

УДК 532.529:532.517.4

© 2007 г. В.М. АЛИПЧЕНКОВ, Л.И. ЗАЙЧИК

СТОЛКНОВЕНИЯ ЧАСТИЦ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Представлена статистическая модель для континуального описания движения и столкновений частиц в анизотропных сдвиговых турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц. Выполнено сопоставление с данными прямых численных расчетов в однородном сдвиговом слое и плоском канале.

Ключевые слова: турбулентность, частицы, столкновения, кинетическое уравнение, функция плотности вероятности, однородный сдвиговый слой, вертикальный канал.

Турбулентность – один из наиболее важных механизмов, приводящих к столкновениям частиц друг с другом. В свою очередь, столкновения могут оказывать влияние на взаимодействие частиц с турбулентными вихрями. Для вычисления частоты столкновений частиц и “столкновительных членов” в транспортных уравнениях для гидродинамических характеристик дисперсной фазы обычно вводится предположение о существенном вкладе только парных столкновений и о том, что процесс столкновений является марковским, т.е. не зависит от предыдущих столкновений. С учетом этих допущений для вычисления частоты столкновений необходимо определить функцию плотности вероятности (ФПВ) распределений скоростей двух частиц. С этой целью по аналогии с гипотезой молекулярного хаоса в кинетической теории газов, составляющей основу уравнения Больцмана, может быть использовано предположение о некоррелированности (статистической независимости) движения сталкивающихся частиц. В соответствии с этим допущением двухчастичная ФПВ представляется в виде произведения одночастичных ФПВ, и процесс столкновения частиц по существу описывается точно так же, как и столкновений молекул для модели твердых сфер в кинетической теории газов [1–4]. Однако такой подход (“некоррелированная модель”) действителен только для описания столкновений достаточно инерционных частиц, время динамической релаксации которых τ_p много больше характерного времени взаимодействия с турбулентными вихрями T_{Lp} ($\tau_p/T_{Lp} \gg 1$) и поэтому их относительное движение некоррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. Моделирование процесса столкновений не очень инерционных частиц ($\tau_p/T_{Lp} \leq 1$) должно проводиться с учетом коррелированности их пульсационного движения вследствие взаимодействия с турбулентными вихрями несущего потока. Поэтому процессы взаимодействия “частица–турбулентность” и “частица–частица” можно считать независимыми только в случае $\tau_p/T_{Lp} \gg 1$, а при $\tau_p/T_{Lp} \leq 1$ необходимо учитывать их взаимное влияние.

Излагаемый в настоящей статье метод моделирования столкновений частиц в турбулентных потоках основан на предположении, что совместная ФПВ скоростей сплошной среды и частиц в изотропной турбулентности является коррелированным гауссовым распределением [5]. Для учета анизотропии пульсаций скоростей частиц предложено обобщение известного в кинетической теории газов метода Грэда с целью учета коррелированности движения сталкивающихся частиц. Представленная статистическая модель позволяет получить аналитические зависимости для частоты столкновений частиц и столкновительных членов в транспортных уравнениях для характеристик дисперсной фазы, однако не учитывают эффект аккумуляции (кластеризации) частиц. Части-

цы предполагаются одинаковыми (монодисперсными), а дисперсная среда считается не очень плотной (объемная концентрация $\Phi \leq 0.01$), чтобы можно было ограничиться рассмотрением только двойных соударений и, кроме того, непосредственным вкладом межчастичных столкновений в напряжения и потоком пульсационной энергии дисперсной фазы можно было бы пренебречь. Кроме того, процесс столкновений считается марковским, т.е. предыстория процесса при определении частоты столкновений и “столкновительных членов” не учитывается.

1. Основные уравнения. Математическая формулировка рассматриваемой задачи основана на кинетическом уравнении для ФПВ, описывающем взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущей сплошной среды и взаимодействие частиц друг с другом в результате столкновений. Оператор взаимодействия “частица–турбулентность” определяется путем моделирования турбулентного поля скорости несущей среды гауссовым случайным процессом с известными корреляционными моментами; его вывод для анизотропного турбулентного потока представлен в [6, 7]. Поэтому основное внимание в настоящей статье будет сосредоточено на анализе взаимодействия “частица–частица”.

Взаимодействие частиц в результате столкновений рассматривается в рамках модели твердых сфер, когда скорости двух частиц после столкновения $\mathbf{v}_p^\circ, \mathbf{v}_{p1}^\circ$ связаны со скоростями этих частиц перед столкновением $\mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p1}$ соотношениями

$$\mathbf{v}_p^\circ = \mathbf{v}_p + 1/2(1+e)(\mathbf{w}_p \mathbf{I})\mathbf{I}, \quad \mathbf{v}_{p1}^\circ = \mathbf{v}_{p1} - 1/2(1+e)(\mathbf{w}_p \mathbf{I})\mathbf{I} \quad (1.1)$$

где e – коэффициент восстановления импульса при соударении; $\mathbf{w}_p \equiv \mathbf{v}_{p1} - \mathbf{v}_p$ – относительная скорость сталкивающихся частиц; \mathbf{I} – единичный вектор, направленный от центра первой частицы к центру второй при ударе.

С учетом столкновений кинетическое уравнение для одночастичной ФПВ $P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ распределения скорости в анизотропном турбулентном потоке представляется в виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i} \left[\left(\frac{U_i - v_i}{\tau_p} + F_i \right) P \right] = \lambda_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_j} + \mu_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial v_j} + \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{coll} \quad (1.2)$$

$$\lambda_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left(\frac{f_{ukj}}{\tau_p} + l_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} + \tau_p m_{ukl} \frac{\partial U_n}{\partial x_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \quad (1.3)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{D_p}{Dt} \langle u'_i u'_k \rangle \left(f_{u1kj} + \tau_p l_{u1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right)$$

$$\mu_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left(g_{ukj} + \tau_p h_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p}{2} \frac{\langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} g_{u1kj} \quad (1.4)$$

$$\frac{D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k v'_n \rangle}{\partial x_n}$$

Здесь t – время, x_i – пространственная координата, v_i – скорость частицы, U_i – осредненная скорость сплошной несущей среды, τ_p – время динамической релаксации частицы, F_i – ускорение внешней силы (например, силы тяжести), $\langle u'_i u'_k \rangle$ – турбулентные напряжения в сплошной среде.

Первые два члена в правой части (1.2) описывают взаимодействие частиц с турбулентными вихрями, а третий символизирует вклад столкновений частиц. Если время

взаимодействия частиц с энергоемкими турбулентными вихрями T_{Lp} много меньше характерного промежутка времени между столкновениями двух частиц τ_c , то влиянием столкновений на взаимодействие “частица–турбулентность” можно пренебречь. В этом случае величины λ_{ij} и μ_{ij} определяются согласно (1.3) и (1.4), где коэффициенты f_{uij} , g_{uij} , l_{uij} , h_{uij} , m_{uij} , f_{ulij} , g_{ulij} , l_{ulij} характеризуют степень вовлечения частиц в турбулентное движение сплошной среды и даны в [7, 8]. При нарушении условия $T_{Lp} \ll \tau_c$ выражения (1.3) и (1.4) будем по-прежнему считать справедливыми, учитывая эффект столкновений через влияние на T_{Lp} в приближении изотропной однородной турбулентности [9].

