

УДК 532.5.013.4 : 536.24

© 2007 г. И.В. ГНЕВАНОВ, Е.Л. ТАРУНИН

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ СЛОЕ С ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ В ЦЕНТРЕ СЛОЯ

Рассмотрено движение вязкой несжимаемой жидкости в плоском бесконечном наклонном слое при наличии внутренних источников тепла, сосредоточенных на оси слоя. Исследована устойчивость плоскопараллельного движения, построены нейтральные кривые и определены области устойчивости. Выполнено сравнение со случаем равномерного распределения источников тепла. Численно рассчитаны надкритические движения жидкости.

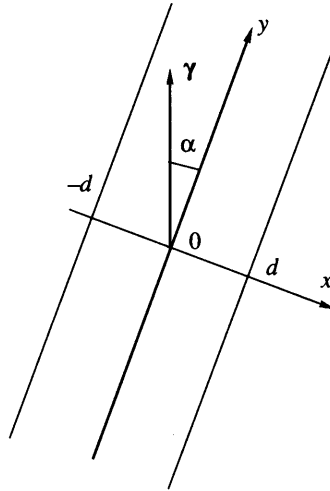
Ключевые слова: внутренние источники тепла, тепловая конвекция, устойчивость течения, надкритические режимы.

Наличие внутренних источников тепла – частая причина возникновения естественной конвекции как в атмосфере и океане, так и в технических устройствах. Интенсивность конвекции определяется мощностью тепловыделения и характером распределения источников тепла. Вопросы устойчивости равновесия и конвективного движения обычно исследуются для источников тепла, зависящих от одной пространственной координаты [1–8].

Достаточно подробно исследована устойчивость конвективного течения в случае источников тепла, равномерно распределенных в бесконечном слое; теоретическое исследование выполнено в [1–4], а экспериментальное в [6]. Расчеты показали, что влияние тепловых факторов достаточно существенно уже при значении числа Прандтля $P_r \sim 1$. При дальнейшем увеличении P_r тепловые факторы становятся определяющими: происходит смена формы неустойчивости – от гидродинамической неустойчивости на границах встречных потоков к неустойчивости типа нарастающих тепловых волн. По мере роста числа P_r происходит не только понижение минимального критического числа Грасгофа Gr^* , но и наступают качественные изменения формы нейтральной кривой (появление “петли”). Асимптотика при больших числах Прандтля обнаруживает зависимость $Gr^* \sim P_r^{-1/2}$, подтверждающую вывод о волновой природе неустойчивости при больших P_r .

Примеры неоднородного тепловыделения рассмотрены, например, в [7, 8]. Конвекция в плоском вертикальном слое, границы которого поддерживались при одинаковых температурах, а интенсивность источников тепла убывала по мере удаления от границы по экспоненциальному закону, изучена в [7]. Такое распределение может возникнуть, например, при прохождении поперек слоя светового потока, поглощение которого происходит по закону Бугера. Устойчивость конвективного течения, создаваемого тепловыделением, мощность которого – линейная функция координаты, нечетная относительно середины канала, исследована в [8].

Класс точных решений уравнений естественной конвекции при задании источников тепловыделения постоянной мощности в части слоя исследован в [9, 10]. При этом появляются два дополнительных параметра задачи – толщина слоя тепловыделения и положение его середины относительно всего слоя жидкости. Изучен случай тепловыделения в центре слоя при стремлении толщины слоя тепловыделения к нулю. Такая ситуация может быть реализована нагреванием лазерным лучом или выделением Джоулева теп-



Фиг. 1. Геометрия задачи

ла на металлической сетке с малым гидродинамическим сопротивлением. Учет гидродинамического сопротивления сетки может быть выполнен по методике, предложенной в [11]. В [9] исследование ограничено вертикальным слоем, а в [10] учитывается влияние наклона слоя.

В данной работе существенно расширяется область исследования за счет учета наклона слоя, различных чисел Прандтля. Произведены подробные вычисления по линейной теории устойчивости и рассчитаны надкритические движения методом сеток.

