

УДК 533.6.011.55:629.7.024.36

© 2007 г. В.Б. ЗАМЕТАЕВ, М.А. КРАВЦОВА

**НЕВЯЗКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ТОНКОМ УДАРНОМ СЛОЕ
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАХА**

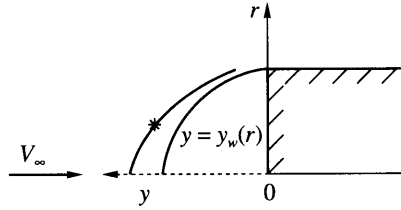
Рассмотрено гиперзвуковое обтекание совершенным газом слабоискривленного торца круглого цилиндра в приближении тонкого ударного слоя. Изучены режимы, при которых форма торца не является монотонной функцией радиуса, а содержит, например, центральное тело регулируемой высоты. Получено, что по мере выдвижения центрального тела в наклоне скачка уплотнения формируется излом. Сглаживание происходит в короткой области взаимодействия между основной частью тонкого ударного слоя, скачком уплотнения и пристенной потенциальной стружкой. Решение, непрерывно зависящее от параметра, существует в ограниченном диапазоне высот и при превышении критического значения имеет бифуркацию.

Ключевые слова: скачок уплотнения, тонкий ударный слой, взаимодействие.

Теория тонкого ударного слоя около затупленных и острых тел в настоящее время хорошо развита и является предметом изложения целого ряда оригинальных статей [1–4] и монографий [5–8]. При анализе структуры решения в тонком ударном слое между скачком уплотнения и телом используется предельный переход $\gamma = c_p/c_v \rightarrow 1$, $M_\infty \rightarrow \infty$. В главном приближении за скачком уплотнения вследствие бесконечного сжатия газа уравнения Эйлера сводятся к переносу касательной составляющей скорости и удовлетворению уравнения неразрывности. Выполнив условие непротекания на поверхности тела и условия на скачке уплотнения, легко получить главный член разложения решения уравнений Эйлера и сразу найти давление во всем потоке. Указанное давление максимально на оси тела, падает вдоль радиуса и как следствие вызывает разгон тонкой несжимаемой струйки газа на поверхности тела. Изменение толщины последней индуцирует возмущения газодинамических функций и толщины самого слоя. Таким образом выстраивается иерархическая процедура построения асимптотического разложения решения уравнений Эйлера. Отметим некоторые свойства решения для главного приближения в тонком ударном слое.

В [1, 6] получено нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для формы скачка уплотнения и в зависимости от начальных данных приведены возможные решения. Установлено, что уравнение имеет особую точку (в ней скорость потока равна скорости звука) седлового типа и физической картине течения соответствует решение, проходящее именно через эту точку. Такой отбор решения (критерий Хейза) позволяет проникнуть из дозвуковой области течения в сверхзвуковую, что необходимо должно выполняться для выпуклых торцов. Для любой заданной формы торца, пользуясь критерием Хейза, можно отобрать единственное решение для главного приближения. Легко представить ситуацию, когда поток обтекает умеренно выпуклый торец, из которого выступает гладкое центральное тело. Если длина этого тела мала, то критерий Хейза будет удовлетворяться вблизи боковой поверхности цилиндра, если велика, то ясно, что все физические события должны происходить на острой вершине центрального тела. Данная работа посвящена именно процессу перестройки течения по мере увеличения длины центрального тела.

1. Рассмотрим натекание гиперзвукового потока совершенного вязкого газа на слабоискривленный торец круглого цилиндра (фиг. 1). Возмущение формы торца пола-



Фиг. 1. Гиперзвуковой поток совершенного газа натекает на торец круглого цилиндра; y_w – форма торца

гаем гладкой осесимметричной функцией $y = y_w(r)$. Все длины отнесем к радиусу цилиндра R , скорость – к V_∞ , а давление, плотность и полную энтальпию – к $\rho_\infty V_\infty^2$, ρ_∞ , V_∞^2 . Решение уравнений Эйлера будем строить с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений, используя в качестве малого параметра величину ϵ

$$\epsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma + 1)M_\infty^2}, \quad \gamma \rightarrow 1, \quad M_\infty \rightarrow \infty$$

Строго говоря, в задаче имеется два независимых параметра – γ и M_∞ , однако выберем закон стремления числа $M_\infty \rightarrow \infty$ следующим образом:

$$\gamma = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 \gamma_2 + O(\epsilon^3), \quad \gamma_2 = 2 - \frac{2}{\epsilon^2 M_\infty^2} = O(1)$$

Таким образом, предельный переход выполняется при фиксированном γ_2 и $\epsilon \rightarrow 0$. Форму поверхности зададим в виде $y_w = \epsilon^{1/2} g(r, h)$, т.е. высота неровности есть величина порядка толщины самого тонкого ударного слоя.