Для модели твердых сфер (1.1) оператор столкновений представляется в виде интеграла типа Больцмана [1]

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{coll} = d_p^2 \int_{\mathbf{wI} < 0} [P(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\circ, \mathbf{x} + d_p \mathbf{I}, \mathbf{v}_1^\circ, t) - P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x} + d_p \mathbf{I}, \mathbf{v}_1, t)] (\mathbf{wI}) d\mathbf{I} dv_1 \quad (1.5)$$

где условие $\mathbf{wI} < 0$ указывает, что интегрирование выполняется по значениям \mathbf{I} и \mathbf{v}_1 , для которых реализуются столкновения частиц; d_p – диаметр частиц.

В соотношении (1.5) входит двухчастичная ФПВ, определенная как

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t) = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{R}_{p1}(t)) \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{p1}(t)) \rangle$$

Для большинства практических приложений решение кинетического уравнения не только очень дорого с вычислительной точки зрения, но и не является необходимым, поскольку первые несколько моментов ФПВ достаточны для описания основных макроскопических свойств течения. Из (1.2) с учетом (1.3)–(1.5) следует цепочка уравнений для одноточечных статистических моментов одночастичной ФПВ. Обрывая эту цепочку на уровне третьих моментов и выражая четвертые моменты при помощи квазинормальной гипотезы в виде произведения вторых моментов, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau_p} + F_i - \frac{D_{pik} \partial \ln \Phi}{\tau_p \partial x_k} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k} = & - (\langle v_i' v_k' \rangle + \mu_{ik}) \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - (\langle v_j' v_k' \rangle + \mu_{jk}) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ & + \lambda_{ij} + \lambda_{ji} - \frac{2 \langle v_i' v_j' \rangle}{\tau_p} + C_{ij} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_n} = & - \langle v_i' v_j' v_n' \rangle \frac{\partial V_k}{\partial x_n} - \langle v_i' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_j}{\partial x_n} - \langle v_i' v_k' v_n' \rangle \frac{\partial V_i}{\partial x_n} - \\ & - \frac{D_{pin} \partial \langle v_j' v_k' \rangle}{\tau_p \partial x_n} - \frac{D_{pjn} \partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\tau_p \partial x_n} - \frac{D_{pkn} \partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\tau_p \partial x_n} - \frac{3 \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\tau_p} + C_{ijk} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Столкновения не дают вклад в уравнения (1.6) и (1.7), поскольку масса и количество движения системы частиц при соударениях сохраняются. Величины C_{ij} и C_{ijk} обозначают вклад столкновений в уравнения баланса вторых и третьих моментов пульсаций скорости дисперсной фазы. Тензор турбулентной диффузии частиц D_{pik} в (1.7) и (1.9) определяется как

$$\begin{aligned}
 D_{pij} &= \tau_p(\langle v_i'v_j' \rangle + \mu_{ij}) = \\
 &= \tau_p(\langle v_i'v_j' \rangle + \langle u_i'u_k' \rangle g_{ukj}) + \tau_p^2 \langle u_i'u_k' \rangle h_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - \frac{\tau_p^2 D_p \langle u_i'u_k' \rangle}{2} g_{u1kj}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Вторые корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
 \langle u_i'v_j' \rangle &= \langle u_i'u_k' \rangle \left[f_{kj} + \tau_p \left(l_{kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) \right] - \\
 &- \frac{\tau_p D \langle u_i'u_k' \rangle}{2} \left[f_{1kj} + \tau_p \left(l_{1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} - g_{1kn} \frac{\partial V_j}{\partial x_n} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Третьи моменты, входящие в $D_p \langle u_i'u_j' \rangle / Dt$ и описывающие диффузионный перенос пульсаций скорости сплошной среды вдоль траекторий инерционных частиц, представляются как

$$\langle u_i'u_j'v_k' \rangle = -\frac{1}{3} \left(D_{pin} \frac{\partial \langle u_j'u_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pjn} \frac{\partial \langle u_i'u_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pkn} \frac{\partial \langle u_i'u_j' \rangle}{\partial x_n} \right) \tag{1.12}$$

Как видно из (1.10)–(1.12), столкновения частиц не оказывают непосредственного влияния на тензор турбулентной диффузии частиц и корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз. Однако столкновения могут оказывать косвенное влияние на эти величины через изменение времени взаимодействия частиц с турбулентными вихрями.

2. Моделирование столкновений. При небольшой объемной концентрации ($\Phi \leq 0.01$) непосредственным вкладом межчастичных столкновений в напряжения и поток пульсационной энергии дисперсной фазы можно пренебречь. Это означает, что “столкновительные члены” входят в систему уравнений для моментов только в виде источников и не содержат составляющие в виде потоков. Таким образом, столкновительные члены в (1.8) и (1.9) представляются в виде [3]

$$C_{ij} = \frac{1}{\Phi} \int v_i'v_j' \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v} = \frac{6}{\pi d_p \Phi} \int \int \int_{w\mathbf{l} < 0} (w\mathbf{l}) P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x} + d_p \mathbf{l}, \mathbf{v}_1, t) \{v_i'v_j'\} d\mathbf{l} dv dv_1 \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} &= \frac{1}{\Phi} \int v_i'v_j'v_k' \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{coll} d\mathbf{v} = \\
 &= \frac{6}{\pi d_p \Phi} \int \int \int_{w\mathbf{l} < 0} (w\mathbf{l}) P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x} + d_p \mathbf{l}, \mathbf{v}_1, t) \{v_i'v_j'v_k'\} d\mathbf{l} dv dv_1 \\
 \{\Psi\} &= \frac{\Psi^o + \Psi_1^o - \Psi - \Psi_1}{2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

В соответствии с моделью соударений частиц (1.1)

$$\{V_i\} = 0 \tag{2.3}$$

$$\{v_i'v_j'\} = \frac{1}{4} (1 + e)(w\mathbf{l}) [(1 + e)(w\mathbf{l})l_j - (w_i' l_j + w_1' l_j)] \tag{2.4}$$

$$\{v'_i v'_j v'_k\} = \frac{1}{4}(1+e)(\mathbf{w}'\mathbf{I})[l_i(v'_i v'_k - v'_{1j} v'_{1k}) + l_j(v'_i v'_k - v'_{1i} v'_{1k}) + l_k(v'_i v'_j - v'_{1i} v'_{1j})] + \frac{(1+e)^2}{8}(\mathbf{w}'\mathbf{I})^2[l_i l_j(v'_k + v'_{1k}) + l_i l_k(v'_j + v'_{1j}) + l_j l_k(v'_i + v'_{1i})] \quad (2.5)$$

Равенство (2.3) выражает факт сохранения количества движения при соударениях частиц. Как следует из (2.1) и (2.2), для нахождения столкновительных членов необходимо определить ФПВ скоростей двух частиц в момент соударения. Для этой цели по аналогии с гипотезой молекулярного хаоса в кинетической теории газов может быть использовано предположение о некоррелированности (статистической независимости) движения частиц. В соответствии с этим допущением двухчастичная ФПВ представляется в виде произведения одночастичных функций, и получающиеся выражения для описания столкновений частиц в турбулентном потоке по существу оказываются аналогичными соответствующим соотношениям в кинетической теории газов [10–14]. Однако такой подход действителен только для высокоинерционных частиц, время динамической релаксации которых много больше интегрального масштаба турбулентности, а их относительное движение некоррелировано и аналогично хаотическому движению молекул. Поэтому для описания столкновений частиц произвольной инерционности будем основываться на коррелированном гауссовом распределении скоростей частиц [5]. Такой подход в сочетании с разложением Грэда позволяет получить простые явные выражения для столкновительных членов с учетом коррелированности движения частиц.

