

УДК 532.526.2–3

© 2007 г. В.И. ШАЛАЕВ

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ С МАЛЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ

Несмотря на быстрое развитие вычислительной техники и методов решения уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса, нестационарные задачи трехмерного пограничного слоя представляют значительный интерес в аэродинамике. В настоящее время они мало изучены, вследствие объективных трудностей, связанных с большой размерностью системы уравнений и сложностью ее исследования [1]. Поэтому аналитические результаты в этой области весьма актуальны. В настоящей работе с помощью метода возмущений исследованы уравнения нестационарного трехмерного пограничного в случае малых поперечных течений. Выведена промежуточная система уравнений, которая включает в себя основные пространственные эффекты, но существенно проще исходной системы. Особенности рассмотренной постановки изучены для практически важных задач течения в пограничном слое на тонких крыльях и слабонесимметричных телах при малых углах атаки.

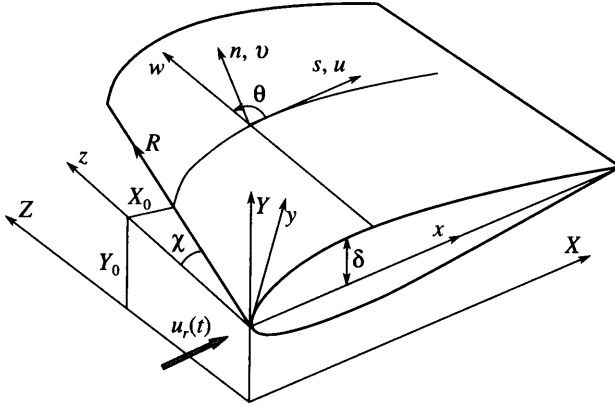
*Ключевые слова:* пограничный слой, нестационарные трехмерные течения, малые поперечные скорости, метод возмущений, тонкое крыло, слабосимметричные тела.

Для стационарных течений с заданным градиентом давления уравнения трехмерного пограничного слоя [2] допускают упрощения в случае скользящего крыла [3] и ламинарного сверхзвукового обтекания конических тел [4]. При различных условиях взаимодействия существуют также автомодельные решения для гиперзвукового пограничного слоя [5]. В остальных случаях упрощения возможны на основе применения асимптотических методов.

Во многих практически важных течениях трехмерные эффекты, связанные с поперечным градиентом давления, малы. Исследования пограничного слоя на конусах под малым углом атаки [4] открывают целую серию работ по изучению такого класса задач [4, 6–10]. Для анализа главного приближения разработан метод малых “вторичных” течений [7, 8], второе приближение для течения несжимаемой жидкости на плоской поверхности рассматривалось в [6]. Оказалось, что возмущения описываются трехмерными уравнениями, которые не проще исходных уравнений, поэтому были проанализированы лишь задачи, сводящиеся к автомодельным. Три члена разложения по углу атаки и степени асимметрии получены для тонких эллиптических конусов [9].

На основе уравнений малых “вторичных” течений был предложен численный алгоритм последовательных приближений для решения полных уравнений трехмерного пограничного слоя [10], но этот подход, как и метод, основанный на локально-автомодельном приближении [11], не получил широкого распространения, так как не имел преимуществ перед конечно-разностными методами. В ряде случаев продольный градиент давления также мал, и в главном порядке уравнения сводятся к уравнениям пограничного слоя на пластине – это приближение является обычным инженерным методом оценки сопротивления трения и теплообмена на элементах летательных аппаратов.

Рациональный подход к анализу стационарного трехмерного пограничного слоя на основе метода возмущений с учетом двух приближений был предложен для течений на тонких крыльях [12–16] и телах, близких к телам вращения при малых углах атаки [14, 17, 18]. Развитие этого подхода на случай нестационарных течений рассмотрено в рабо-



Фиг. 1. Системы координат:  $XYZ$  – декартовы координаты,  $x, y, z$  – криволинейные ортогональные координаты на поверхности  $Y = Y_0(Z)$ ,  $x, n, z$  – криволинейные неортогональные координаты на поверхности тела,  $u, (t)$  – скорость невозмущенного потока;  $R$  – координата вдоль передней кромки

те [19]. Однако подробного анализа уравнений проведено не было, и ряд вопросов до сих пор остается открытым.

1. Система уравнений и краевых условий нестационарного трехмерного пограничного слоя в неортогональных криволинейных координатах  $x, n$  и  $z$  (фиг. 1) имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{\lambda H_2} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial n} - k_1 \operatorname{ctg} \theta u^2 + \frac{k_2}{\sin \theta} w^2 + k_{12} u w \right) &= -\nabla_1 p + \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial u}{\partial n} \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{\lambda H_2} \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{k_1}{\sin \theta} u^2 - k_2 \operatorname{ctg} \theta w^2 + k_{21} u w \right) &= -\nabla_2 p + \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial w}{\partial n} \\ \rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{\lambda H_2} \frac{\partial h}{\partial z} + v \frac{\partial h}{\partial n} \right) - (\gamma - 1) M^2 \left( \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{w}{\lambda H_2} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\kappa}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial h}{\partial n} + (\gamma - 1) M^2 \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial w}{\partial n} \cos \theta \right] & \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial n} + \frac{1}{H} \frac{\partial (\rho u H_2 \sin \theta)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda H} \frac{\partial (\rho w H_1 \sin \theta)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$n = 0: u = w = 0, \quad v = v_w(t, x, z), \quad h = h_w(t, x, z) \left( \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \right)$$

$$n \rightarrow \infty: u = u_e(t, x, z), \quad w = w_e(t, x, z), \quad h = h_e(t, x, z)$$

$$x^* = bx, \quad z^* = \lambda bz, \quad n^* \sqrt{\operatorname{Re}} = bn, \quad t^* = \frac{bt}{u_\infty}, \quad H = H_1 H_2 \sin \theta$$

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty b}{\mu_\infty}, \quad M = \frac{u_\infty}{a_\infty}, \quad p = \frac{p^* - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \rho h = 1 + \gamma M^2 p$$

Здесь звездочкой отмечены размерные величины,  $b$  и  $\lambda b$  – продольный и поперечный масштабы длины,  $a_\infty$  – масштаб скорости звука,  $\operatorname{Pr}$  – число Прандтля,  $\theta(x, z)$  – угол между координатными линиями  $x$  и  $z$  на поверхности тела,  $H_1$  и  $H_2$  – метрические коэффици-

енты,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Плотность  $\rho$ , энтальпия  $h$ , вязкость  $\mu$ , теплопроводность  $\kappa$ , продольная ( $u$ ) и поперечная ( $w$ ) скорости отнесены к своим характерным значениям в набегающем потоке:  $\rho_\infty, h_\infty, \mu_\infty, \kappa_\infty, u_\infty$ ; нормальная скорость – к  $u_\infty/\sqrt{Re}$ .