Асимптотическое разложение решения уравнений Эйлера за скачком уплотнения ищем в виде (в цилиндрической системе координат)

$$\begin{aligned} v_r &= \epsilon^{1/2} u_0(r, Y) + \epsilon u_1(r, Y) + \dots, \quad p = 1 + \epsilon p_0 + \epsilon^{3/2} p_1 + \dots \\ v_y &= \epsilon(g'(r)u_0 + v_0) + \epsilon^{3/2}(g'(r)u_1 + v_1) + \dots \\ \rho &= \frac{1}{\epsilon} + \rho_0 + \epsilon^{1/2} \rho_1 + \dots, \quad H = \frac{1}{2} + \epsilon H_0 + \epsilon^{3/2} H_1 + \dots \\ y_s &= \epsilon^{1/2} f_0(r) + \epsilon f_1(r) + \dots, \quad Y = \epsilon^{-1/2}(y - \epsilon^{1/2} g(r, h)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

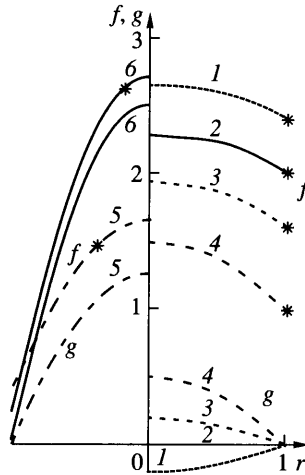
Подставляя (1.1) в уравнения Эйлера и совершая предельный переход, получаем хорошо известную [2] задачу для главного приближения

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial Y} &= 0, \quad \frac{\partial r u_0}{\partial r} + \frac{\partial r v_0}{\partial Y} = 0 \\ u_0 \frac{\partial H_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial H_0}{\partial Y} &= 0, \quad H_0 = \frac{1}{2}(p_0 - \rho_0 + u_0^2) + 1 - \frac{\lambda_2}{4} \\ g''(r)u_0^2 + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial Y} &= -\frac{\partial p_0}{\partial Y} \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$Y = 0: \quad v_0 = 0$$

$$Y = f_0(r) - g(r, h): \quad u_0 = -f_0'(r), \quad v_0 = g'f_0' - 1 - f_0'^2$$

$$p_0 = -1 - f_0'^2, \quad H_0 = \frac{2 - \gamma_2}{4}$$



Фиг. 2. Форма скачка уплотнения f для выпуклого торца в зависимости от высоты h :
 $1-h = -0.2; 0; 0.2; 0.5; 1.25; 2.5$

Условие непротекания на поверхности упростилось в силу выбора системы координат, условия при $Y = f_0 - g$ следуют из соотношений на скачке уплотнения. Достаточно просто можно получить уравнение для $f_0(r)$. Введя функцию тока

$$ru_0 = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad rv_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

после подстановки в (1.2) заметим, что $u_0 = u_0(\Psi)$, поэтому

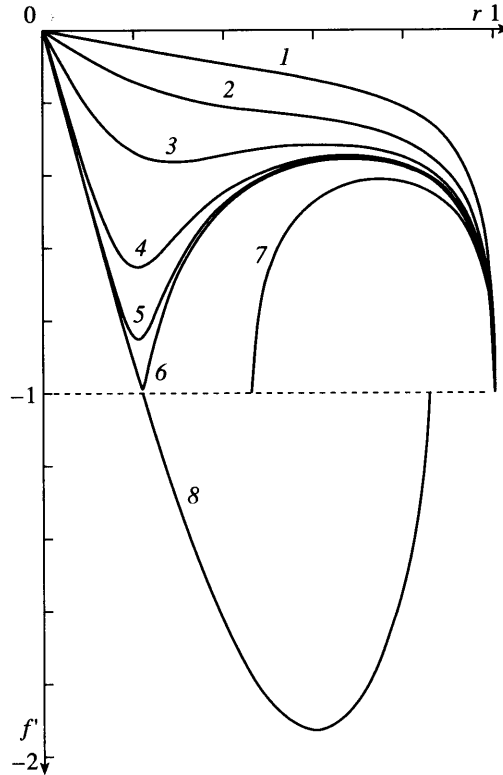
$$Y = \frac{1}{r} \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{u_0(\Psi)}$$