Коррелированная гауссова ФПВ скоростей двух небольших частиц, размер которых не превышает пространственный колмогоровский микромасштаб, в изотропной турбулентности описывается распределением [5]

$$P^{(0)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \frac{\Phi^2}{(2\pi v^2)^3 (1-f_u^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v'_k v'_k + v'_{1k} v'_{1k} - 2f_u v'_k v'_{1k}}{2v^2(1-f_u^2)}\right) \quad (2.6)$$

$$f_u = \frac{1}{\tau_p} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p}\right) d\tau$$

Здесь f_u – коэффициент вовлечения частиц в изотропную турбулентность, где $\Psi_{Lp}(\tau)$ – автокорреляционная функция пульсаций скорости сплошной среды вдоль траектории частицы.

Для учета анизотропии скоростей частиц в соответствии с методом Грэда представим двухчастичную ФПВ в виде разложения по полиномам Эрмита [15, 16]. Уникальность использования полиномов Эрмита по сравнению с другими базисными функциями состоит в том, что коэффициенты разложения выражаются через моменты ФПВ порядка не выше рассматриваемого члена разложения. Таким образом, двухчастичная ФПВ представляется в виде

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \left[1 + R_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i} + \frac{\partial}{\partial v_{1i}} \right) + \frac{R_{ij}}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} + \frac{\partial^2}{\partial v_{1i} \partial v_{1j}} \right) + \frac{Q_{ij}}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_{1j}} + \frac{\partial^2}{\partial v_{1i} \partial v_j} \right) + \frac{R_{ijk}}{3!} \left(\frac{\partial^3}{\partial v_i \partial v_j \partial v_k} + \frac{\partial^3}{\partial v_{1i} \partial v_{1j} \partial v_{1k}} \right) + \frac{Q_{ijk}}{3!} \left(\frac{\partial^3}{\partial v_i \partial v_j \partial v_{1k}} + \frac{\partial^3}{\partial v_i \partial v_{1j} \partial v_k} + \frac{\partial^3}{\partial v_{1i} \partial v_j \partial v_k} + \frac{\partial^3}{\partial v_{1i} \partial v_{1j} \partial v_k} + \frac{\partial^3}{\partial v_i \partial v_{1j} \partial v_k} + \frac{\partial^3}{\partial v_i \partial v_{1j} \partial v_{1k}} + \frac{\partial^3}{\partial v_{1i} \partial v_j \partial v_{1k}} \right) \right] P^{(0)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) \quad (2.7)$$

где $P^{(0)}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ определяется согласно (2.6).

В [17] использован несколько более общий подход для определения $P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ в анизотропной турбулентности по сравнению с разложением (2.7). Этот подход основан на построении разложения Грэда для совместной ФПВ скоростей сплошной среды и частицы $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Таким образом, непосредственно учитывается вклад в $P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ не только анизотропии скоростей частиц, но и анизотропии скоростей жидкости и корреляций скоростей обеих фаз. Однако построенная таким образом $P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$ включает только квадратичные члены разложения по скоростям частиц, что дает возможность определить C_{ij} . Учет в рамках этого подхода кубических членов разложения, необходимых для нахождения C_{ijk} , представляется чрезвычайно громоздким. Поэтому с целью получения относительно простых аналитических выражений как для C_{ij} , так и для C_{ijk} будем основываться на разложении (2.7).

Коэффициенты R_i, R_{ij}, R_{ijk} в (2.7) находятся из условий

$$\frac{1}{\Phi} \iint v_i' P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = \langle v_i' \rangle = 0, \quad \frac{1}{\Phi} \iint v_i' v_j' P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = \langle v_i' v_j' \rangle$$

$$\frac{1}{\Phi} \iint v_i' v_j' v_k' P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 = \langle v_i' v_j' v_k' \rangle$$

Откуда

$$R_i = 0, \quad R_{ij} = \langle v_i' v_j' \rangle - v^2 \delta_{ij}, \quad R_{ijk} = -\langle v_i' v_j' v_k' \rangle \quad (2.8)$$

Кроме того, поскольку величина f_u определяет коэффициент корреляции скоростей двух частиц [5, 16], следует положить

$$Q_{ij} = f_u R_{ij}, \quad Q_{ijk} = f_u R_{ijk} \quad (2.9)$$

$$\langle v_i' v_j' \rangle = f_u \langle v_i' v_j' \rangle, \quad \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = f_u \langle v_i' v_j' v_k' \rangle$$

С учетом (2.6), (2.8) и (2.9) двухчастичная ФПВ (2.7) примет вид

$$P(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \frac{\Phi^2}{(2\pi v^2)^3 (1 - f_u^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v_k' v_k' + v_{1k}' v_{1k}' - 2f_u v_k' v_{1k}'}{2v^2(1 - f_u^2)}\right) \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{\langle v_i' v_j' \rangle - v^2 \delta_{ij}}{2v^4(1 - f_u^2)} [v_i' v_j' + v_{1i}' v_{1j}' - f_u (v_i' v_{1j}' + v_{1i}' v_j')] + \right.$$

$$+ \frac{\langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{6v^6(1 - f_u^2)^3} [(1 - f_u)^2 (1 + 2f_u) (v_i' v_j' v_k' + v_{1i}' v_{1j}' v_{1k}')] -$$

$$- f_u^2 (1 - f_u)^2 (v_i' v_j' v_{1k}' + v_i' v_{1j}' v_k' + v_{1i}' v_j' v_k' + v_{1i}' v_{1j}' v_k' + v_i' v_{1j}' v_{1k}' + v_{1i}' v_j' v_{1k}') -$$

$$\left. - \frac{(1 + 2f_u) \langle v_i' v_k' v_k' \rangle}{2v^4(1 + f_u)^2} (v_i' + v_{1i}') \right\} \quad (2.10)$$

Для удобства дальнейших вычислений перейдем к скоростям, характеризующим совместное и относительное движения двух частиц

$$\mathbf{q} = 0.5(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}), \quad \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v} \quad (2.11)$$

