

УДК 532.546.2.013.4:536.24

© 2007 г. А.Д. НЕМЦЕВ, В.Г. ЦИБУЛИН

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОГО ПЕРЕХОДА В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

Для задачи фильтрационной конвекции в параллелепипеде изучается ответвление стационарных режимов от механического равновесия. Найдены условия на геометрические параметры, при которых возникают устойчивые непрерывные семейства стационарных режимов. В численном эксперименте с применением метода сеток проанализирована устойчивость равновесий семейства к трехмерным возмущениям.

Ключевые слова: фильтрационная конвекция, трехмерные движения, семейство стационарных режимов, косимметрия.

Фильтрационная конвекция [1, 2] обладает рядом особенностей, отличающих ее от задачи свободной конвекции. Так, для плоской задачи Дарси в [3] обнаружено возникновение однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов. Это явление было объяснено В.И. Юдовичем с помощью теории косимметрии [4], развитие которой дано в работах [5–7]. Наличие нетривиальной косимметрии говорит о недоопределенности системы и выявляет существование скрытого параметра, вследствие чего становится возможным возникновение семейств стационарных режимов. Существенное отличие косимметричных динамических систем от задач с симметрией заключается в изменчивости спектра устойчивости равновесий на семействе [5].

Аналитическое исследование плоской задачи конвекции Дарси [4, 5] позволило получить асимптотику семейства равновесий и изучить его устойчивость вблизи бифуркации рождения. Появление множественных стационарных конвективных движений для пористой среды было подтверждено в натурном эксперименте [8]. Расчеты семейств стационарных решений конвекции Дарси для однокомпонентной и многокомпонентной жидкости выполнены в [9–13], где проанализирована эволюция семейств и изучено возникновение неустойчивости на них. В этих работах обнаружен и исследован ряд бифуркаций однопараметрических семейств стационарных режимов. Анализ переходов от двумерных к трехмерным конвективным движениям в параллелепипеде посвящена статья [14], где указаны краевые условия, при которых возможно ответвление устойчивого семейства стационарных решений.

Для расчета семейств равновесий необходимо, чтобы численная схема сохраняла косимметрию исходной системы. Такие дискретизации для задачи Дарси построены на основе метода сеток [15] и спектрально-разностного метода [10], в [16] предложена конечно-разностная аппроксимация уравнений в естественных переменных.

Цель данной работы – исследование первого перехода для фильтрационной конвекции в параллелепипеде и изучение условий на геометрические параметры, при выполнении которых происходит ответвление устойчивого семейства стационарных режимов. Для этого предложен численный метод, основанный на дискретизации уравнений в естественных переменных при помощи схемы смещенных сеток и позволяющий анализировать устойчивость равновесий семейства к трехмерным возмущениям.

1. Постановка задачи. Конвекция жидкости в пористой среде на основе модели Дарси описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \theta &= \Delta \theta + \lambda \mathbf{v} \boldsymbol{\gamma} \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \theta \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{v}, \quad \nabla \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ – вектор скорости, p – превышение давления над гидростатическим, θ – отклонение температуры от линейного равновесного профиля, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ – единичный вектор, направленный противоположно вектору силы тяжести, λ – фильтрационное число Рэлея, ε – коэффициент пористости среды, t – время, (x, y, z) – декартова система координат.

Уравнения рассматриваются в параллелепипеде $D = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, здесь L_x, L_y, L_z – соответственно ширина, глубина и высота. На всей границе области D для скорости принимается краевое условие непротекания, для температуры на двух боковых гранях $\partial_1 D = \{y = 0\} \cup \{y = L_y\}$ ставится условие отсутствия теплового потока, а на остальных гранях $\partial_2 D = \partial D \setminus \partial_1 D$ поддерживается равновесное распределение температуры

$$v_n|_{\partial D} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{\partial_1 D} = 0, \quad \theta|_{\partial_2 D} = 0 \quad (1.2)$$

При малых значениях числа Рэлея жидкость находится в механическом равновесии с нулевой скоростью и нулевым отклонением от линейного по высоте распределения температуры. При переходе через пороговое критическое число Рэлея механическое равновесие теряет устойчивость, и в области возникает конвективный перенос тепла за счет стационарного движения жидкости.