Интеграл можно вычислить до скачка уплотнения, в результате получим уравнение

$$rf_0'^2 + (f_0 - (rg)')f_0' + r = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение содержит функцию $g(r, h)$ из (1.1). Задавая значение $f_0(0)$, можно для любой формы тела найти форму скачка в главном приближении. Напомним, что точка, в которой $f_0' = -1$ – особая для уравнения (1.3). Согласно критерию Хейза, $f_0(0)$ нужно подбирать так, чтобы в этой точке решение было регулярным.

2. Изучим более подробно свойства решения уравнения (1.3) для различных функций $g(r, h)$. Расчеты этого уравнения были выполнены вначале для торца выпуклой формы $g = h(1 - r^2)$. Для каждого значения h подбиралось такое значение отхода ударной волны на оси $f_0(0)$, чтобы при прохождении в область сверхзвуковых скоростей (где $f_0' < -1$) через точку $f_0' = -1$ решение в ней было регулярным. При этом численно удобнее проводить расчет из особой точки в обе стороны. Получено (фиг. 2), что при больших высотах h звуковая точка за скачком уплотнения, помеченная здесь и далее *, смещается к вершине тела и течение почти всюду за скачком сверхзвуковое, а при уменьшении h звуковая точка смещается к краю торца. Таким образом, найденное решение соответствует физической картине течения, а именно для остроносого тела дозвуковая область ма-



Фиг. 3. Спектр решений f' для различных высот центрального тела, в том числе для критического значения параметра $h_* = 1.425$ (кривые 6 и 8): 1–7 – $h = 0; 1; 1.3; 1.4; 1.42; 1.425; 1.6$

ла и сосредоточена вблизи точки торможения, в то время как для плоского торца звуковая точка размещена на боковой кромке торца. Для указанной формы тела при $h = 0.5$ координата звуковой точки достигает значения $r_* = 1$ и остается там же при $h < 0.5$. Чем меньше значение h , тем дальше скачок отходит от поверхности торца, на кромке которого лежит звуковая точка.

Были проведены расчеты для тела более сложной формы

$$g = h \exp(-4r^2) + 7r^2(1-r)$$

При $h = 0$ тело содержит центральную полость, а по мере увеличения параметра из полости как бы выдвигается центральное тело. Интегрирование уравнения проводится, начиная с точки $r = 1$, особой при малых значениях параметра, и вплоть до оси тела. Видно (фиг. 3), что при увеличении h формируется минимум наклона скачка, а при стремлении параметра к предельному значению $h_* = 1.425$ у самой функции f'_0 формируется излом в точке вблизи оси. Предельное решение содержит две особые (звуковые) точки, в обеих $f'_0 = -1$ (фиг. 3, кривая 8). При попытке увеличить высоту центрального тела более критического значения h_* в решении возникает непроходимая особенность (кривая 7), и оно не продолжимо вплоть до оси тела.

При $h = 1.425$ решение может быть построено другим способом: гладко пройдя через особую точку вблизи вершины тела, оно может быть продлено к кромке, однако не

определено на всей поверхности торца (фиг. 3, кривая δ). Таким образом, результаты расчетов указывают, что главное приближение решения в теории тонкого ударного слоя не зависит непрерывно от высоты тела, а содержит точки бифуркации по параметру h . Изучим предельное решение при $h \rightarrow h_* = 1.425$