Течение в пограничном слое может быть ламинарным или турбулентным, что учитывается выбором соответствующих моделей вязкости и теплопроводности. Нестационарность течения может быть обусловлена зависимостью от времени параметров набегающего потока или условий на поверхности – скорости вдува (отсоса)  $v_w(t, x, z)$  и температуры  $h_w(t, x, z)$ . Кривизны  $k_1, k_2, k_{12}, k_{21}$  и составляющие градиента давления  $\nabla_1 p$  и  $\nabla_2 p$  вдоль координатных линий  $x$  и  $z$  определяются известными формулами [2]. Для уравнений (1.1) необходимо также задать состояние течения в начальный момент времени, а на каждом шаге по времени – начальные условия, в качестве которых обычно используются решения в плоскостях растекания или симметрии и в критической точке.

2. Как следует из второго уравнения (1.1), необходимыми условиями малости поперечной скорости ( $w \ll 1$ ) являются соотношения

$$\frac{1}{\lambda H_2} \frac{\partial p}{\partial z} \sim \cos \theta \sim k_1 \sim \frac{\varepsilon}{\lambda} \ll 1 \tag{2.1}$$

Малый параметр  $\varepsilon$  характеризует величину поперечного градиента давления. При условиях (2.1), с точностью до линейных по малым параметрам слагаемых, характеристики течения можно представить асимптотическими разложениями

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \varepsilon \frac{C(s, z)}{\lambda}, \quad k_2(s, z) = -k_{21}(s, z) = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} \\ (H_1, p) &= [H_{10}(s), p_0(t, s)] + \varepsilon [H_{11}(s, z), p_1(t, s, z)], \quad H_2 = H_2(s, z) \\ (k_1, k_{12}, w_e, w) &= \frac{\varepsilon}{\lambda} [k_{11}(s, z), k_{10}(s, z), w_{e1}(t, s, z), w_1(t, s, n, z)] \\ (u_e, h_e) &= [u_{e0}(t, s), h_{e0}(t, s)] + \varepsilon_1 [u_{e1}(t, s, z), h_{e1}(t, s, z)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{V} = (u, v, h, \rho, \mu, \kappa) = \mathbf{V}_0(t, s, n, z) + \varepsilon_1 \mathbf{V}_1(t, s, n, z), \quad s = \int_{x_c}^x H_{10} dx$$

Здесь  $s(t, x, z)$  – длина координатной линии  $z = \text{const}$ , измеряемая от критической точки  $x_c(t, z)$ . Масштаб возмущений в пограничном слое,  $\varepsilon_1 \ll 1$ , заранее не известен, он находится из анализа уравнений.

Уравнения и краевые условия первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) + \frac{\partial p_0}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial n} \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \\ \rho_0 \left( \frac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial h_0}{\partial n} \right) - (\gamma - 1) M^2 \left[ \frac{\partial p_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial s} + \mu_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial n} \frac{\kappa_0}{Pr} \frac{\partial h_0}{\partial n}, \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial s} + \frac{\partial \rho_0 v_0}{\partial n} - k_2 \rho_0 u_0 &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$n = 0: u_0 = 0, \quad v_0 = v_w, \quad h_0 = h_w \left( \frac{\partial h_0}{\partial n} = 0 \right); \quad n \rightarrow \infty: u_0 = u_{e0}, \quad h_0 = h_{e0}$$

Уравнения (2.3) подобны уравнениям осесимметричного пограничного слоя, но в общем случае содержат поперечную координату  $z$  в качестве параметра [8]. Они соответствуют пределу  $\varepsilon = 0, \lambda = \text{const}$ , в котором поперечное течение не оказывает никакого влияния.

жня на характеристики пограничного слоя. Для того чтобы учесть пространственные эффекты при конечных значениях  $\varepsilon_1 \ll 1$ , рассмотрим уравнения второго приближения