В новых переменных ФПВ (2.10) представляется как

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{q}, \mathbf{w}) = & \frac{\Phi^2}{(2\pi v^2)^3 (1-f_u)^{3/2}} \exp\left(-\frac{q'_i q'_k}{v^2(1+f_u)} - \frac{w'_i w'_k}{4v^2(1-f_u)}\right) \times \\
 & \times \left\{ 1 + \frac{\langle v'_i v'_j \rangle - v'^2 \delta_{ij}}{4v^4(1-f_u)^2} [4(1-f_u)q'_i q'_j + (1+f_u)w'_i w'_j] + \right. \\
 & + \frac{\langle v'_i v'_j v'_k \rangle}{12v^6(1-f_u)^3} [4(1-f_u)^3(1+3f_u)q'_i q'_j q'_k + (1-f_u)^2(q'_i w'_j w'_k + q'_j w'_i w'_k + q'_k w'_i w'_j)] - \\
 & \left. - \frac{(1+2f_u)\langle v'_i v'_k v'_k \rangle}{v^4(1+f_u)^2} q'_i \right\} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Переходя в (2.1) и (2.2) к переменным (2.11) и выполняя интегрирование с учетом (2.4), (2.5) и (2.12), получим следующие выражения для столкновительных членов:

$$C_{ij} = -\frac{2(1-e^2)(1-f_u)k_p}{9\tau_c} \delta_{ij} - \frac{2(1-f_u)}{\tau_{c1}} \left(\langle v'_i v'_j \rangle - \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 C_{ijk} = & -\frac{3(1-f_u)}{\tau_{c1}} [\langle v'_i v'_j v'_k \rangle - E(\langle v'_i v'_n v'_n \rangle \delta_{jk} + \langle v'_j v'_n v'_n \rangle \delta_{ik} + \langle v'_k v'_n v'_n \rangle \delta_{ij})] \\
 \tau_c = & \frac{d_p}{16\Phi(1-f_u)^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{3k_p} \right)^{1/2}, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\tau_{c1} = \frac{5d_p}{8(1+e)(3-e)\Phi(1-f_u)^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{3k_p} \right)^{1/2} = \frac{10\tau_c}{(1+e)(3-e)}, \quad E = \frac{1+3e}{18(3-e)}$$

Здесь τ_c, τ_{c1} – характерные времена между столкновениями частиц; $k_p \equiv \langle v'_n v'_n \rangle / 2$ – кинетическая турбулентная энергия частиц. Как видно из уравнений (1.8) и (1.9) с учетом (2.13) и (2.14), вклад членов, описывающих взаимодействие частиц с турбулентными вихрями и межчастичное взаимодействие в результате столкновений, характеризуется отношением времен τ_c/τ_p . При $\tau_c/\tau_p \gg 1$ роль столкновений незначительна, а при $\tau_c/\tau_p \ll 1$ столкновения играют определяющую роль в формировании статистики поля скорости частиц.

В соответствии с (2.13) влияние столкновений на турбулентные напряжения дисперсной фазы проявляется в двух аспектах: во-первых, в диссипации флуктуаций скоростей частиц вследствие неупругих соударений и, во-вторых, в перераспределении пульсационной энергии между различными компонентами. Второй эффект пропорционален степени анизотропии турбулентных пульсаций скорости частиц и обеспечивает стремление $\langle v'_i v'_j \rangle$ к изотропному состоянию. Этот эффект аналогичен влиянию пульсаций давления на турбулентные напряжения сплошной среды [18].

В рамках 13-моментного приближения Грэда имеет место следующая связь между тройными корреляциями и их свертками [3]

$$\langle v'_i v'_j v'_k \rangle = \frac{1}{5} (\langle v'_i v'_n v'_n \rangle \delta_{jk} + \langle v'_j v'_n v'_n \rangle \delta_{ik} + \langle v'_k v'_n v'_n \rangle \delta_{ij}) \quad (2.15)$$

Выражение (2.14) с учетом (2.15) примет вид

$$C_{ijk} = -\frac{3(1-f_u)(1-5E)}{\tau_{c1}} \langle v_i' v_j' v_k' \rangle = -\frac{3(1-f_u)}{\tau_{c2}} \langle v_i' v_j' v_k' \rangle, \quad (2.16)$$

$$\tau_{c2} = \frac{180\tau_c}{(1+e)(49-33e)}$$

Из (2.14) и (2.16) видно, что столкновения приводят к уменьшению тройных корреляций пульсаций скорости дисперсной фазы. При $f_u \rightarrow 0$ формулы (1.24), (2.14) и (2.16) переходят в соотношения для столкновительных членов, полученные в [3] для некоррелированного хаотического движения частиц. С увеличением коэффициента вовлечения частиц f_u (уменьшением инерционности частиц) возрастает коррелированность их движения, что приводит к снижению влияния столкновений на турбулентность дисперсной фазы.

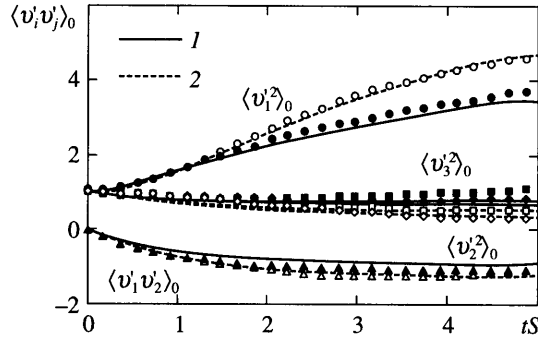
Если в (1.9) пренебречь членами, описывающими эволюцию во времени, конвекцию и порождение третьих моментов за счет градиентов осредненной скорости, то для третьих моментов пульсаций скорости с учетом (2.16) получаются алгебраические градиентные соотношения

$$\langle v_i' v_j' v_k' \rangle = -\frac{[1 + (1-f_u)\tau_p/\tau_{c2}]^{-1}}{3} \left(D_{pin} \frac{\partial \langle v_j' v_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pjn} \frac{\partial \langle v_i' v_k' \rangle}{\partial x_n} + D_{pkn} \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_n} \right) \quad (2.17)$$

При незначительной роли столкновений, т.е. когда время релаксации частиц много меньше времени между столкновениями ($\tau_p/\tau_{c2} \ll 1$), (2.17) переходит в градиентную аппроксимацию для третьих моментов, представленную в [7, 8]. Согласно (2.17) с уменьшением инерционности частиц и соответственно с возрастанием коррелированности их движения влияние столкновений на диффузионный перенос пульсаций скорости уменьшается. Из (2.17) следует, что, если не учитывать изменение вторых моментов $\langle v_i' v_j' \rangle$, столкновения должны приводить к уменьшению тройных корреляций, а следовательно, к снижению роли диффузионного механизма переноса пульсаций скорости частиц. Однако с учетом влияния столкновений на $\langle v_i' v_j' \rangle$ эффект может оказаться прямо противоположным, и, как получено в экспериментах [19], столкновения приводят к росту тройных моментов и, следовательно, к интенсификации турбулентного транспорта пульсаций скорости дисперсной фазы. Кроме того, в концентрированной дисперсной среде ($\Phi \geq 0.1$) столкновения частиц увеличивают диффузионный турбулентный перенос благодаря непосредственному вкладу в потоки пульсаций скорости [14].

Ниже представленная модель столкновений частиц в турбулентном потоке используется для анализа течений в однородном сдвиговом слое и плоском канале. Вследствие однородности поля скорости несущего турбулентного потока тройные моменты пульсаций скоростей частиц обращаются в нуль, и поэтому однородный сдвиговый поток имеет фундаментальное значение для верификации моделей для вторых моментов. Течение в канале является примером неоднородного сдвигового течения и позволяет осуществить верификацию моделей для третьих моментов, описывающих диффузионный перенос пульсаций скоростей. Дополнительной мотивацией для тестирования развиваемой модели в однородном сдвиговом слое и плоском канале является наличие результатов прямых численных расчетов характеристик дисперсной фазы для этих течений, полученных как с учетом, так и без учета столкновений частиц. Отметим, что сопоставление развиваемой статистической модели взаимодействия инерционных частиц с турбулентными вихрями без учета столкновений для однородного сдвигового потока и течения в плоском канале выполнено соответственно в [7] и [8].