1. Постановка задачи. Рассматривается неограниченный вдоль осей y и z наклонный слой жидкости шириной $2d$ с идеально теплопроводными границами. На границах поддерживается одинаковая температура и заданы условия прилипания для скорости (фиг. 1). Внутри слоя действуют источники тепла мощностью q . Движение жидкости описывается уравнениями естественной конвекции в приближении Буссинеска [1], которые в безразмерном виде представляются как

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p + \Delta \mathbf{V} + T\boldsymbol{\gamma} \quad (1.1)$$

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

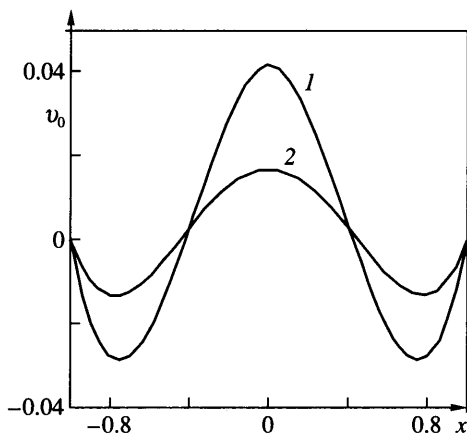
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{Gr}(\mathbf{V}\nabla)T = \frac{1}{\text{Pr}}(\Delta T + 2q) \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{V} – скорость, T – температура, p – давление, q – безразмерная мощность тепловыделения в единице объема, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор, направленный против силы тяжести. Граничные условия соответствуют заданной температуре, принятой за начало отсчета и условиям вязкого прилипания для скорости

$$x = \pm 1: T = \mathbf{V} = 0 \quad (1.4)$$

Предполагается также отсутствие расхода через любое поперечное сечение (условие замкнутости потока).

В качестве единиц измерения были выбраны: длина – полуширина слоя d , время – d^2/ν , скорость – $g\beta Qd^4/2\nu\kappa$, температура – $Qd^2/2\kappa$, давление – $\rho g\beta Qd^3/2\kappa$.



Фиг. 2. Профили скорости плоскопараллельного движения: 1, 2 – для случаев I, II тепловыделения

Здесь g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения, ν – кинематическая вязкость, κ – коэффициент теплопроводности, Q – средняя мощность источников на единицу объема

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 q(x) dx$$

Безразмерные параметры задачи – число Грасгофа $Gr = g\beta Qd^5 / (2\nu^2\kappa)$, число Прандтля $Pt = \nu/\chi$ и функция интенсивности тепловыделения q .

Исследовано поведение жидкости в случае I выделения тепла в предельно узкой зоне на оси слоя $q = 2\delta(x)$.

Нормировка мощности тепловыделения (коэффициент 2) выбрана таким образом, чтобы средняя мощность источников тепла на единицу объема Q совпала со случаем II равномерного распределения источников тепла $q = 1$.

Задача (1.1)–(1.4) допускает решение в виде стационарного плоскопараллельного движения со следующими безразмерными профилями скорости и температуры $V = (0, 0, v_0(x))$, $T = T_0(x)$. В случаях I и II имеем

$$v_0(x) = \frac{\cos\alpha}{24}(1 - 9x^2 + 8|x|^3), \quad T_0(x) = 2(1 - |x|) \tag{1.5}$$

$$v_0(x) = \frac{\cos\alpha}{60}(1 - 6x^2 + 5x^4), \quad T_0(x) = 1 - x^2 \tag{1.6}$$

Сравнение профилей скорости (1.5), (1.6) приведено на фиг. 2. Максимум скоростей соответствует середине слоя $x = 0$. В случае I этот максимум в 2.5 раза больше, экстремум отрицательной скорости $v_0(\pm 3/4) = -11v_0(0)/16$.

2. Метод решения. Для исследования устойчивости использовались методы линейной теории [5]. Уравнения (1.1)–(1.3), записанные в терминах двухполюсного метода, линеаризовались относительно малых плоских нормальных возмущений полей функции тока и температуры

$$\{\psi^*, T^*\}(x, y, t) = \{\varphi, \theta\}(x)e^{-\lambda t +iky}$$

где ψ^*, T^* – поля возмущений функции тока и температуры.

В итоге преобразований получалась спектрально-амплитудная задача

$$-\lambda \Delta \varphi + ikGr v_0 \Delta \varphi - ikGr v_0'' \varphi = \Delta \Delta \varphi - ik\theta \sin \alpha + \theta' \cos \alpha \quad (2.1)$$

$$-Pr \lambda \theta + ikGr Pr (v_0 \theta - \varphi T_0') = \Delta \theta \quad (2.2)$$

$$x = \pm 1: \varphi = \varphi' = \theta = 0, \quad \Delta = \frac{d^2}{dx^2} - k^2 \quad (2.3)$$

Здесь λ – комплексный декремент, k – вещественное волновое число.