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial s} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial s} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial n} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} \right] + \rho_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial n} \left( \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} + \mu_1 \frac{\partial u_0}{\partial n} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial s} - \frac{\varepsilon}{\lambda^2 \varepsilon_1} \frac{\rho_0 w_1}{H_2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial z} - \beta \frac{\partial u_0}{\partial s} \right) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{H_{11}}{H_{10}} \left( \rho_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} + \frac{\partial p_0}{\partial s} \right), \\ & \beta(t, z) = \frac{\partial s}{\partial z} = -H_{10}(x_c) \frac{\partial x_c}{\partial z} \\ & \rho_0 \left[ \frac{\partial h_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h_0}{\partial s} + u_0 \frac{\partial h_1}{\partial s} + v_1 \frac{\partial h_0}{\partial n} + v_0 \frac{\partial h_1}{\partial n} \right] + \rho_1 \left( \frac{\partial h_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial h_0}{\partial n} \right) - \\ & - (\gamma - 1) M^2 \left[ \frac{\partial p_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_1}{\partial s} + u_1 \frac{\partial p_0}{\partial s} + 2\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} \frac{\partial u_0}{\partial n} + \mu_1 \left( \frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial n} \left( \kappa_0 \frac{\partial h_1}{\partial n} + \kappa_1 \frac{\partial h_0}{\partial n} \right) = - \frac{\varepsilon}{\lambda^2 \varepsilon_1} \frac{\rho_0 w_1}{H_2} \left( \frac{\partial h_0}{\partial z} - \beta \frac{\partial h_0}{\partial s} \right) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \frac{H_{11}}{H_{10}} u_0 \left( \rho_0 \frac{\partial h_0}{\partial s} - (\gamma - 1) M^2 \frac{\partial p_0}{\partial s} \right) \\ & \rho_0 \left[ \frac{\partial w_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w_0}{\partial s} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial n} + k_{11} u_0^2 - k_2 u_0 w_1 \right] + \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial p_1}{\partial z} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} \right) - C \frac{\partial p_0}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial n} \mu_0 \frac{\partial w_1}{\partial n} \\ & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0)}{\partial s} + \frac{\partial (\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0)}{\partial n} - k_2 (\rho_0 u_1 + \rho_1 u_0) = \\ & = - \frac{\varepsilon}{\lambda^2 \varepsilon_1} \frac{1}{H_2} \left( \frac{\partial \rho_0 w_1}{\partial z} - \beta \frac{\partial \rho_0 w_1}{\partial s} \right) + \frac{\varepsilon H_{11}}{\varepsilon_1 H_{10}} \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial s} \\ & n = 0: u_1 = w_1 = v_1 = h_1 = 0, \quad \left( \frac{\partial h_1}{\partial n} = 0 \right); \quad n \rightarrow \infty: u_1 = u_{e1}, \quad h_1 = h_{e1}, \quad w_1 = w_{e1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Члены турбулентной вязкости, зависящие от поперечного течения, имеют порядок  $O(\varepsilon^2/\lambda^2)$  и не входят в уравнения (2.3) и (2.4) [14]. Неортогональность системы координат сказывается только на величине поперечного градиента давления, функция  $\beta(t, z)$  характеризует изменение длины координатной линии  $z = \text{const}$  в поперечном направлении.

Пространственные эффекты наиболее существенны для тел малого удлинения ( $\lambda \ll 1$ ). В этом случае  $c_2 = \varepsilon/(\varepsilon_1 \lambda^2) = O(1)$ , масштаб возмущений  $\varepsilon_1 = \varepsilon/\lambda^2$ , а параметр  $c_1 = \varepsilon/\varepsilon_1 = \lambda^2 \ll 1$ . Для очень тонких тел,  $\varepsilon = O(\lambda^2)$ , пограничный слой является трехмерным в первом приближении, хотя поперечные течения могут быть малыми, так как  $\varepsilon/\lambda \ll 1$ . В другом пределе,  $\lambda \gg 1$ , параметр  $c_1 \gg c_2$ , масштаб возмущений  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , а трехмерные эффекты пропорциональны  $c_2 = 1/\lambda^2 \ll 1$ . Для тел умеренного удлинения ( $\lambda = c_1 = c_2 = 1$ ) уравнения (2.4) сохраняют наиболее общую форму.

Операторы левых частей уравнений (2.4) не содержат производных по  $z$ , т.е. остаются двумерными. Правые части этих уравнений включают две составляющие. Члены, пропорциональные  $c_1$ , содержат только производные в продольном направлении и не увеличивают размерность задачи. Слагаемые, пропорциональные  $c_2$ , содержат производные по  $z$  и делают задачу второго приближения трехмерной. Можно получить отдельные уравнения для этих производных, дифференцируя уравнения (2.3), – при этом появляются три дополнительных уравнения. Хотя в целом такая система остается двумерной, большое число уравнений делает метод возмущений малоэффективным. Ис-

пользование численного дифференцирования приводит к тому, что метод возмущений становится ничуть не проще прямого численного интегрирования исходных уравнений (1.1), а за счет увеличения размерности системы, даже сложнее. Именно по этим причинам методы последовательных приближений, основанные как на уравнениях малых поперечных течений [10], так и на локально-автомодельном приближении [11] не получили распространения.

3. Существует класс задач, для которых применение теории возмущений может быть эффективным. Пусть скорость вдува (отсоса), температура поверхности и геометрические характеристики слабо зависят от  $z$ , т.е.:

$$\begin{aligned} v_w &= v_{w0}(t, s) + \varepsilon v_{w1}(t, s, z), & h_w &= h_{w0}(t, s) + \varepsilon h_{w1}(t, s, z) \\ H_2 &= H_{20}(s) + \varepsilon H_{21}(s, z), & k_2 &= k_{20}(s) + \varepsilon k_{22}(s, z) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Хотя рассматриваемая задача является многопараметрической, использование в настоящей работе единственного параметра  $\varepsilon$  позволяет сократить формулы, но не уменьшает общности.

При условиях (3.1) функции течения первого приближения в (2.2) и уравнения (2.3) не зависят от  $z$ :  $V_0 = V_0(t, s, n)$ . В этом случае правые части уравнений (2.4) для продольного импульса и энергии не содержат производных по  $z$ , но функция  $q_1(t, s, n, z) = \partial w_1(t, s, n, z) / \partial z$  остается в уравнении неразрывности. Отдельное уравнение для этой функции выводится дифференцированием третьего уравнения (2.4) и имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[ \frac{\partial q_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q_1}{\partial s} + v_0 \frac{\partial q_1}{\partial n} + \frac{\partial k_{11}}{\partial z} u_0^2 - k_{20} u_0 q_1 \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{H_{20}} \left( \frac{\partial p_1}{\partial z} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} \right) - C \frac{\partial p_0}{\partial s} \right] = \frac{\partial}{\partial n} \mu_0 \frac{\partial q_1}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение сохранения потока поперечного импульса. Таким образом, трехмерную в целом задачу второго приближения удастся свести к последовательности двумерных задач за счет увеличения числа уравнений всего на единицу. Однако размерность полной системы уравнений для двух приближений, (2.3), (2.4) и (3.2), все же остается большой, и ее применение для решения инженерных задач неудобно по целому ряду причин, связанных, в частности, с моделированием ламинарно-турбулентного перехода и развитого турбулентного течения. Преодолеть эти трудности удастся введением составного решения, включающего два члена разложений (2.2) и (3.1), которое подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \left( u - \frac{\beta w}{\lambda H_2} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial u}{\partial n}, & s(t, x, z) = \int_{x_c}^x H_1 dx \\ \rho \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + \left( u - \frac{\beta w}{\lambda H_2} \right) \frac{\partial h}{\partial s} + v \frac{\partial h}{\partial n} \right] = \frac{\partial}{\partial n} \frac{\kappa}{Pr} \frac{\partial h}{\partial n} + (\gamma - 1) M^2 \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \left( u - \frac{\beta w}{\lambda H_2} \right) \frac{\partial p}{\partial s} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right] \\ \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} + k_1 u^2 - k_2 u w \right] = \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{\lambda H_2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \varepsilon \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} \right) + \cos \theta \frac{\partial p}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial s} + v \frac{\partial q}{\partial n} + \frac{\partial k_1}{\partial z} u^2 - k_2 u q \right] = \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\lambda H_2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \varepsilon \beta \frac{\partial p_1}{\partial s} \right) - \cos \theta \frac{\partial p}{\partial s} \right],$$