2. Метод решения. Для дискретизации задачи (1.1)–(1.2) используется метод смещенных сеток [16] с узлами пяти типов: для температуры, давления и трех компонент вектора скорости. Равномерная по каждой координате сетка введена таким образом, что на границе $\partial_2 D$ краевые условия для температуры и скорости удовлетворяются автоматически, а на границе $\partial_1 D$ краевые условия реализуются с помощью законтурных узлов для температуры и скорости v^2 .

Для расчета стационарных движений методом установления используется подход, основанный на введении искусственной сжимаемости, и вместо последнего уравнения в (1.1) рассматривается

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\zeta} \nabla \mathbf{v} = 0 \quad (2.1)$$

Здесь ζ – коэффициент искусственной сжимаемости.

Полученную в результате дискретизации систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно записать в векторном виде:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= A_1 \Theta + \lambda C_1 V^3 - F(\Theta, V) \\ \dot{V}^1 &= -B_4 P - C_2 V^1, \quad \dot{V}^2 = -B_5 P - C_3 V^2 \\ \dot{V}^3 &= -B_6 P - C_4 V^3 + C_5 \Theta, \quad \dot{P} = -B_1 V^1 - B_2 V^2 - B_3 V^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь Θ, V^1, V^2, V^3, P – векторы узловых переменных для температуры, трех компонент скорости и давления соответственно. Матрицы A_i, B_i ($i = 1, \dots, 6$), C_i ($i = 1, \dots, 5$) отвечают соответственно аппроксимации оператора Лапласа, операторам дифференциро-

вания первого порядка и операторам вычисления среднего. Член $F(\Theta, V)$ представляет собой аппроксимацию конвективного слагаемого.

Стационарные конвективные движения находились интегрированием системы (2.2) до установления, в качестве интегратора использовался метод Рунге-Кутты 4/5. Из уравнений (2.2) при $F = 0$ получаются уравнения в возмущениях для анализа устойчивости механического равновесия

$$\begin{aligned}\sigma\Theta &= A_1\Theta + \lambda C_1 V^3, & \sigma V^1 &= -B_4 P - C_2 V^1 \\ \sigma V^2 &= -B_5 P - C_3 V^2, & \sigma V^3 &= -B_6 P - C_4 V^3 + C_5 \Theta \\ \sigma P &= -B_1 V^1 - B_2 V^2 - B_3 V^3\end{aligned}\quad (2.3)$$

При $\sigma = 0$ из (2.3) следует система для вычисления критических чисел Рэля λ , соответствующих потере устойчивости механического равновесия монотонным образом. Исключением переменных V^1, V^2, V^3 и P из (2.3) получается спектральная задача относительно вектора Θ

$$A_1\Theta = -\lambda C_1 C_4^{-1} (C_5 - B_6 S)\Theta \quad (2.4)$$

Здесь S – матрица, с помощью которой вектор узловых давлений с точностью до константы находится из недоопределенной системы алгебраических уравнений

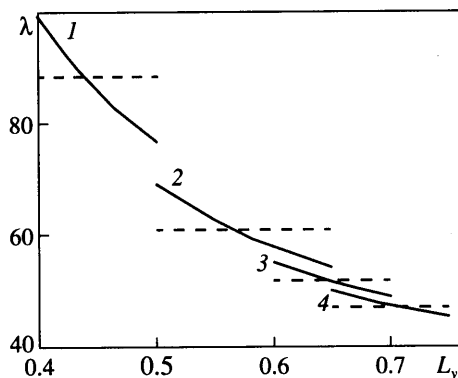
$$(B_1 C_2^{-1} B_4 + B_2 C_3^{-1} B_5 + B_3 C_4^{-1} B_6)P = B_3 C_4^{-1} C_5 \Theta$$

3. Критические числа Рэля. Для плоской задачи конвекции Дарси и произвольной односвязной области в [4] показано, что рождение семейства стационарных режимов связано с наличием нетривиальной косимметрии. При этом ответвлению семейства равновесий от механического равновесия отвечают кратные собственные значения спектральной задачи относительно критических чисел Рэля (2.4). Для параллелепипеда в зависимости от отношения сторон L_y/L_x и L_x/L_z потеря устойчивости у состояния покоя происходит через ответвление пары изолированных стационарных режимов или образование устойчивого семейства равновесий.