3. Однородный сдвиговый поток. Рассмотрим перенос частиц в однородном турбулентном потоке с постоянной скоростью сдвига при отсутствии внешних сил. Вслед-



Фиг. 1. Влияние столкновений на турбулентные напряжения дисперсной фазы в однородном сдвиговом слое

ствии однородности потока из (1.6) и (1.7) следует, что концентрация частиц в пространстве не изменяется, а градиенты сплошной и дисперсной фаз равны. Эти градиенты задаются соотношением

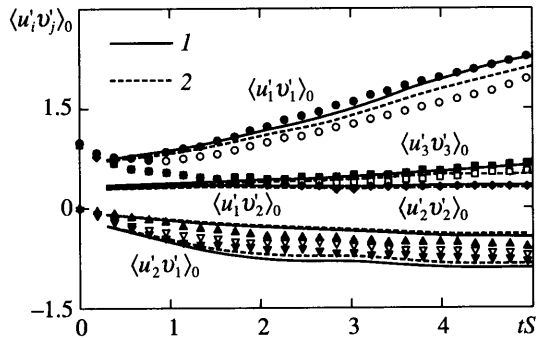
$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = S \delta_{i1} \delta_{j2} \quad (3.1)$$

где S – скорость сдвига.

Вторые моменты пульсаций скорости (турбулентные напряжения) дисперсной фазы и вторые корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз определяются соответственно из решений уравнений (1.8) и (1.11), упрощенных с учетом (3.1). Величина C_{ij} в (1.8) определяется согласно (2.13). Тензор времени взаимодействия “частица–турбулентность” T_{Lp} , входящий в выражения для коэффициентов вовлечения (1.3) и (1.4), задается такими же соотношениями, как и в [7]. Однако с целью учета влияния столкновений число Стокса St_E в этих соотношениях заменяется на эффективное число Стокса $St_* = (St_E^5 + 10St_c^5)^{1/5}$, являющееся аппроксимацией расчетов [9] (здесь $St_E \equiv \tau_p/T_E$, $St_c \equiv \tau_p/\tau_c$, T_E – эйлеров временной макромасштаб турбулентности).

В качестве примера рассмотрим развивающееся во времени однородное сдвиговое течение, турбулентные характеристики которого получены путем лагранжева моделирования движения отдельных частиц в сочетании с методом крупных вихрей для сплошной среды [20]. Начальные условия соответствуют изотропной турбулентности. Градиент средней скорости равнялся 50 с^{-1} , диаметр частиц $d_p = 656 \text{ мкм}$, отношение плотностей дисперсной и сплошной сред $\rho_p/\rho_f = 85.5$, объемная концентрация частиц $\Phi = 0.0125$. Сила тяжести не учитывалась, а столкновения частиц предполагались упругими ($e = 1$).

На фиг. 1 и 2 показано развитие во времени соответственно турбулентных напряжений дисперсной фазы и корреляционных моментов пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз под действием сдвига скорости от изотропного к равновесному состоянию. Результаты решения упрощенных с учетом (3.1) уравнений (1.8) и (1.11), полученные с учетом и без учета столкновений частиц, показаны кривыми 1 и 2, а данные прямых расчетов [20] с учетом и без учета столкновений изображены зачерненными и незачерненными символами. Турбулентные напряжения дисперсной фазы $\langle v_i v_j \rangle$ на фиг. 1 нормированы на начальную кинетическую энергию частиц $k_p(0)$, а корреляции скоростей сплошной и дисперсной фаз $\langle u_i v_j \rangle$ на фиг. 2 отнесены к начальной “кинетической энергии” этих корреляций $k_{fp}(0)$, где $k_{fp} \equiv \langle u_n v_n \rangle / 2$ ($\langle v_i v_j \rangle_0 = 3 \langle v_i v_j \rangle / 2k_p(0)$, $\langle u_i v_j \rangle_0 = 3 \langle u_i v_j \rangle / 2k_{fp}(0)$).



Фиг. 2. Влияние столкновений на корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз в однородном сдвиговом слое

Из фиг. 1 видна сильная анизотропия пульсаций скорости частиц при отсутствии эффекта столкновений, выражающаяся в существенно большей интенсивности продольной компоненты по сравнению с поперечными компонентами. В этом случае имеются два механизма генерации продольной компоненты скорости дисперсной фазы – под действием градиента осредненной скорости и в результате взаимодействия частиц с турбулентными вихрями сплошной среды, тогда как пульсации в поперечных направлениях возникают только благодаря взаимодействию с турбулентными вихрями. Столкновения приводят к выравниванию интенсивностей пульсаций частиц в разных направлениях, т.е. к изотропизации турбулентных характеристик дисперсной фазы, уменьшая интенсивность продольной компоненты и увеличивая интенсивности поперечных компонент пульсаций скорости.

Обращает на себя внимание противоположный характер влияния столкновений на продольные компоненты $\langle v_1^2 \rangle$ и $\langle u_1' v_1' \rangle$. Теоретическая модель в соответствии с данными численного моделирования предсказывает увеличение $\langle u_1' v_1' \rangle$ в результате учета эффекта столкновений (фиг. 2), хотя и менее выраженное по сравнению с [20]. Влияние столкновений на $\langle u_i' v_j' \rangle$ проявляется через зависимость времени взаимодействия частиц с турбулентностью от времени между столкновениями частиц τ_c . В целом, сравнение с данными [20] показывает, что представленная модель воспроизводит все основные особенности влияния столкновений частиц на структуру как пульсаций скорости дисперсной фазы, так и корреляций скоростей сплошной и дисперсной фаз.

4. Течение в плоском канале. Рассмотрим, как и в [8], гидродинамически развитое течение в длинном плоском канале вдали от входа. Все характеристики сплошной и дисперсной фаз предполагаются зависимыми только от нормальной к стенке координаты $x_2 = y$. Стенки канала непроницаемы, а осаждение частиц отсутствует; следовательно, нормальные компоненты осредненных скоростей обеих фаз равны нулю ($U_2 = V_2 = 0$). Уравнения баланса количества движения в продольном и нормальном направлениях, получающиеся из (1.7) и (1.10), без учета силы тяжести запишутся в виде

$$\frac{V_1 - U_1}{\tau_p} + \frac{d\langle v_1' v_2' \rangle}{dy} + (\langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12}) \frac{d \ln \Phi}{dy} = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{d\langle v_2'^2 \rangle}{dy} + (\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22}) \frac{d \ln \Phi}{dy} = 0 \tag{4.2}$$

Последние два члена в левой части (4.1) учитывают вклад турбулентных напряжений и турбулентной диффузии в баланс сил в продольном направлении. Уравнение (4.2) вы-

ражает баланс силы турбофореза и диффузионной силы, уравнивающей миграцию частиц поперек канала в направлении уменьшения интенсивности поперечной компоненты пульсаций скорости.

