)$$

$$\langle \rho_j \rangle \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \langle t \rangle} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \langle y \rangle} \right) + \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \langle y \rangle} = -12 \langle \mu_j \rangle \langle v \rangle \quad (4.4)$$

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho_2 \delta U_1}{\mu_2}, \quad \langle \rho \rangle_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \langle \rho \rangle_2 = 1, \quad \langle \mu \rangle_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{M}, \quad \langle \mu \rangle_2 = 1$$

где Re – число Рейнольдса, $\langle \rho \rangle_j$, $\langle \mu \rangle_j$ – относительные плотность и вязкость j -й жидкости.

Система (4.2)–(4.4) является системой уравнений Эйлера с внешними массовыми силами, которые представляют собой силы вязкости о стенки ячейки. Граничные условия на межфазной поверхности состоят из условия равенства давлений и нормальных к межфазной поверхности составляющих вектора скорости. На бесконечном удалении от поверхности ставятся условия постоянства скоростей:

$$\langle y \rangle = \xi(\langle t \rangle, \langle x \rangle): \langle P \rangle_1 = \langle P \rangle_2, \quad \frac{d_1 \xi}{d \langle t \rangle} = \langle W \rangle_{n1}, \quad \frac{d_2 \xi}{d \langle t \rangle} = \langle W \rangle_{n2} \quad (4.5)$$

$$\langle y \rangle \rightarrow \infty: \langle W \rangle_1 \rightarrow \mathbf{i}; \quad \langle y \rangle \rightarrow -\infty: \langle W \rangle_2 \rightarrow \mathbf{i} \langle U \rangle_2 \quad (4.6)$$

где ξ – отклонение межфазной поверхности (фиг. 4); $d_1/d \langle t \rangle$, $d_2/d \langle t \rangle$ – субстанциональные производные, взятые вдоль траекторий движения вытесняющей и вытесняемой жидкостей; \mathbf{i} – единичный орт оси Ox ; $\langle U \rangle_2 = U_2/U_1$ – безразмерная скорость более вязкой, вытесняемой жидкости на бесконечном удалении от границы раздела фаз.

Стационарный профиль скоростей определится соотношениями

$$\langle u \rangle^* = \langle U \rangle_1 = 1, \quad \langle v \rangle^* = 0, \quad \langle y \rangle \geq 0$$

$$\langle u \rangle^* = \frac{1}{M}, \quad \langle v \rangle^* = 0, \quad \langle y \rangle < 0$$

Давление в обеих жидкостях является функцией только x -й координаты: $\langle P \rangle^* = \text{const} - 12 \langle x \rangle$. Индексом “*” здесь и в дальнейшем будем отмечать стационарные параметры.

Следуя [8], предполагаем, что вихрей (в плоскости ячейки) не было в начале течения. В силу однородности условий на границах исследуемой области они не возникнут и после, поэтому течение можно считать потенциальным.

После введения потенциала скорости $\langle \mathbf{W} \rangle = \nabla \langle \phi \rangle$ и интегрирования уравнений сохранения количества движения (4.3), (4.4) получаем интеграл Коши–Лагранжа. Константы интегрирования $C_j(\langle t \rangle)$ определяются из граничных условий. Считается, что в сечении $\langle x \rangle = 0$ на удалении от границы раздела жидкостей потенциал течения $\langle \phi \rangle = 0$, а давление $\langle P \rangle = \langle P \rangle_0$.

В результате система (4.2)–(4.4) может быть записана в виде

$$\Delta \langle \phi \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{W} \rangle = \nabla \langle \phi \rangle \quad (4.7)$$

$$\langle \rho \rangle_j \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \langle t \rangle} + \frac{\langle W \rangle^2 - (\langle u \rangle_j^*)^2}{2} \right) + \langle P \rangle + 12 \langle \mu \rangle_j \langle \phi \rangle = \langle P \rangle_0 \quad (4.8)$$

Линеаризуя уравнение (4.8) и граничные условия (4.5), (4.6), приходим к постановке задачи об устойчивости поверхности к малым отклонениям:

$$\Delta \langle \phi \rangle' = 0, \quad \langle \mathbf{W} \rangle' = \nabla \langle \phi \rangle' \quad (4.9)$$

$$\langle \rho \rangle_j \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \langle \phi \rangle'}{\partial \langle t \rangle} + \langle u \rangle_j^* \langle u \rangle' \right) + \langle P \rangle' + 12 \langle \mu \rangle_j \langle \phi \rangle' = 0 \quad (4.10)$$

$$\langle y \rangle = 0: \langle P \rangle'_1 = \langle P \rangle'_2 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \langle t \rangle} + \frac{\partial \xi}{\partial \langle x \rangle} = \langle v \rangle'_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \langle t \rangle} + \frac{1}{M} \frac{\partial \xi}{\partial \langle x \rangle} = \langle v \rangle'_2 \quad (4.12)$$

$$\langle y \rangle \rightarrow \pm \infty: \langle \phi \rangle' = 0 \quad (4.13)$$

Решение уравнения Лапласа (4.10) типа “бегущей волны”, удовлетворяющее граничным условиям затухания возмущений при удалении от межфазной поверхности (4.13), имеет вид для 1-ой ($y > 0$) и 2-ой ($y < 0$) жидкостей соответственно

$$\langle \phi \rangle'_1 = \Phi_1 \exp \left(\langle \omega \rangle \langle t \rangle - i \frac{\langle x \rangle}{\langle \lambda \rangle} - \frac{\langle y \rangle}{\langle \lambda \rangle} \right), \quad \langle \phi \rangle'_2 = \Phi_2 \exp \left(\langle \omega \rangle \langle t \rangle - i \frac{\langle x \rangle}{\langle \lambda \rangle} + \frac{\langle y \rangle}{\langle \lambda \rangle} \right) \quad (4.14)$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\lambda}{2\pi\delta}$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \langle \omega \rangle$ – комплексные константы, $\langle \lambda \rangle$ – безразмерная длина бегущей волны, действительная постоянная.