Характер потери устойчивости механического равновесия определяется критическими значениями параметра Рэля λ – собственными числами задачи (2.4). В таблице представлены результаты вычислений пяти наименьших критических значений λ для параллелепипедов с шириной $L_x = 2$ и высотой $L_z = 1$ при различных значениях глубины L_y .

λ_i	$L_y = 0.4$	0.6	0.8
λ_1	50.5 (51.9)	50.5 (51.9)	46.8 (50.9)
λ_2	50.5 (51.9)	50.5 (51.9)	50.5 (51.9)
λ_3	83.7 (89.8)	56.5 (61.2)	50.5 (51.9)
λ_4	83.7 (89.8)	65.3 (71.7)	55.0 (60.7)
λ_5	90.4 (97.2)	80.1 (90.1)	69.3 (78.2)

При $L_y = 0.4$ и $L_y = 0.6$ минимальное собственное значение системы (2.4) получилось кратным, что соответствует рождению непрерывного семейства устойчивых стационарных режимов. Для параллелепипеда с $L_y = 0.8$ минимальным является простое собственное значение, вследствие имеющейся в задаче дискретной симметрии при превышении критического числа Рэля ответвляются два изолированных стационарных решения.



Фиг. 1. Зависимость от глубины L_y минимальных критических значений ответвления изолированных стационарных режимов (сплошная линия) и рождения семейства равновесий (пунктир) при $L_z = 1$; $L_x = 1, 1.5, 2, 3$ (кривые 1–4)

Расчеты чисел Рэлея для первого перехода производились на сетках, содержащих 1728 ($24 \times 6 \times 12$) и 512 ($16 \times 4 \times 8$) внутренних узлов для температуры. Оказалось, что сетки из 512 узлов достаточно для определения значений первого перехода с точностью 5%. Для фиксированной сетки критические значения, соответствующие ответвлению семейств стационарных режимов (кратные значения), не зависят от глубины области. Это, в частности, свидетельствует о том, что стационарные режимы из ответвляющегося от состояния покоя семейства являются по существу двумерными и не зависят от координаты y .

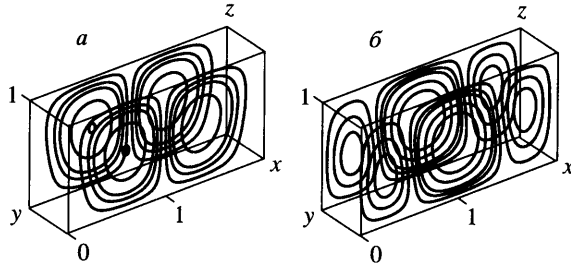
На фиг. 1 сплошными линиями изображены графики зависимости от глубины минимальных собственных значений системы (2.4), рассчитанных для различных значений ширины L_x , пунктирной линией представлена первая пара кратных значений, а сплошной линией – простые значения. Пересечение кривых, отвечающих минимальным кратным и простым собственным значениям, позволяет определить критическую глубину для параллелепипеда при заданных значениях L_x и L_z . Например, для области D с шириной $L_x = 2$ и высотой $L_z = 1$ критической глубиной является $L_y^* \approx 0.65$.

Ниже представлена зависимость критической глубины L_y^* от ширины области L_x при высоте $L_z = 1$.

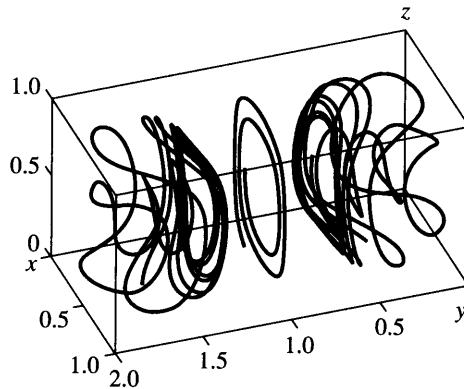
L_x	1	1.5	2	3
L_y^*	0.45	0.60	0.65	0.75

С уменьшением ширины L_x происходит снижение критической глубины L_y^* . Для параллелепипеда квадратного сечения $L_x = L_z = 1$ вычисленная критическая глубина $L_y^* \approx 0.45$ хорошо согласуется с полученной в [14] оценкой $L_y^* = 0.46$.