Из (1.8) с учетом (2.13) и (2.17) получается система уравнений для ненулевых компонент турбулентных напряжений дисперсной фазы

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left\{ \Phi \tau_{p2}^* \left[\langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22} \right] \frac{d \langle v_1'^2 \rangle}{dy} + 2 \langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12} \right] \frac{d \langle v_1' v_2' \rangle}{dy} \left. \right\} - 2 \langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12} \frac{dV_1}{dy} +$$

$$+ 2\lambda_{11} - \frac{2 \langle v_1'^2 \rangle}{\tau_p} - \frac{2(1-e^2)(1-f_u)k_p}{9\tau_c} - \frac{2(1-f_u)}{\tau_{c1}} \left(\langle v_1'^2 \rangle - \frac{2}{3}k_p \right) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d}{dy} \left[\Phi \tau_{p2}^* \langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22} \right] \frac{d \langle v_2'^2 \rangle}{dy} + 2\lambda_{22} - \frac{2 \langle v_2'^2 \rangle}{\tau_p} -$$

$$- \frac{2(1-e^2)(1-f_u)k_p}{9\tau_c} - \frac{2(1-f_u)}{\tau_{c1}} \left(\langle v_2'^2 \rangle - \frac{2}{3}k_p \right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left[\Phi \tau_{p2}^* \langle v_3'^2 \rangle + \mu_{22} \right] \frac{d \langle v_3'^2 \rangle}{dy} + 2\lambda_{33} - \frac{2 \langle v_3'^2 \rangle}{\tau_p} -$$

$$- \frac{2(1-e^2)(1-f_u)k_p}{9\tau_c} - \frac{2(1-f_u)}{\tau_{c1}} \left(\langle v_3'^2 \rangle - \frac{2}{3}k_p \right) = 0 \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{3\Phi} \frac{d}{dy} \left\{ \Phi \tau_{p2}^* \left[2 \langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22} \right] \frac{d \langle v_1' v_2' \rangle}{dy} + \langle v_1' v_2' \rangle + \mu_{12} \right] \frac{d \langle v_2'^2 \rangle}{dy} \left. \right\} -$$

$$- \langle v_2'^2 \rangle + \mu_{22} \frac{dV_1}{dy} + \lambda_{12} + \lambda_{21} - \frac{2 \langle v_1' v_2' \rangle}{\tau_p} - \frac{2(1-f_u)}{\tau_{c1}} \langle v_1' v_2' \rangle = 0 \quad (4.6)$$

$$\tau_{p2}^* = \frac{\tau_p \tau_{c2}}{\tau_p (1-f_u) + \tau_{c2}}$$

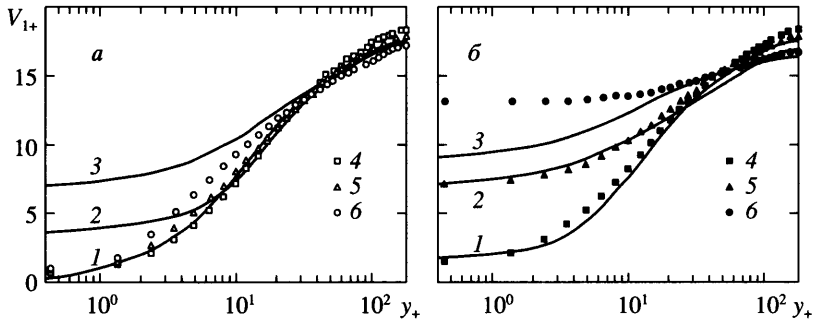
Величины λ_{ij} и μ_{ij} в (4.3)–(4.6), характеризующие взаимодействие частиц с турбулентными вихрями, выражаются согласно (1.3) и (1.4), где производные $D_p \langle u_i' u_j' \rangle / Dt$ определяются с учетом (1.12). Далее, как и в [8], лагранжев временной макромасштаб предполагается изотропным, однако учитывается различие во времени взаимодействия частиц с турбулентными вихрями \mathbf{T}_{Lp} в разных направлениях, обусловленное “эффектом пересечения траекторий” [21, 22]. Влияние столкновений на \mathbf{T}_{Lp} осуществляется путем замены St_E на эффективное число Стокса St_* .

В качестве граничных условий для компонент турбулентных напряжений на стенке канала задаются [23, 24]

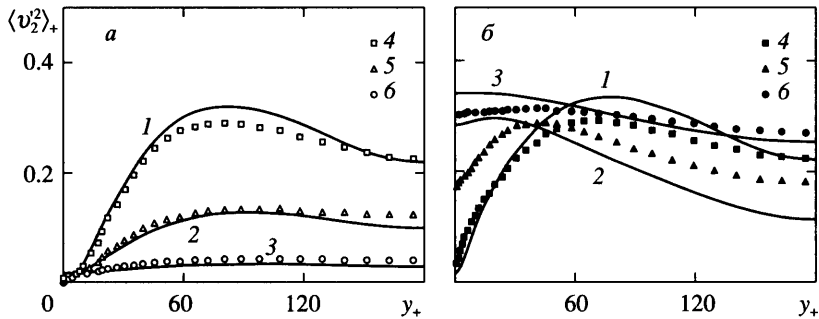
$$\tau_{p2}^* \frac{d \langle v_1'^2 \rangle}{dy} = 3 \frac{1-e_x^2}{1+e_x^2} \left(\frac{2}{\pi \langle v_2'^2 \rangle} \right)^{1/2} \langle v_1'^2 \rangle, \quad \tau_{p2}^* \frac{d \langle v_2'^2 \rangle}{dy} = 2 \frac{1-e_y^2}{1+e_y^2} \left(\frac{2 \langle v_2'^2 \rangle}{\pi} \right)^{1/2}, \quad \frac{d \langle v_3'^2 \rangle}{dy} = 0 \quad (4.7)$$

$$\langle v_1' v_2' \rangle = -\mu_x \langle v_2'^2 \rangle, \quad y = 0$$

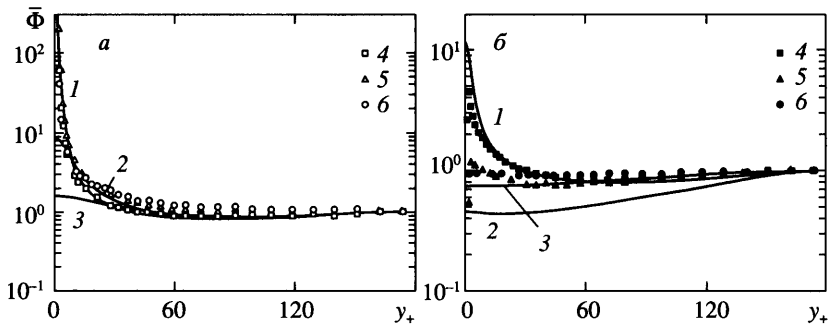
где e_x, e_y – коэффициенты восстановления импульса при соударении частицы со стенкой; μ_x – коэффициент трения.



Фиг. 3. Распределения осредненной осевой скорости частиц по сечению канала без учета (а) и с учетом (б) столкновений: 1–3 – решения задачи (4.1)–(4.8); 4–6 – [25]; 1, 4 – $\tau_+ = 29$; 2, 5 – $\tau_+ = 117$; 3, 6 – $\tau_+ = 468$



Фиг. 4. Распределения интенсивности пульсаций поперечной скорости по сечению канала: обозначения те же, что на фиг. 3



Фиг. 5. Распределения концентрации частиц по сечению канала: обозначения те же, что на фиг. 3

На оси канала выполняются условия симметрии

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d\langle v_1^2 \rangle}{dy} = \frac{d\langle v_2^2 \rangle}{dy} = \frac{d\langle v_3^2 \rangle}{dy} = \langle v_1' v_2' \rangle = 0, \quad y = R \quad (4.8)$$

где R – полуширина канала.