$$q(t, s, n, z) = \frac{\varepsilon}{\lambda} q_1 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial s} + \frac{\partial p v}{\partial n} + \frac{1}{\lambda H_2} \left( \rho q - \beta \frac{\partial p w}{\partial s} \right) - k_2 \rho u = 0$$

Краевые условия для уравнений (3.3) сохраняют свою исходную форму (1.1), но к ним добавляется очевидные условия для функции  $q(t, s, n, z)$ . По своему статусу уравнения (3.3) занимают промежуточное место между уравнениями приближения малых поперечных течений (2.3) и уравнениями (1.1). Первые два уравнения (3.3) идентичны уравнениям двумерного пограничного слоя (2.3). Уравнение неразрывности подобно уравнению неразрывности (1.1), но функция  $q(t, s, n, z)$  находится из дополнительного уравнения, которое следует из (3.2). В целом система (3.3) – система двумерных нестационарных уравнений, в которые координата  $z$  входит как параметр.

4. Разложения (2.2), (3.1) и полученные уравнения справедливы для течения в пограничном слое на тонком крыле – обычном элементе летательных аппаратов. Стационарный пограничный слой на тонких крыльях изучен в работах [12–16]. Для анализа нестационарной задачи рассмотрим крыло, которое мало отличается от цилиндрической поверхности  $Y = Y_0(Z)$ ; передняя кромка совпадает с линией  $X = X_0(Z)$  на этой поверхности, где  $X, Y$  и  $Z$  – декартовы координаты: ось  $X$  направлена вдоль вектора скорости набегающего потока  $u_\infty(t)$ ,  $Z$  – по размаху крыла (фиг. 1). В связанных с поверхностью  $Y = Y_0(Z)$  криволинейных координатах  $xyz$  ( $y$  – нормаль к поверхности) поверхность крыла задается уравнением

$$y = \delta y_w(t, s, z), \quad s = x - x_0(z), \quad x = X, \quad dz = dZ \sqrt{1 + (dY_0/dZ)^2}$$

Предполагается, что выполнены условия

$$\delta \ll 1, \quad \delta_1 = \delta/\lambda \ll 1, \quad \lambda \leq O(1) \quad (4.1)$$

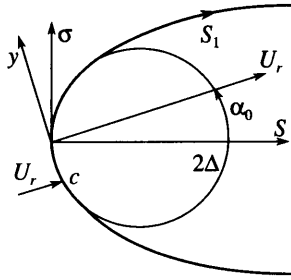
Возмущения давления на таком крыле малы:  $p = \varepsilon p_1(t, x, z)$ ;  $\varepsilon = \delta$  для  $M > 1$  и  $M < 1$ ,  $\varepsilon = \delta^{2/3}$  для  $M \approx 1$ . С точностью  $O(\delta^2/\lambda^2)$  линии  $z = \text{const}$  и  $x = \text{const}$  образуют ортогональную сетку на крыле,  $k_1 = k_2 = k_{12} = k_{21} = 0$ ,  $H_1 = H_2 = 1$ ,  $\beta = \lambda \text{tg} \chi$ ,  $\chi(z)$  – угол стреловидности передней кромки. В случае тонкого крыла уравнения (2.3) и (2.4) для возмущений упрощаются, а уравнения (3.3) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - w \text{tg} \chi) \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right] + \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial u}{\partial n} \\ \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} \right] + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial z} - \text{tg} \chi \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial w}{\partial n} \\ \rho \left[ \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial s} + v \frac{\partial q}{\partial n} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\lambda} \frac{\partial p}{\partial z} - \text{tg} \chi \frac{\partial p}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial n} \mu \frac{\partial q}{\partial n} \\ \rho \left[ \frac{\partial h}{\partial t} + (u - w \text{tg} \chi) \frac{\partial h}{\partial s} + v \frac{\partial h}{\partial n} \right] - (\gamma - 1) M^2 \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial s} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial n} \kappa \frac{\partial h}{\partial n}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho (u - w \text{tg} \chi)}{\partial s} + \frac{\partial \rho v}{\partial n} + \frac{\rho q}{\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Особенность задачи для тонких крыльев связана с наличием передних кромок, в окрестности которых разложения (2.2), (3.1) и уравнения (4.2) не пригодны. Для анализа течения около затупленной кромки введем криволинейную ортогональную систему координат  $SNR$  (фиг. 2)

$$dR = \frac{dz}{\cos \chi}, \quad S = [s \cos \alpha_0 - y \sin \alpha_0] \frac{\cos \chi}{\Delta}, \quad N = \frac{n}{\sqrt{\Delta}}$$

Здесь  $R$  – координата вдоль кромки,  $S$  – ортогональна кромке и направлена вдоль срединной поверхности крыла,  $N$  – нормаль к поверхности,  $\alpha_0(t) \ll 1$  – угол между про-