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{00}(r) + \Delta h f_{01}(r) + \dots \\ g &= g_0(r, h_*) + \Delta h g_1(r) + \dots, \quad \Delta h = h - h_* < 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя разложения в (1.3), получим уравнения для f_{00} и f_{01} с начальными данными такими, чтобы гладко пройти через вторую звуковую точку. Так как функция $f'_0(r)$ терпит излом при $r \rightarrow r_*$ и $h \rightarrow h_*$, естественно предположить, что разложение (2.1) теряет справедливость вблизи особой точки. При $r \rightarrow r_*$ имеем (функция f_{00} регулярна)

$$f_{00} = f_{00}(r_*) - (r - r_*) + \frac{1}{2}k_1(r - r_*)^2 + \dots, \quad k_1 < 0$$

$$f_{01} = a_1(r_* - r)^{-\alpha} + \dots, \quad \alpha = \frac{1}{2r_*(-k_1)}, \quad a_1 < 0$$

$$(rg_0)' = G_0(r_*) + G_1(r - r_*) + \frac{1}{2}G_2(r - r_*)^2 + \dots$$

В этих выражениях константы $f_{00}(r_*)$, k_1 , a_1 зависят от начальных данных. Относительно G_0 и G_1 имеем необходимые ограничения

$$f_{00}(r_*) - G_0 = 2r_*, \quad G_1 = -3$$

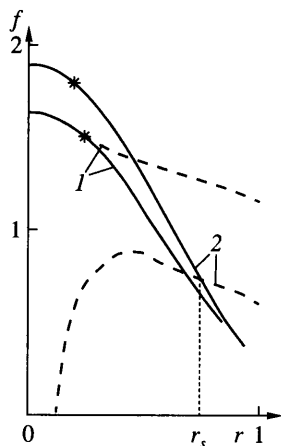
Отметим, что условие $G_1 = -3$ позволяет найти звуковую точку и из нее начинать расчет уравнения (1.3), зная только форму тела. Это же условие накладывает ограничение на форму тел, для которых возможно существование регулярных звуковых точек и позволяет заранее указать количество и расположение звуковых точек для заданной формы тела. Таким образом, зная лишь форму поверхности, можно указать, возможны ли для нее регулярные звуковые точки и сколько их, а также единственно ли решение в главном приближении и зависит ли оно монотонно от параметра задачи, или же существуют точки бифуркации. На фиг. 4 показана бифуркация решения (1.3) при критическом значении параметра $h = h_*$, а также при $h > h_*$. На фиг. 5 схематически приведено изменение расположения звуковой точки с ростом параметра h ; при малых высотах звуковая точка находится на краю торца (II), при больших – вблизи вершины тела (I), при этом решение, непрерывно зависящее от параметра, существует в ограниченном диапазоне высот. Разрывные решения для наклона скачка при высотах центрального тела $h \geq h_*$ представлены на фиг. 6.

Заметим, что на расстояниях порядка $\delta \sim |\Delta h|^{1/(2+\alpha)}$ нарушается равномерная пригодность разложений (2.1). Для построения асимптотического разложения вблизи особой точки удобно использовать δ в качестве малого параметра

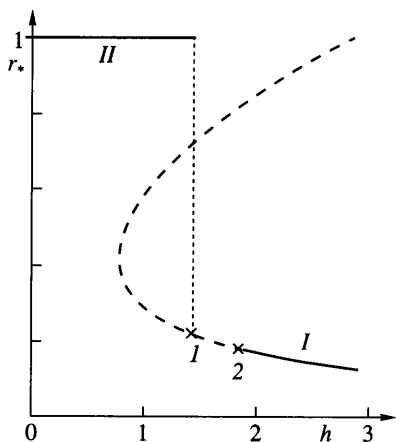
$$\begin{aligned} f_0 &= f_{00}(r_*) - \delta r_1 + \delta^2 F_1(r_1) + \delta^3 F_2 + \dots \\ r_1 &= \frac{r - r_*}{\delta}, \quad h = h_* + \delta^{2+\alpha} h_1 + \dots, \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в уравнение (1.3) и совершая предельный переход, получим уравнение относительно $F_1(r_1)$

$$r_* F_1'^2 - F_1 + \frac{1}{2}G_2 r_1^2 = 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 4. Решения уравнения (1.3) с двумя вариантами продолжения через критическую точку: кривые 1, 2 – $h = 1.425; 1.7$; r_s – координата точки бифуркации



Фиг. 5. Положение звуковой точки r_* в зависимости от параметра h : 1–2 – $h = 1.425; 1.844$; кривая I – возможное положение звуковой точки на поверхности торца, кривая II – звуковая точка находится на боковой кромке