На фиг. 3–5 представлены результаты сопоставления решения задачи (4.1)–(4.8) с данными лагранжева траекторного моделирования динамики частиц в турбулентном

потоке, создаваемом при помощи метода крупных вихрей [25]. В этой работе рассчитывалось течение в плоском канале при отсутствии силы тяжести и обратного влияния дисперсной фазы на несущую сплошную среду; число Рейнольдса $Re_+ \equiv Ru_*/\nu$ равнялось 180. Столкновения частиц со стенками канала и друг с другом считались упругими, в связи с чем в граничных условиях (4.7) принималось $e_x = e_y = 1$, $\mu_x = 0$ и, кроме того, коэффициент восстановления импульса при соударениях e полагался равным 1. Расчеты выполнены при фиксированном значении средней объемной концентрации частиц в канале $\Phi_m = 2.3 \cdot 10^{-4}$. Безразмерный размер частиц $d_+ \equiv d_p u_*/\nu$ равнялся 1, а время релаксации τ_p варьировалось за счет изменения отношения плотностей дисперсной и сплошной фаз ρ_p/ρ_f . Безразмерные переменные определены с помощью коэффициента кинематической вязкости жидкости ν и динамической скорости u_* , а концентрация частиц отнесена к своему значению на оси канала:

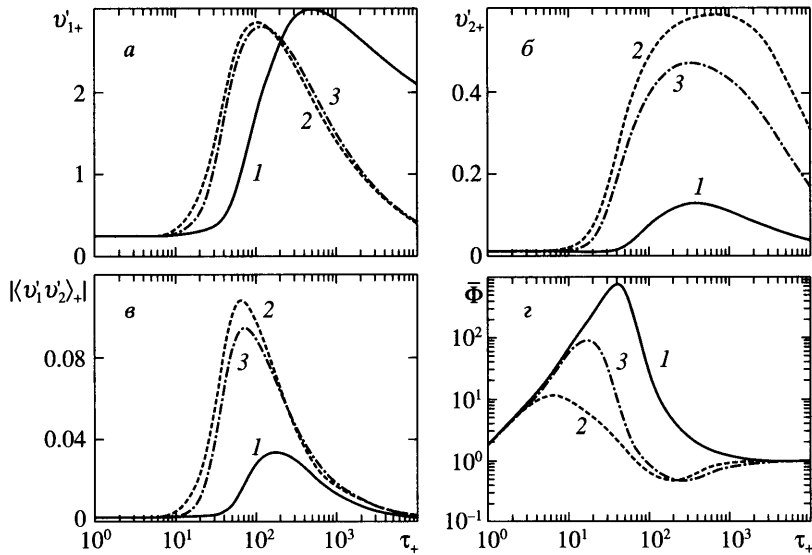
$$U_{1+} = \frac{U_1}{u_*}, \quad V_{1+} = \frac{V_1}{u_*}, \quad u'_{i+} = \frac{\langle u_i'^2 \rangle^{1/2}}{u_*}, \quad v'_{i+} = \frac{\langle v_i'^2 \rangle^{1/2}}{u_*}, \quad y_+ = \frac{yu_*}{\nu},$$

$$\tau_+ = \frac{\tau_{p0} u_*^2}{\nu}; \quad \bar{\Phi} \equiv \frac{\Phi}{\Phi(R)}$$

Столкновения оказывают сильное воздействие на профиль осредненной продольной скорости, приводя к его выполаживанию и значительному увеличению V_1 в пристеночной области (фиг. 3). Такой характер влияния столкновений обусловлен возрастанием транспортных механизмов, приводящих к увеличению касательного турбулентного напряжения в дисперсной фазе. Имеет место существенные расхождения с данными [25] в отношении V_1 , в первую очередь, при отсутствии столкновений (фиг. 3, а). Так, согласно [25] осевая скорость вблизи стенки ($y_+ \leq 1$) даже высокоинерционных частиц ($\tau_+ = 468$) при отсутствии столкновений почти не отличается от скорости жидкости, что не согласуется с данными численного моделирования [26–28]. Однако характер влияния столкновений на профиль осевой скорости, предсказываемый моделью (4.1)–(4.8), соответствует результатам численного моделирования [25], хотя модель предсказывает несколько меньший эффект столкновений по сравнению с прямыми расчетами.

Особенно сильное влияние столкновения оказывают на поперечную и трансверсальную компоненты пульсаций скорости частиц. При отсутствии столкновений единственным механизмом, ответственным за генерацию этих компонент пульсаций, служит непосредственное взаимодействие с соответствующими компонентами пульсаций сплошной фазы, в результате чего v'_2 и v'_3 снижаются с ростом τ_+ . При наличии столкновений основной вклад в порождение v'_2 и v'_3 может давать механизм перераспределения пульсаций из продольной компоненты. Благодаря этому механизму вместо значительного уменьшения интенсивности поперечных пульсаций скорости несталкивающихся высокоинерционных частиц (кривая 3 и символы б на фиг. 4, а) поперечные пульсации сталкивающихся высокоинерционных частиц приобретают достаточно большие значения по всему сечению канала (кривая 3 и символы б на фиг. 4, б). Решающее значение эффекта столкновений в генерации поперечных (радиальных) пульсаций скорости дисперсной фазы подтверждается результатами экспериментального исследования в круглой трубе [19].

Из сопоставления фиг. 5, а и б видна роль столкновений на распределение относительной концентрации $\bar{\Phi}$ по сечению канала. Главный вывод заключается в снижении эффекта аккумуляции частиц в пристеночной области в результате столкновений. В соответствии с данными [25] модель (4.1)–(4.8) предсказывает, что столкновения могут даже приводить к меньшей концентрации частиц на стенке по сравнению со средней концентрацией в потоке. Выравнивание распределения частиц по сечению канала объ-



Фиг. 6. Влияние инерционности и столкновений на турбулентные напряжения и концентрацию частиц при $y_+ = 1$: 1 – без учета, 2 и 3 – с учетом столкновений при $e = 1$ и $e = 0.5$

ясняется интенсификацией турбулентного транспорта пульсаций скорости дисперсной фазы благодаря столкновениям.