Фиг. 2. Схема течения и система координат в нормальной к затупленной кромке крыла плоскости:  $U_r$  – проекция вектора скорости набегающего потока на нормальную переднюю кромку плоскость;  $c$  – точка торможения,  $\Delta$  – радиус кривизны носка профиля,  $S$  – нормальная кромке координата,  $S_1$  – длина дуги профиля,  $\alpha_0$  угол между вектором  $U_r$  и осью  $S$

екцией вектора скорости набегающего потока на плоскость  $SN$  и осью  $S$ , характерный размер особой области  $\Delta = O(\delta^2)$  – радиус кривизны носка профиля  $R = \text{const}$ . В особой области характеристики пограничного слоя быстро изменяются в направлении  $S$  – это свойство позволяет упростить задачу. С точностью до малых второго порядка по углу атаки и толщине форма крыла аппроксимируется параболической поверхностью  $y = \pm \Delta \sqrt{2S} = \Delta \sigma$ , а вектор скорости течения представляется так

$$u^*(t, S, N, R) = (U^*, v^*, W^*) = u_\infty(U, \sqrt{\Delta/R}eV, W)$$

Здесь  $U^*$  и  $W^*$  – проекции вектора скорости на линии  $R = \text{const}$  и  $S = \text{const}$ ,  $v^*$  – нормальная скорость. В главном приближении по параметру  $\Delta$  уравнения (1.1) сводятся к уравнениям пограничного слоя для скользящего крыла [3]:

$$\begin{aligned} \rho \left( U \frac{\partial U}{\partial S_1} + V \frac{\partial U}{\partial N} \right) + \frac{\partial p}{\partial S_1} &= \frac{\partial}{\partial N} \mu \frac{\partial U}{\partial N}, \quad S_1 = \int_{\sigma_c}^{\sigma} \sqrt{1 + \sigma^2} d\sigma \\ \rho \left( U \frac{\partial W}{\partial S_1} + V \frac{\partial W}{\partial N} \right) &= \frac{\partial}{\partial N} \mu \frac{\partial W}{\partial N}, \quad \frac{\partial(\rho U)}{\partial S_1} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial N} = 0 \\ \rho \left( U \frac{\partial h}{\partial S_1} + V \frac{\partial h}{\partial N} \right) - (\gamma - 1) M^2 \left\{ U \frac{\partial p}{\partial S_1} + \mu \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial N} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial N} \right)^2 \right] \right\} &= \frac{\partial}{\partial N} \kappa \frac{\partial h}{\partial N} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$N = 0: U = W = 0, \quad V = V_w(t, S_1, R), \quad h = h_w(t, S_1, R) \quad \left( \frac{\partial h}{\partial N} = 0 \right)$$

$$N \rightarrow \infty: U = U_e(t, S_1, R), \quad W = u_r \sin \chi, \quad h = h_e(t, S_1, R)$$

Остальные члены являются величинами  $O(\Delta/\lambda)$ , время  $t$  и координата  $R$  входят в уравнения (4.3) в качестве параметров. Таким образом, в окрестности затупленной кромки течение в главном приближении описывается универсальными уравнениями двумерного квазистационарного пограничного слоя на скользящей параболе с единичным радиусом кривизны носка. Положение критической линии  $\sigma_c(t, R)$  является единственным параметром задачи, который находится из решения задачи невязкого обтекания крыла. Для дозвуковой передней кромки в потенциальном потоке задача еще упрощается, так как можно построить локальное решение [20]:

$$U_e = U_r(t, R) \frac{\sigma - \sigma_c}{\sqrt{1 + \sigma^2}}$$

параметры которого находятся путем сращивания давления в окрестности кромки при  $\sigma \rightarrow \infty$  с возмущениями давления  $p_1(t, z)$  в линейной теории крыла [21] при  $s \rightarrow 0$

$$p_1 = \delta u_r(t) \left[ s_1(t, z) + \frac{s_2(t, z)}{\sqrt{s}} \right], \quad \sigma_c = -s_2 \sqrt{\frac{2\delta^2}{\Delta \cos^3 \chi}}, \quad U_r = u_r \cos \chi (1 - \delta s_1)$$

В пограничном слое сращивание проводится на основе анализа решения в промежуточной области,  $1 \ll S \ll 1/\Delta$  [22]. Можно показать, что предельная ( $S \gg 1$ ) форма уравнений (4.3), преобразованных к системам координат  $snz$ , тождественна предельной ( $s \ll 1$ ) форме уравнений (4.2). Условия сращивания формулируются для некоторой плоскости  $s = s_0 = \Delta S_0 / \cos \chi$

$$\begin{aligned} u(s_0, n, z, t) &= U(S_0, N, R, t) \cos \chi + W(S_0, N, R, t) \sin \chi \\ w(s_0, n, z, t) &= -U(S_0, N, R, t) \sin \chi + W(S_0, N, R, t) \cos \chi \\ h(s_0, n, z, t) &= h(S_0, N, R, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Начальное условие для функции  $q = \partial w / \partial z$  находится дифференцированием второго уравнения (4.4).

Исследование течения в окрестности острой передней кромки в рамках теории пограничного слоя ограничивается условиями безотрывного обтекания, в этом случае  $S = s \cos \chi / \Delta$ . Для дозвуковой кромки  $\Delta \sim \exp(-1/\delta)$  [22]. В особой области верхняя ( $y_w^+$ ) и нижняя ( $y_w^-$ ) поверхности крыла представляют собой плоские клинья:  $y_w^\pm = \Delta \operatorname{tg} \delta_0^\pm$ , где  $\delta_0(R) = \delta_0^+(R) + \delta_0^-(R)$  – угол раствора носка профиля  $R = \text{const}$  (фиг. 3). На внешней границе

$$h_e = H_r(t) - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 W_e^2, \quad U_e = (1 + i) S^i U_r, \quad W_e = u_r \sin \chi, \quad i = \frac{\delta_0^\pm}{\pi - \delta_0^\pm}$$