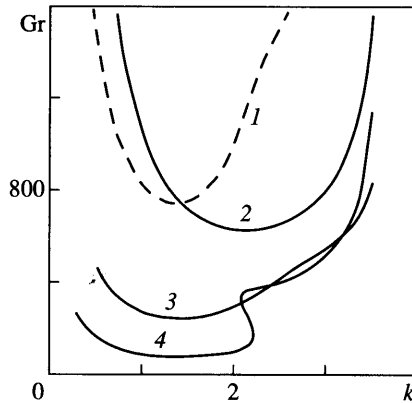
Задача (2.1)–(2.3) решалась численно методом дифференциальной прогонки [1], обыкновенные дифференциальные уравнения для элементов прогоночной матрицы – методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Разбиение интервала интегрирования производилось в соответствии с интервалами кусочной непрерывности производных профиля температуры основного течения.

Для исследования надкритических движений полные нелинейные уравнения естественной конвекции численно решались методом сеток [12] в прямоугольнике ($-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq L$) на равномерной сетке ($L = 2\pi/k$ – длина волны). Находилось решение, удовлетворяющее условиям периодичности по координате y : $\{\varphi, \psi, T\}(x, y + L, t) = \{\varphi, \psi, T\}(x, y, t)$. Для реализации условий периодичности область сеточного решения дополнялась одним шагом по координате вдоль оси слоя. Уравнения переноса вихря и температуры аппроксимировались явной двухслойной схемой с центральными разностями. Показано, что использование направленных разностей дает существенное отличие от результатов линейной теории. Тепловыделение учитывалось лишь в центральных узлах сетки ($x = 0$) таким образом, чтобы в подкритической области распределение температуры соответствовало точному решению (1.5). Уравнение Пуассона решалось методом последовательной верхней релаксации. Значения вихря на границе аппроксимировались формулой Тома (использование формулы Вудса не давало уточнения). Основные расчеты производились на сетке 20×32 . Такая сетка позволяла получать интегральные характеристики течения в исследованном диапазоне параметров с относительной погрешностью не более 5%. Начальное состояние для получения первого результата соответствовало точному решению с добавлением к вихрю возмущения. В дальнейшем, как правило, использовался метод продолжения по параметру, когда в качестве начального состояния использовалось решение, полученное при предыдущем его значении. Счет выполнялся до установления трех интегральных величин – кинетической энергии, максимума поперечной компоненты скорости u_m и характеристики изменения локального теплового потока на границе

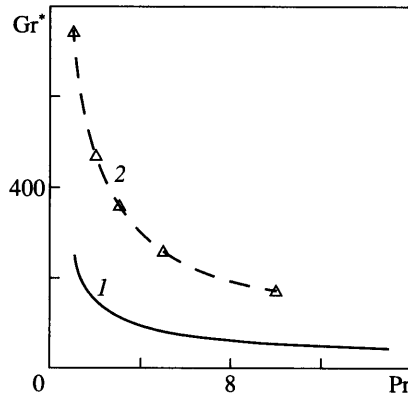
$$x = -1: \xi = \max\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \min\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad (2.4)$$

Время достижения установившегося режима существенно зависело от удаленности от критического значения и изменялось от 10 до 300 единиц безразмерного времени.

3. Результаты. Для вертикального слоя ($\alpha = 0$) на фиг. 3 изображены нейтральные кривые $Gr(k)$ для различных чисел Прандтля в случае тепловыделения на оси слоя (I). Для сравнения приведена нейтральная кривая при $Pr = 1$ для случая равномерного тепловыделения (II). Видно, что в случае сосредоточенного в центре тепловыделения течение становится неустойчивым при меньших числах Грасгофа. Частично это может быть объяснено большим градиентом скорости на границе встречных потоков вследствие интенсификации течения. В целом форма нейтральных кривых сходна в обоих случаях тепловыделения. С увеличением числа Прандтля уменьшаются критические значения числа Грасгофа и усложняется вид нейтральных кривых.