Асимптотика функции F_1 при $r_1 \rightarrow -\infty$ имеет вид

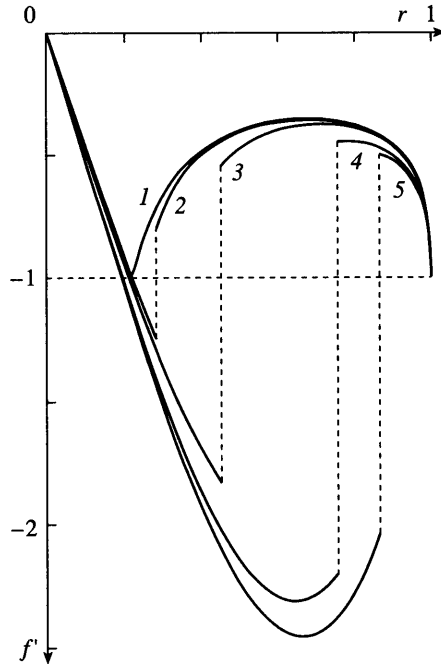
$$F_1 = \frac{1}{2}k_1 r_1^2 + \frac{h_1 a_1}{(-r_1)^{-\alpha}} + \dots \tag{2.4}$$

Легко видеть, что уравнение (2.3) допускает решения вида $F_1 = \frac{1}{2}Lr_1^2, L_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8r_* G_2}}{4r_*}$

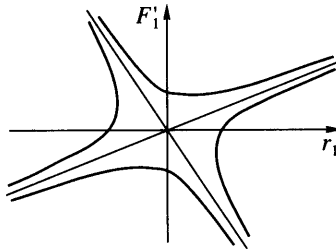
В частности $k_1 = L_-, G_2 < 0$.

Решение задачи (2.3), (2.4) относительно наклона скачка $F'_1(r_1)$ следующее:

$$(F'_1 - L_- r_1)(F'_1 - L_+ r_1)^{\alpha+1} = \alpha(L_+ - L_-)^{\alpha+1} a_1 h_1 \tag{2.5}$$



Фиг. 6. Разрывные решения для наклона скачка уплотнения f' при высотах центрального тела $h \geq h_*$: 1-5 – $h = 1.425; 1.434; 1.5; 1.7; 1.8$



Фиг. 7. Решения (2.5) $F'_1(r_1)$

Схематически это решение представлено на фиг. 7. При $h_1 < 0$, когда высота центрального тела меньше критической, решение (2.5) определено для всех r_1 и имеет разные наклоны L_-, L_+ при $r_1 \rightarrow \mp\infty$. При $h_1 = 0$ решение проходит через седловую точку. При $h_1 > 0$ функция $F'_1(r_1)$ определена только до некоторой точки, в которой имеет корневую особенность. При $h_1 \rightarrow 0$ слева наклон скачка уплотнения претерпевает излом.

Таким образом, действительно значение $h = h_*$ – критическое для исследуемого тела. В силу этого, имеет смысл подробнее изучить взаимодействие скачка уплотнения с тонким ударным слоем.

3. Наклон скачка уплотнения при $h \rightarrow h_*$ терпит излом, сглаживание которого происходит на размере $\Delta r = O(\delta)$. Ясно, что на этом же размере возмущаются и газодинамические функции. Возмущение давления из (1.1) и (1.2) имеет величину $\Delta p = O(\varepsilon\delta)$, оно пе-

редается на поверхность и возмущает касательную скорость $v_r = O(\epsilon)$, $\Delta v_r = O(\epsilon\delta)$. Изменение толщины пристенной струйки тока вызывает возмущения в основной части слоя: $\Delta v_r = O(\epsilon\delta)$, $v_y = O(\epsilon^{3/2})$. А дополнительная кривизна линий тока порождает поперечный перепад давления $\Delta p = O(\epsilon^{3/2}/\delta)$. Нетрудно заметить, что при $\delta \sim \epsilon^{1/4}$ индуцированное давление сопоставимо с исходным возмущением, что приводит к процессу взаимодействия между пристенной струйкой, основной частью слоя и скачком уплотнения.