где  $H_r(t)$  – энтальпия торможения,  $U_r(t, R)$  определяется условиями сращивания. Уравнения (4.4) сводятся к задаче обтекания клина со скольжением [4]

$$\begin{aligned} (\rho \mu f''')' &= -\frac{i+1}{2} f f'' + i[f'^2 - T''], \quad (\rho \mu g''')' = -\frac{i+1}{2} f g'' \\ \left( \frac{\rho \kappa}{\text{Pr}} T'' \right)' &= -\frac{i+1}{2} f T'' - \frac{(\gamma-1) M^2 W_e^2}{h_e} \rho \mu g'^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

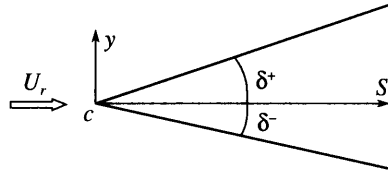
$$\eta = 0: g = T = f' = g' = 0, \quad f = -c \rho_w v_w, \quad T' = h_w / h_e (T'' = 0)$$

$$\eta = \infty: f' = g' = T' = 1, \quad d\eta = \sqrt{(1+i) S_1^{i-1} U_r / \rho_e \mu_e \rho} dN$$

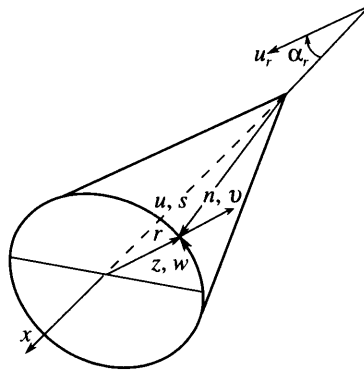
$$U = U_e f'(t, R, \eta), \quad h = h_e T'(t, R, \eta), \quad W = W_e g'(t, R, \eta)$$

Здесь штрихи обозначают дифференцирование по переменной А.А. Дородницына  $\eta$ , для острой кромки  $c = 0$ . Для сверхзвуковой кромки  $i = 0$ , а  $U_e(t, R)$  и  $h_e(t, R)$  соответствуют параметрам за присоединенным скачком. Около линии растекания затупленной передней кромки  $U_e = S_1 U_r$ , этому случаю соответствуют уравнения (4.5) при  $i = 1$  и  $c = 1/\sqrt{2\rho_e \mu_e U_r}$ , они определяют начальные условия для (4.2).





Фиг. 3. Схема течения и система координат в нормальной к острой кромке крыла плоскости:  $S$  – нормальная кромке координата, коллинеарная  $U_r$ ,  $\delta^\pm$  – углы между осью  $S$  и верхней и нижней сторонами профиля



Фиг. 4. Система криволинейных координат на теле:  $x$  – координата вдоль оси,  $z$  и  $r$  – полярные угол и радиус

5. Во многих случаях фюзеляж летательного аппарата можно рассматривать как тело, поперечное сечение которого мало отличается от круга, а режим крейсерского полета обычно соответствует малым углам атаки. Поверхность такого тела в цилиндрических координатах  $xrz$  ( $z$  – полярный угол,  $r$  – радиус, фиг. 4) и параметры задачи определяются соотношениями

$$r^* = \lambda br(x, z) = \lambda br_0(x)[1 + \delta r_1(x, z)], \quad \alpha = \frac{\alpha^*}{\lambda} \ll 1, \quad \lambda \leq O(1), \quad \delta \ll 1 \quad (5.1)$$

где  $\alpha^* \ll 1$  – масштаб угла атаки, параметр  $\delta$  характеризует асимметрию тела.

Для рассматриваемой задачи  $\epsilon = O(\lambda^2 \delta) = O(\lambda^2 \alpha)$ ,  $\epsilon_1 = O(\delta) = O(\alpha)$  и с точностью до линейных по малому параметру слагаемых

$$H_{10} = \sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{\partial r_0}{\partial x}\right)^2}, \quad H_{11} = \frac{r_0}{H_{10}} \frac{\partial r_0}{\partial x} \frac{\partial r_1}{\partial x}, \quad \cos \theta = \frac{\lambda \delta}{H_{10}} \frac{\partial r_0}{\partial x} \frac{\partial r_1}{\partial z} = \lambda \delta C, \quad H_2 = r$$

$$H = H_1 r, \quad k_1 = \frac{\lambda \delta}{H_{10}^4} \frac{\partial r_1}{\partial z} \frac{\partial^2 r_0}{\partial x^2}, \quad k_2 = -k_{21} = -\frac{1}{r_0 H_{10}} \frac{\partial r_0}{\partial x} + O(\delta), \quad k_{12} = O(\delta)$$

При условиях (5.1) и (3.1) течение в пограничном слое можно описать на основе положений (2.2) и уравнений (2.3), (2.4), (3.2) и (3.3), которые несколько упрощаются в связи с тем, что критическая точка, от которой начинается расчет пограничного слоя на каждом шаге по времени, совпадает с острой вершиной тела ( $x_c = 0$ ), а для затупленной

вершины лишь на малые второго порядка отличается от начала координат,  $x_c = O(\alpha^{*2})$ . Поэтому  $\beta = 0$  для острого тела и  $\beta = O(\alpha^{*2}) \approx 0$  в рассматриваемом приближении для затупленного тела, и пропорциональные этому параметру члены в уравнениях (2.4), (3.2) и (3.3) исчезают. В этом случае уравнение поперечного импульса отделяется и может быть решено после интегрирования остальных уравнений.