Фиг. 3. Нейтральные кривые $Gr(k)$ для вертикального слоя: 1 – случай II, $Pr = 1$; 2–4 I, $Pr = 0; 1; 5$

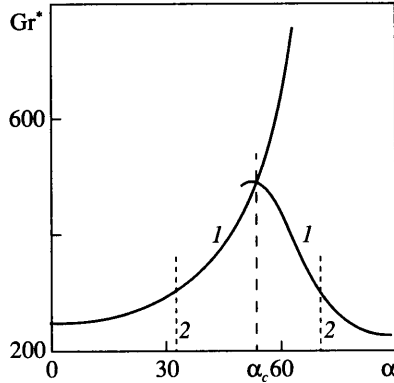


Фиг. 4. Критические значения $Gr^*(Pr)$, $\alpha = 0^\circ$: 1, 2 – случаи тепловыделения I, II

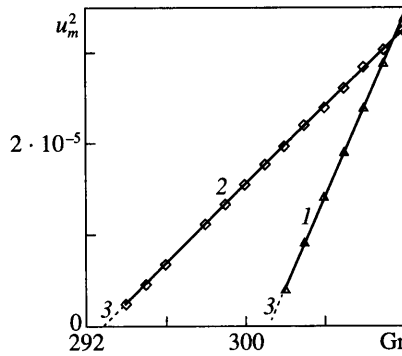
Графики минимального критического значения числа Грасгофа $Gr^* = \min_k Gr(k)$ в зависимости от числа Pr для обоих случаев тепловыделения приведены на фиг. 4. Эти графики также иллюстрируют понижение границы устойчивости по сравнению с равномерным тепловыделением почти в 3 раза. Понижение критического числа Грасгофа с ростом числа Pr примерно соответствует зависимости $Gr^* \sim Pr^{-1/2}$, обнаруженной в [1] для больших значений числа Прандтля.

Зависимость минимальных критических чисел Грасгофа от угла наклона слоя α для $Pr = 1$ на фиг. 5 показывает, что с увеличением α относительно силы тяжести до $\approx 50^\circ$ происходит повышение порога устойчивости. Это обстоятельство вызвано уменьшением интенсивности движения, пропорциональной $\cos \alpha$. Затем при дальнейшем увеличении угла наклона, на нейтральной кривой появляется второй локальный минимум. Переход глобального минимума с одной ветви на другую происходит при $\alpha_c \approx 53.5^\circ$. Этот переход сопровождается скачкообразным изменением волнового числа и декремента наиболее опасных возмущений.

Далее были проведены численные расчеты надкритических движений для двух фиксированных углов наклона: $\alpha = 32$ и 70° (соответствующие вертикальные разрезы пока-



Фиг. 5. Критические значения $Gr^*(\alpha)$ (1) для $Pr = 1$; линии вертикальных разрезов (2)



Фиг. 6. Зависимость квадрата максимума поперечной компоненты скорости u_m^2 от числа Грасгофа ($Pr = 1$): 1 – $\alpha = 32^\circ$, 2 – 70° , 3 – линейная экстраполяция зависимостей

заны кривыми 2 на фиг. 5). Выбор этих углов наклона обусловлен близостью соответствующих критических чисел Грасгофа, предсказанных линейной теорией ($Gr \approx 301.1$ и 300.6). Цель этих вычислительных экспериментов – выяснить различие надкритических движений при примерно одинаковых критических числах Грасгофа.

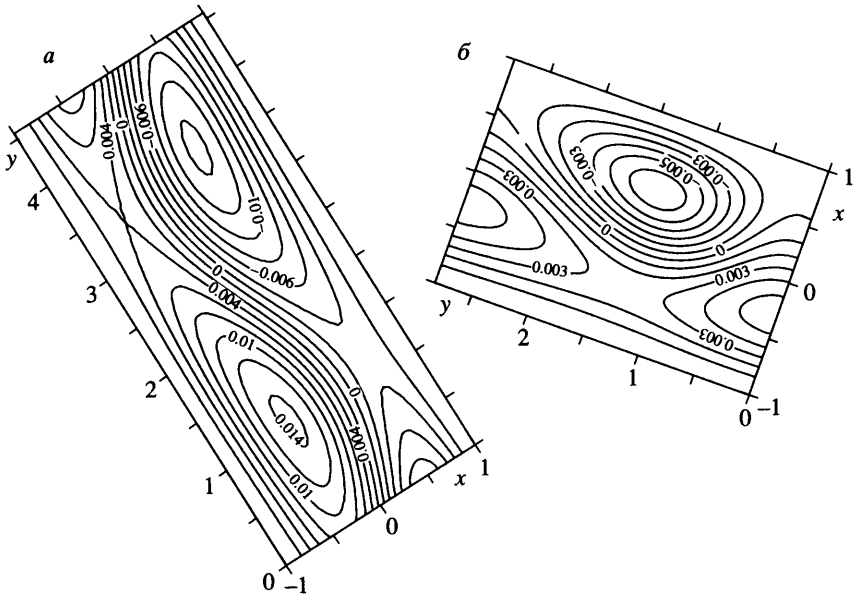
Вблизи критических точек получены зависимости интегральных характеристик от величины надкритичности. Обнаружено, что для максимума поперечной компоненты скорости u_m и величины ξ (2.4) справедлив корневой закон Ландау ($Gr < 310$)