Фигура 6 демонстрирует влияние параметра инерционности τ_+ и столкновений на турбулентные напряжения и концентрацию частиц в вязком подслое при $y_+ = 1$. Столкновения приводят к смещению максимума v'_{1+} в область менее инерционных частиц (фиг. 6, а). В результате интенсивность продольной компоненты пульсаций скорости малоинерционных частиц в пристеночной области возрастает, а высокоинерционных частиц падает. Увеличение v'_{1+} для малоинерционных частиц объясняется переносом пульсаций к стенке из ядра потока за счет столкновений, а снижение v'_{1+} для высокоинерционных частиц связано с перераспределением интенсивности пульсаций от продольной к поперечной и трансверсальной компонентам. Имеет место рост интенсивности пульсаций поперечной скорости при всех значениях параметра инерционности (фиг. 6, б). Турбулентное касательное напряжение в дисперсной фазе также возрастает при всех значениях τ_+ (фиг. 6, в), что подтверждает интенсификацию транспорта пульсаций скорости дисперсной фазы благодаря столкновениям. Особенно сильное влияние столкновения оказывают на концентрацию частиц, приводя к резкому снижению эффекта аккумуляции в пристеночной области (фиг. 6, г). Как уже отмечалось, столкновения могут даже приводить к меньшей концентрации у стенки по сравнению со средней концентрацией высокоинерционных частиц в потоке. Сравнение результатов при упругих ($e = 1$) и неупругих ($e = 0.5$) столкновениях показывает, что наиболее сильно эффект диссипации турбулентной энергии частиц, обусловленной неупругими соударениями, проявляется в снижении интенсивности поперечной компоненты пульсаций скорости. Эффект неупругости соударений частиц друг с другом может также приводить к повышению их концентрации в пристеночной области, что напоминает аналогичное влияние неупругости столкновений частиц со стенкой [8].

Заключение. Развита статистическая модель для описания столкновений частиц в анизотропных турбулентных потоках. Модель основана на кинетическом уравнении для функции плотности вероятности скорости частиц, одновременно учитывающем взаимодействие частиц с турбулентными вихрями и столкновения частиц друг с другом. Для определения двухчастичной функции плотности вероятности используется метод Грэда, обобщенный с целью учета коррелированности движения сталкивающихся частиц. Этот метод позволяет получить аналитические выражения для столкновительных членов в уравнениях баланса вторых и третьих моментов пульсаций скорости дисперсной фазы и тем самым построить статистическую модель столкновений частиц в неоднородных турбулентных потоках. Результаты сравнения с данными прямых численных расчетов течений в однородном сдвиговом слое и вертикальном канале позволяют сделать вывод, что представленная модель адекватно описывает все основные особенности влияния столкновений частиц на статистику поля скорости дисперсной фазы в анизотропных турбулентных потоках. Наиболее существенные эффекты столкновений состоят в изотропизации поля пульсаций скорости дисперсной фазы и снижении аккумуляции частиц в пристеночной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-01292).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. L.: Cambridge Univ. Press, 1970. 423 p.
2. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurnyi N.* Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flow field // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 223–256.
3. *Jenkins J.T., Richman M.W.* Grad's 13-moment system for a dense gas of inelastic spheres // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1985. V. 87. № 4. P. 355–377.
4. *Ding J., Gidaspow D.* A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow // *AIChE J.* 1990. V. 36. № 4. P. 523–538.
5. *Laviéville J., Deutsch E., Simonin O.* Large eddy simulation of interactions between colliding particles and a homogeneous isotropic turbulence field // *Proc. 6th Intern. Symp. on Gas-Particle Flows. ASME FED.* 1995. V. 228. P. 347–357.
6. *Zaichik L.I., Oesterlé B., Alipchenkov V.M.* On the probability density function model for the transport of particles in anisotropic turbulent flow // *Phys. Fluids.* 2004. V. 16. № 6. P. 1956–1964.
7. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Статистическая модель движения и дисперсии частиц в анизотропном турбулентном потоке // *Изв. РАН. МЖГ.* 2004. № 5. С. 69–83.
8. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Моделирование турбулентного движения частиц в вертикальном канале // *Изв. РАН. МЖГ.* 2006. № 4. С. 50–65.
9. *Зайчик Л.И., Алипченков В.М.* Время взаимодействия сталкивающихся частиц с турбулентными вихрями // *Теплофизика и аэромеханика.* 1999. Т. 6. № 4. С. 529–537.
10. *Abrahamson J.* Collision rates of small particles in a vigorously turbulent fluid // *Chem. Eng. Sci.* 1975. V. 30. № 11. P. 1371–1379.
11. *Louge M.Y., Mastorakos E., Jenkins J.T.* The role of particle collisions in pneumatic transport // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 231. P. 345–359.
12. *Simonin O.* Second-moment prediction of dispersed-phase turbulence in particle-laden flows // *Proc. 8th Symp. on Turbulent Shear Flows. Munich, Germany, 1991.* P. 7–4–1–7–4–6.
13. *Sommerfeld M., Zivkovic G.* Recent advances in the numerical simulation of pneumatic conveying through pipe systems // *Computational Methods in Applied Sciences.* Amsterdam: Elsevier, 1992. P. 201–212.
14. *Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Моделирование движения частиц в турбулентном потоке с учетом соударений // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 1. С. 62–78.
15. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.* Simulation of transport of colliding particles suspended in turbulent shear flows // *Proc. 2nd Intern. Symp. Turbulence, Heat and Mass Transfer. Delft, The Netherlands, 1997.* P. 823–832.

16. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Моделирование динамики сталкивающихся частиц в турбулентном сдвиговом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 105–112.
17. *Laviéville J., Simonin O., Berlemont A., Chang Z.* Validation of inter-particle collision models based on large eddy simulation in gas-solid turbulent homogeneous shear flow // Proc. 7th Intern. Symp. on Gas-Particle Flows, ASME Fluids Eng. Division Summer Meeting. 1997. FEDSM97-3623. 9 p.
18. *Rotta J.C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz // Z. Phys. 1951. Bd. 129. H. 6. S. 547–572.
19. *Caraman N., Borée J., Simonin O.* Effect of collisions on the dispersed phase fluctuation in a dilute tube flow: Experimental and theoretical analysis // Phys. Fluids. 2003. V. 15. № 12. P. 3602–3612.
20. *Moreau M., Fede P., Simonin O., Villedieu Ph.* Stochastic Lagrangian modelling and Monte Carlo simulation of collisions in gas-solid homogeneous shear turbulent flows // Proc. 5th Intern. Conf. Multiphase Flow. 2004. Yokohama, Japan. Paper № 426.
21. *Yudine M.I.* Physical consideration on heavy-particle diffusion // Advances in Geophysics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1959. V. 6. P. 185–191.
22. *Csanady G.T.* Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere // J. Atmosph. Sci. 1963. V. 20. № 3. P. 201–208.
23. *Sakiz M., Simonin O.* Development and validation of continuum particle wall boundary conditions using Lagrangian simulation of a vertical gas-solid channel flow // Proc. 7th Intern. Symp. on Gas-Solid Flows. ASME/FED. 1999. Paper № 7898.
24. *Zaichik L.I., Alipchenkov V.M.* A statistical model for transport and deposition of high-inertia colliding particles in turbulent flow // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 2001. V. 22. № 3. P. 365–371.
25. *Vance M.W., Squires K.D., Simonin O.* Properties of the particle velocity field in gas-solid turbulent channel flow // Phys. Fluids. 2006. V. 18. № 6. P. 063302–1–063302–13.
26. *Rouson D.W.I., Eaton J.K.* Direct numerical simulation of particles interacting with a turbulent channel flow // Proc. 7th Workshop on Two-Phase Flow Predictions. Erlangen, Germany, 1994.
27. *Wang Q., Squires K.D.* Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow // Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 5. P. 1207–1223.
28. *Fukagata K., Zahrai S., Bark F.H.* Force balance in a turbulent particulate channel flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1998. V. 24. № 6. P. 867–887.

Москва

Поступила в редакцию
18.IX.2006