Уравнения (3.3) применимы вплоть до острой вершины, в окрестности которой решение является особым и его можно получить, вводя преобразование А.А. Дородницына и функции тока. При  $x \rightarrow 0$ , тело аппроксимируется конусом  $r = x[1 + \delta r_1(z)]$ , течение предполагается ламинарным, а функции, входящие в уравнения пограничного слоя, имеют вид

$$H_1(z) = \sqrt{1 + \lambda^2} \left( 1 + \frac{\delta r_1}{1 + \lambda^2} \right), \quad s = xH_1, \quad H_2 = r, \quad \cos \theta = -sk_{12} = \frac{\lambda \delta r_{1z}}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

$$k_1 = 0, \quad sk_2 = -sk_{21} = -1, \quad p = P_r(t) + s^{2i} P_1(t, z), \quad h_e = H_r(t) + O(s^{2i})$$

$$u_e = Bs^i U_e(t, z), \quad w_e = Bs^i W_e(t, z), \quad d\eta = \sqrt{s^{i-1} / \rho_e \mu_e B U_e \rho} dn$$

$$u = u_e f'(t, \eta, z), \quad h = h_e T'(t, \eta, z), \quad w = w_e g'(t, \eta, z)$$

Для дозвукового течения около конуса  $H_r$  и  $P_r$  – энтальпия и давление адиабатически заторможенного газа, параметр  $i$  ( $0 < i < 1$ ) есть функция угла раствора конуса [14, 18, 23, 24], постоянная  $B$  находится из условий сращивания локального и глобального решений невязкой задачи. Для сверхзвукового обтекания конуса  $i = 0$ , а  $u_e(t, z)$ ,  $h_e(t, z)$  и  $w_e(t, z)$  соответствуют параметрам невязкого газа за присоединенным скачком. В обоих случаях функции течения представляются в виде разложений, подобных (2.2) и при  $x \rightarrow 0$  уравнения (3.3) допускают автомодельное решение, которое описывается уравнениями

$$(\rho \mu f''')' = -F f'' + i(f'^2 - T'') + \frac{s^{1-i}}{U_e} \left[ f'_i + \frac{U_{et}}{U_e} (f' - T') \right]$$

$$\left( \frac{\rho \kappa T'''}{\text{Pr}} \right)' = -F T'' - s^{2i} \frac{(\gamma - 1) M^2 U_e^2}{h_e} \rho \mu f'^2 + \frac{s^{1-i}}{U_e} \left( T'_i + \frac{h_{et}}{h_e} T' \right)$$

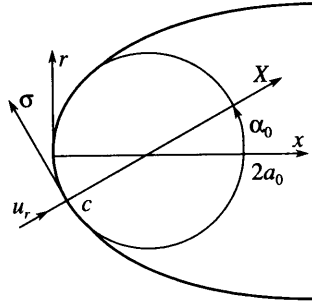
$$(\rho \mu g''')' = -F g'' + (i + 1)(f' g' - T'') + \frac{s^{1-i}}{U_e} \left[ g'_i + \frac{W_{et}}{W_e} (g' - T') \right] \quad (5.2)$$

$$\eta = 0: f' = g' = f = g = 0, \quad T' = h_w/h_e, \quad (T'' = 0); \quad \eta = \infty: f' = g' = T' = 1$$

$$F = s^{1-i} \frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{\rho_e \mu_e}{U_e} \right) + \frac{3+i}{2} f + g H_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{W_e}{U_e} \right)$$

Нестационарные члены уравнений (5.2) пропорциональны  $s^{1-i}$  и для острого носка обращаются в ноль, т.е. в главном приближении течение является квазистационарным, а уравнения (5.2) – обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которые  $z$  и  $t$  входят в качестве параметров. Диссипативные члены уравнения энергии пропорциональны  $s^{2i}$ , поэтому при дозвуковом течении они равны нулю.

В окрестности затупленной вершины поверхность тела аппроксимируется параболической поверхностью  $r = \sqrt{2a_0 x} [1 + \delta r_1(z)]$ ,  $a_0$  – радиус кривизны тела вращения, отне-



Фиг. 5. Схема течения и система координат в окрестности затупленной вершины тела:  $\sigma$  и  $X$  – полярный радиус и ось цилиндрических координат с началом в критической точке

сенный к  $\lambda^2 b$ . Положение критической точки определяется глобальной структурой невязкого обтекания тела и при малых углах атаки его можно задать эффективным углом атаки  $\alpha_0(t) \sim \alpha \ll 1$  (фиг. 5). Тогда координаты точки торможения в главном приближении можно определить так

$$x_c = \frac{a_0 \lambda^2 \alpha_0^2}{2}, \quad r_c = \alpha_0 \sqrt{a_0} [1 + \delta r_1(z_c)], \quad z = z_c$$

Для анализа течения в области  $x \sim x_c$  введем цилиндрические координаты  $X\sigma\varphi$ , связанные с критической точкой

$$\begin{aligned} r \cos z &= r_c \sigma \cos \varphi, \quad r^2 = r_c^2 [1 - 2\sigma \sin \varphi + \sigma^2 + O(\alpha_0^2)] \\ x &= x_c [1 + X - 2\sigma \sin \varphi + O(\alpha_0^2)] \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь  $X \sim 1$  – нормаль к поверхности в критической точке,  $\sigma \sim 1$  и  $\varphi$  – полярные координаты в касательной плоскости. Уравнение параболической поверхности преобразуется к виду

$$X = (E - 1)(1 - 2\sigma \sin \varphi) + E\sigma^2, \quad E = 1 + 2\delta[r_1(\varphi_c) - r_1(\varphi)] + O(\delta^2) \tag{5.4}$$

В декартовых координатах  $Y_1$  и  $Z_1$ , связанных с линиями главных кривизн поверхности в критической точке, скорости на внешней границе определяются соотношениями [25]:  $U_{e1} = dZ_1$ ,  $U_{e2} = d(1 + \delta d_1)Y_1$ , где  $d_1$  характеризует различие максимального и минимального радиусов кривизны в критической точке. Составляющие скорости и метрические коэффициенты в полярных координатах  $\sigma$  и  $\varphi$  имеют вид

$$\begin{aligned} u_e &= r_c d\sigma [1 + \delta d_1 \sin^2(\varphi - \varphi_0) + O(\delta^2)] \\ w_e &= r_c \delta d d_1 \sigma [\sin(\varphi - \varphi_0) \cos(\varphi - \varphi_0) + O(\delta)] \\ H_1 &= r_c [1 + O(\alpha_0^2)], \quad H_2 = r_c \sigma [1 + O(\alpha_0^2)] \end{aligned} \tag{5.5}$$

где  $\varphi_0$  – угол, определяющий направление  $Z_1$ . Используя в качестве независимых переменных уравнений (3.3)  $\sigma$  и  $\varphi$  вместо  $x$  и  $z$  можно с помощью соотношений (5.3)–(5.5) показать, что в пределе  $\alpha_0 \rightarrow 0$  уравнения (3.3) сводятся к уравнениям (5.2) при  $i = 1$ . В этом случае течение является нестационарным, диссипативные члены уравнения энергии

равны нулю. В отличие от острой вершины рассмотренное локальное решение для затупленного тела получено сингулярным разложением по параметру, и оно связано с решением уравнений (3.3) условиями сращивания, подобными (4.4).