$$\alpha = 32^\circ: u_m \approx 2.23 \cdot 10^{-3} \sqrt{Gr - 301.2}, \quad \xi \approx 0.21 \sqrt{Gr - 301.2} \quad (3.1)$$

$$\alpha = 70^\circ: u_m \approx 1.47 \cdot 10^{-3} \sqrt{Gr - 292.8}, \quad \xi \approx 0.06 \sqrt{Gr - 292.6} \quad (3.2)$$

Зависимости (3.1), (3.2) получены методом наименьших квадратов по 7 значениям. Различие критических чисел Грасгофа в этих формулах от результатов линейной теории устойчивости обязано погрешности метода сеток. Наибольшее различие, соответствующее расчетам при $\alpha = 70^\circ$, составляет 3%.

Зависимости на фиг. 6 подтверждают корневой закон и показывают, что вторичное движение возбуждается “мягко”. Величина горизонтальной компоненты скорости увеличивается с ростом надкритичности быстрее для $\alpha = 32^\circ$.



Фиг. 7. Линии тока для $Gr = 350$, $Pr = 1$: а – $\alpha = 32^\circ$, $k = 1.38$; б – 70° , 2.22

Вторичное движение развивается в виде системы вихрей, расположенных в шахматном порядке идвигающихся попутно восходящему потоку плоскопараллельного движения. Картины линий тока приведены на фиг. 7 для $Gr = 350$ (это соответствует надкритичности $(Gr - Gr^*)/Gr^* < 0.2$). Отметим, что картина линий тока в установившемся режиме смещается вдоль слоя. Типичное время установления составляет десятки единиц безразмерного времени. Несмотря на невысокую надкритичность, течение существенно отличается от плоскопараллельного. Максимальное значение горизонтальной компоненты скорости составляет 38% от максимальной скорости невозмущенного течения (при $\alpha = 32^\circ$). Отметим, что поле изотерм незначительно отличается от линейных распределений, потому и не приводится.

Заключение. Выполнено исследование устойчивости плоскопараллельного движения жидкости в наклонном слое в случае источников тепловыделения, сосредоточенных в центре слоя. Получены нейтральные кривые для различных чисел Прандтля для вертикального слоя, а также построены зависимости критических параметров движений от угла наклона слоя. Показано существенное уменьшение критических чисел Грасгофа по сравнению со случаем равномерного распределения источников тепла. Найдено значение угла наклона, при котором резко меняется характер неустойчивости. Обнаружен интервал надкритичности, в котором интегральные характеристики описываются корневым законом Ландау.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке гранта CRDF № PE-009-0 и гранта РФФИ (Урал) № 04-01-96029.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Якимов А.А. Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 700–705.

3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Якимов А.А. О двух типах неустойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 3. С. 564–568.
4. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Yakimov A.A. On stability of plane-parallel convective motion due to internal heat sources // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1974. V. 17. № 7. P. 717–726.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
6. Козлов В.Г. Экспериментальное исследование устойчивости конвективного движения жидкости, вызванного внутренними источниками тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 23–27.
7. Шихов В.М., Якушин В.И. Об устойчивости конвективных движений, вызванных неоднородно распределенными внутренними источниками тепла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 3. С. 140–144.
8. Шихов В.М. О гидродинамической и тепловой неустойчивости конвективного течения с кубическим профилем температуры // Конвективные течения. Пермь: Изд. Перм. пед. ин-та, 1981. С. 62–68.
9. Гневанов И.В., Тарунин Е.Л. Конвективное движение, вызванное внутренними источниками тепла, сосредоточенными в центре слоя // Гидродинамика: межвуз. сб. науч. тр. Пермь: Изд. ПГУ, 2004. Вып. 14. С. 79–87.
10. Гневанов И.В., Тарунин Е.Л. Устойчивость конвективного движения в слоях с тепловыделением в центре слоя // Вестн. ПГУ. Математика. Механика. Информатика. Пермь: Изд. ПГУ, 2006. № 4, С. 134–138.
11. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Конвективная неустойчивость в областях с тонкой проницаемой перегородкой (сеткой) Пермь: Изд. Перм. гос. техн. ун-та, 1996. 101 с.
12. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.

Пермь

Поступила в редакцию
14.IX.2006