4. Стационарные конвективные режимы. У параллелепипеда, глубина L_y которого меньше критической величины L_y^* , семейство равновесий состоит из устойчивых стационарных движений, не зависящих от координаты y . Для выхода на стационарные ре-



Фиг. 2. Линии тока для симметричного (а) и несимметричного (б) стационарных режимов из семейства; $\lambda = 60$, $D = 2.0 \times 0.5 \times 1.0$



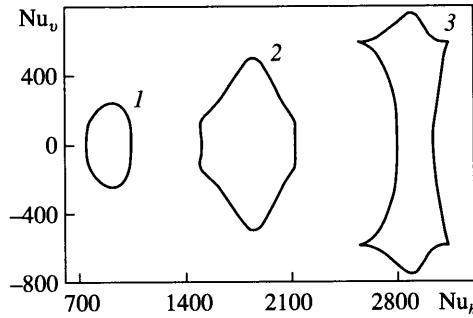
Фиг. 3. Линии тока для изолированного стационарного режима при $\lambda = 52$, $D = 2.0 \times 0.9 \times 1.0$

жимы проводился расчет на установление из начальных данных с нулевыми скоростями и распределением температуры вида

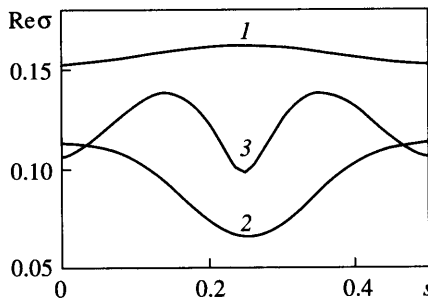
$$\theta_0 = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L_z}\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Например, для параллелепипеда $D = [2.0 \times 0.5 \times 1.0]$ при $\lambda = 60$ и $j = 1$ получается стационарный режим, у которого распределение температуры одинаково во всех сечениях по координате y , а скорость в направлении y равняется нулю. Этот режим принадлежит семейству равновесий и характеризуется двумя конвективными валами, расположенными симметрично относительно сечения $x = L_x/2$. Выбором подходящих начальных данных могут быть получены и другие равновесия из семейства. На фиг. 2 приведены линии тока для двух режимов из семейства равновесий: с симметричным и несимметричным расположением конвективных валов. Видно, что движения жидкости являются плоскими, в направлении y течения нет.

При $L_y > L_y^*$ в результате потери устойчивости механического равновесия возникают устойчивые изолированные стационарные режимы, а семейство равновесий отвечает при больших значениях параметра Рэлея и целиком неустойчиво. Например, для области $D = [2.0 \times 0.9 \times 1.0]$ при $\lambda = 52$ методом установления получен стационарный режим с неоднородным распределением температуры по координате y . В спектре данного равновесия отсутствуют нулевые значения, оно изолировано. Движение жидкости для этого режима имеет сложную трехмерную структуру, на фиг. 3 приведены линии тока для нескольких жидких частиц.



Фиг. 4. Эволюция семейства с ростом параметра Рэлея для $L_x = 2, L_z = 1; \lambda = 200, 300, 400$ (кривые 1–3)



Фиг. 5. Неустойчивость равновесий из семейства к трехмерным возмущениям; $\lambda = 60, 80, 100$ (кривые 1–3), $D = 2.0 \times 0.9 \times 1.0$

Для плоской задачи конвекции в прямоугольнике $L_x = 2, L_z = 1$ семейство равновесий отвечает при $\lambda \approx 52$, а неустойчивость на семействе возникает при $\lambda \approx 410$. На фиг. 4 представлено развитие семейства стационарных режимов при увеличении параметра Рэлея. Суммарный тепловой поток через центральное вертикальное сечение Nu_h и интегральный поток по основанию контейнера Nu_v вычислялись по формулам

$$Nu_h = \int_0^b \theta_x \left(\frac{L_x}{2}, z \right) dz, \quad Nu_v = \int_0^a \theta_z(x, 0) dx$$