**Заключение.** Проведен асимптотический анализ уравнений нестационарного трехмерного пограничного слоя в случае малых поперечных течений. Проанализированы уравнения первого и второго приближений, выделен класс течений, для которого применение теории возмущений является рациональным и эффективным. Для таких течений выведена промежуточная система уравнений для объединяющего два приближения составного решения, которая включает в себя основные пространственные эффекты, но существенно проще исходной системы.

Особенности рассмотренной постановки проанализированы для пограничного слоя на тонких крыльях и слабо несимметричных телах при малых углах атаки. Системы уравнений для возмущений и составного решения в этом случае упрощаются. Проведен анализ течения в окрестности затупленных и острых кромок крыла и показано, что оно описывается стационарными двумерными уравнениями пограничного слоя для скользящей параболы или клина. Получены условия сращивания локального решения с решением на основной части поверхности. Выведены автомодельные уравнения, описывающие течение в окрестности острой и затупленной вершин тела. В целом получено существенное упрощение задачи нестационарного трехмерного пограничного слоя – она сведена к решению последовательности двумерных нестационарных или стационарных задач.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№№ 05-08-50233а, 05-01-08087офи\_а) и Минобрнауки (грант ВЦП РНПВШ 2.1.1. № 5904).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Telionis D.P.* Unsteady viscous flows. N. Y.: Springer, 1981. 408 p.
2. *Смит П.Д.* Численный расчет трехмерных пограничных слоев // Трехмерные турбулентные пограничные слои / Под ред. Фернхольца Х. и Краузе Е. М.: Мир, 1985. С. 259–275.
3. *Струминский В.В.* Аэродинамика и молекулярная газовая динамика. М.: Наука, 1985. 240 с.
4. *Мур Ф.К.* Теория трехмерного пограничного слоя // Проблемы механики. Ред. Драйден Х. и Карман Т. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. Вып. 2. С. 239–296.
5. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Лунатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 455 с.
6. *Mager A.* Three-dimensional laminar boundary layers // *Theory of Laminar Flows* / Ed. Moore F.K. Princeton: Univ. Press, 1964. P. 286–394.
7. *Eichelbrenner E.A.* Three-dimensional boundary layers // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1973. V. 5. P. 339–360.
8. *Cooke J.C.* An axially symmetric analogue for general three-dimensional boundary layers // *Aeronaut. Rts. Council. Rept. and Mem.* 1961. № 3200. 12 p.
9. *Хонькин А.Д., Шалаев В.И.* Ламинарное, безотрывное обтекание тонких тел // *Тр. ЦАГИ.* 1985. Вып. 2265. С. 95–112.
10. *Fannelöp T.K.* A method of solving the three-dimensional laminar boundary-layer equations with application to a lifting re-entry body // *AIAA Journal.* 1968. V. 6. № 6. P. 1075–1084.
11. *Шевелев Ю.Д.* Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 224 с.
12. *Шалаев В.И.* Пограничный слой на тонких крыльях в сверхзвуковом потоке газа // *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск: СО АН СССР. ИТПМ, 1986. Т. 17. № 5. С. 127–134.
13. *Шалаев В.И.* Пограничный слой на квазицилиндрических поверхностях // *Тез. Докл. 4-й Всесоюз. школы “Методы аэрофизических исследований”.* Новосибирск. ИТПМ АН СССР, 1986. С. 69.
14. *Шалаев В.И.* Пространственный пограничный слой на тонких крыльях и телах при малых углах атаки // *Моделирование в механике.* Новосибирск: СО АН СССР. ИТПМ, 1988. Т. 2(19). № 5. С. 148–153.

15. Хонькин А.Д., Шалаев В.И. Пространственный пограничный слой на тонких крыльях конечного размаха // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 312–315.
16. Шалаев В.И. Пограничный слой на тонких крыльях малого удлинения // ПМТФ. 1992. № 1. С. 71–78.
17. Лунев В.В., Сенкевич Е.А. Метод меридиональных сечений в задачах пространственного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 67–73.
18. Хонькин А.Д., Шалаев В.И. Пространственный пограничный слой на телах с малой асимметрией поперечного течения при небольших углах атаки // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 5. С. 1067–1071.
19. Шалаев В.И. Нестационарный пограничный слой с малыми пространственными возмущениями // Исследование некоторых задач аэродинамики и динамики полета самолета. М.: МФТИ, 1989. С. 67–74.
20. Van Dyke M. Higher approximations in boundary layer theory. P. 2. Application to leading edges // J. Fluid Mech. 1962. M. 14. Pt. 4. P. 481–495.
21. Хислет М.А., Ломакс Г. Теория малых возмущений при сверхзвуковых и трансзвуковых скоростях полета // Общая теория аэродинамики больших скоростей / Под ред. Сирса У.К. М.: Воениздат, 1962. С. 113–299.
22. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости М.: Мир, 1967. 310 с.
23. Гесс Дж., Фолкнер С. Точные значения показателя степени, определяющего потенциальное поле течения около полубесконечных конусов // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3. № 4. С. 239–240.
24. Воеводин А.В., Судаков Г.Г. Решение задачи о течении идеальной жидкости в окрестности вершин тел и крыльев // ПМТФ. 1990. № 3. С. 60–63.
25. Howarth L.P. The Boundary Layer in Three-Dimensional Flow. II. The Flow near a Stagnation Point // Philosophical Magazine. Ser. VII. 1951. V. 42. P. 1433–1440.

Москва

Поступила в редакцию  
17.I.2006