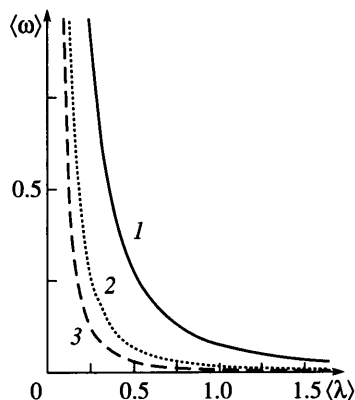
Подставив решения в виде (4.14) в уравнения (4.9)–(4.13), получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} & \langle \omega \rangle^2 + \frac{2D}{\operatorname{Re}(1+D)} \left[6 \left(1 + \frac{1}{M} \right) - i \frac{\operatorname{Re}}{\langle \lambda \rangle} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{M} \right) \right] \langle \omega \rangle - \\ & - \frac{D}{\operatorname{Re}(1+D)} \left[\frac{\operatorname{Re}}{\langle \lambda \rangle^2} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{M^2} \right) + i \frac{24}{\langle \lambda \rangle M} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$D = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Действительная часть $\langle \omega \rangle$ одного из корней квадратного уравнения (4.15) всегда положительна. Асимптотика при малых $\langle \lambda \rangle$ для этого корня имеет вид

$$\langle \lambda \rangle \rightarrow 0: \operatorname{Re}(\langle \omega \rangle) = \frac{(1-M)\sqrt{D}}{M(1+D)} \frac{1}{\langle \lambda \rangle}$$



Фиг. 5. Зависимость инкремента возмущений ω от длины волны λ . Кривые 1–3 построены по решению (4.15) при $Re = 1, M = 84$; $Re = 1, M = 3$; $Re = 0.1, M = 84$. Отношение плотностей $D = 1$

Зависимости $Re(\langle \omega \rangle) = f(\langle \lambda \rangle)$ для корня с положительной действительной частью (фиг. 5) показывают, что с уменьшением длины волны темп роста возмущений возрастает, стремясь к бесконечности при $\lambda \rightarrow 0$. Следовательно, плоская граница вытесняемой жидкости всегда неустойчива при ее обтекании.

Таким образом, анализ устойчивости обтекаемой прямолинейной поверхности, проведенный с учетом сил инерции, но без учета сил вязкости, действующих в плоскости пластин, показал ее неустойчивость к возмущениям всех длин волн. В этом случае возмущения нулевой длины нарастают с бесконечной скоростью. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, развивающейся при движении одной жидкости по поверхности другой [9].

Следовательно, учет сил инерции дает возможность описывать распад вязких языков.

Заключение. Путем осреднения уравнений Навье–Стокса по высоте ячейки Хеле–Шоу была получена модель, особенностью которой является наличие сил вязкости, действующих в плоскости пластин и сил инерции.

Определена ширина вязких языков в случае, когда вытесняемая и вытесняющая жидкости являются смешивающимися и на их границе раздела нет сил поверхностного натяжения. Сопоставление оценок с данными экспериментов дало удовлетворительные результаты.

Анализ устойчивости плоской границы, параллельной скорости движения жидкостей с учетом сил инерции показал ее неустойчивость. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, развивающейся при движении одной жидкости по поверхности другой. В обоих случаях дестабилизирующим фактором являются силы инерции.

Работа выполнена при поддержке Департамента научных разработок Российского отделения компании Schlumberger и грантов РФФИ № 05-08-01435, 06-08-00009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous fluid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.

2. *Hele-Shaw H.J.S.* On the motion of a viscous fluid between two parallel plates // *Nature*. 1898. V. 58. № 1489. P. 34–36.
3. *Park C.W., Homsy G.M.* The instability of long fingers in Hele-Shaw flows // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. № 6. P. 1583–1585.
4. *Tanveer S.* Surprises in viscous fingering // *J. Fluid Mech* 2000. V. 409. ZPP. 273–308.
5. *Meiburg E., Homsy G.M.* Nonlinear unstable viscous fingers in Hele-Shaw flows. II. Numerical simulation // *Phys Fluids*. 1987. V. 31. № 3. P. 429–439.
6. *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., Maximenko A., Thiercelin M., Vedernikov A., Scheid B., Istasse E, Legros J.C.* Microgravity investigations of instability and mixing flux in frontal displacement of fluids // *Microgravity Sci. Technol.* 2004. V. 15. № 2. P. 35–51.
7. *Шлихтин Г.* Теория пограничного слоя. М.: Мир, 1974. 711 с.
8. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973. 536 с.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.2006