Для трехмерной задачи в случае $L_y < L_y^*$ при малой надкритичности все равновесия семейства устойчивы. В спектре каждого равновесия имеется собственное значение, которому отвечает собственный вектор, направленный вдоль семейства. В расчетах это собственное значение получается практически нулевым (10^{-12}) и существенно меньше погрешности вычислений. С ростом числа Рэлея на семействе появляются стационарные режимы, неустойчивые к трехмерным возмущениям. Так, для параллелепипеда с $L_x = 2, L_z = 1$ и глубиной $L_y = 0.5$ неустойчивость возникает при $\lambda = 140$, а при $L_y = 0.4$ – соответственно при $\lambda = 190$, что значительно меньше критического значения для плоских (на плоскости x, z) возмущений. Вычисления проводились на сетке $12 \times 6 \times 6$, неустойчивым становился симметричный режим, соответствующий движению с минимальным Nu_h при $Nu_v = 0$.

При $L_y > L_y^*$ семейства также формируются, в спектре каждого равновесия из семейства также присутствует нейтральное собственное значение, но имеются спектральные величины с положительной вещественной частью, что отвечает трехмерной неустойчивости равновесий семейства. На фиг. 5 представлены результаты вычислений наибольшего значения в спектре устойчивости для равновесий семейства в случае параллелепи-

педа с глубиной $L_y > L_y^*$. Величина декремента меняется при движении вдоль семейства и зависит от числа Рэлея, но все равновесия на семействе неустойчивы.

Заключение. Рассмотрена задача фильтрационной конвекции в параллелепипеде, на двух противоположных боковых гранях которого тепловой поток равен нулю, а на остальных гранях поддерживается линейное распределение температуры по высоте. В зависимости от отношения сторон параллелепипеда возможны два сценария ответвления нетривиальных стационарных режимов от состояния механического равновесия. Если расстояние между теплоизолированными стенками невелико, то происходит рождение непрерывного семейства устойчивых стационарных движений, а при достаточной глубине области первыми ответвляются изолированные стационарные режимы. Движения для стационарных режимов из семейства являются плоскими, а спектр устойчивости меняется при обходе точек семейства. Численно проанализирована устойчивость равновесий семейств к трехмерным возмущениям, найдено, что возникновение неустойчивости на семействе также зависит от глубины параллелепипеда.

Таким образом, в трехмерной задаче фильтрационной конвекции получено семейство равновесий с переменным спектром, что характерно для косимметричных динамических систем.

Исследование проводилось при финансовой поддержке РФФИ (№ 05-01-00567), гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-5747.2006.1), гранта CRDF (RUM1-2842-RO-06) и в рамках ЕНО "Регулярная и хаотическая динамика".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Nield D.A., Bejan A. Convection in Porous Media. N.Y.: Springer, 1999. 546 p.
3. Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // ПМТФ. 1975. № 2. С. 131–137.
4. Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.
5. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. V. 5. № 2. P. 402–411.
6. Kurakin L.G., Yudovich V.I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. V. 10. № 2. P. 311–330.
7. Юдович В.И. Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. вузов. Северо-кавказ. регион. Естеств. науки. Мат. моделирование. Спецвыпуск. 2001. С. 174–178.
8. Глухов А.Ф., Любимов Д.В., Путин Г.Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. № 3. С. 549–551.
9. Говорухин В.Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 5. С. 53–62.
10. Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Расчет семейств стационарных режимов фильтрационной конвекции в узком контейнере // ПМТФ. 2003. Т. 44. № 2. С. 92–100.
11. Говорухин В.Н., Шевченко И.В. Численное исследование второго перехода в задаче плоской фильтрационной конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 115–128.
12. Karasözen B., Tsybulin V.G. Cosymmetric families of steady states in Darcy convection and their collision // Phys. Let. A. 2004. V. 323. № 1, 2. P. 67–76.
13. Кантур О.Ю., Цибулин В.Г. Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 3. С. 123–134.
14. Брацун Д.А., Любимов Д.В., Теплов В.С. Трехмерные конвективные движения в пористом цилиндре конечной длины // Гидродинамика. Пермь: Изд-во ПГУ. 1998. Вып. 11. С. 58–77.
15. Karasözen B., Tsybulin V.G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A. 1999. V. 262. № 4. P. 321–329.
16. Karasözen B., Tsybulin V.G. Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection // Comput. Phys. Commun. 2005. V. 167. P. 203–213.