Чтобы построить решение в области взаимодействия, выпишем асимптотическое разложение решения задачи (1.2) вблизи особой точки

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{00}(Y) + \delta u_{01}(r_1, Y) + \delta^2 u_{02} + \delta^3 u_{03} + \dots \\ v_0 &= v_{00}(Y) + \delta v_{01} + \delta^2 v_{02} + \dots, \quad p_0 = p_{00}(Y) + \delta p_{01} + \dots \\ H_0 &= H_{00}(Y) + \delta H_{01} + \dots, \quad r = r_* + \delta r_1, \quad \delta \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если $\delta = \epsilon^{1/4}$, то кроме Тейлоровских членов в (3.1) появятся дополнительные, обусловленные взаимодействием

$$\begin{aligned} u_{01} &= \frac{r_1}{r_*} Y u'_{00}, \quad u_{02} = \frac{r_1^2}{2r_*^2} Y^2 u''_{00} + U_2(Y), \quad u_{03} = \frac{r_1^3}{6r_*^3} Y^3 u'''_{00} + \frac{r_1}{r_*} Y U'_2 + A(r_1) u'_{00} \\ v_{00} &= -\frac{1}{r_*} Y u_{00}, \quad v_{01} = \frac{r_1}{r_*} Y (u_{00} - Y u'_{00}) \\ v_{02} &= -\frac{r_1^2}{r_*^3} Y \left(u_{00} - Y u'_{00} + \frac{1}{2} Y^2 u''_{00} \right) - \frac{1}{r_*} Y U_2 - A'(r_1) u_{00} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Давление p_0 можно определить из (1.2) по формуле

$$p_0 = -1 - f_0'^2 + \int_Y^{f_0 - s_0} \left(g_0'' u_0^2 + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial Y} \right) dY \tag{3.3}$$

Используя (3.3), вычисляется величина p_{01}

$$p_{01} = 2F_1' - A'' \int_0^{f_{00} - s_*} u_{00}^2(Y) dY + L r_1, \quad Y = 0$$

Константа L не представляет интереса, поэтому выражение для нее не приводится. Величина H_0 постоянна во всем потоке, поэтому, зная u_0 и p_0 , находим ρ_0

$$\rho_0 = 1 + p_0 + u_0^2 = 1 + p_{00}(Y) + u_{00}^2 + \delta(p_{01} + 2u_{00}u_{01}) + \dots$$

Вдоль поверхности тела распространяется тонкая струйка, движение в которой обусловлено градиентом давления (3.3). Исследуем влияние на нее возмущения давления p_{01}

$$\begin{aligned} v_r &= \epsilon U + \dots, \quad v_y = \epsilon^{3/2} g_0'(r) U + \epsilon^2 V + \dots \\ p &= 1 + \epsilon p_w + \dots, \quad Y_1 = \epsilon^{-1} (y - \epsilon^{1/2} g_0(r)) \end{aligned}$$

Решение в струйке имеет вид

$$U = \lambda r Y_1 + U_w, \quad p_w + \frac{1}{2} U_w^2 = -\frac{1}{2} \tag{3.4}$$

Давление p_w известно из (3.3) при $Y = 0$. Постоянная λ зависит от начальных данных: $u_0 = \lambda r Y + \dots, Y \rightarrow 0$.

Из уравнения Бернулли (3.4) следует связь между p_{01} при $Y = 0$ и $A(r_1)$

$$p_{01} = -\lambda r_* U_w A(r_1), \quad Y = 0, \quad A = \mu_* r_1 + \dots, \quad \mu_* > 0, \quad r_1 \rightarrow -\infty \quad (3.5)$$

Приравнивая значение p_{01} из основной части тонкого ударного слоя его значению в нижней части (3.5), получаем связь

$$\begin{aligned} -\lambda r_* U_w A &= 2F_1'(r_1) - \gamma A'' + Lr_1 \\ \gamma &= \int_0^{f_{00} - g_*} u_{00}^2(Y) dY, \quad \lambda > 0, \quad U_w > 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для замыкания задачи необходимо срастить вертикальные составляющие скорости из основной части слоя и на скачке уплотнения. Однако непосредственно выполнить эту операцию не удастся, необходимо рассмотреть дополнительную область за скачком уплотнения. В ней представим решение асимптотическими разложениями

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots, \quad v_0 = -2 - g_*' + \delta v_1 + \delta^2 v_2 + \dots \\ p_0 &= -2 + \delta p_1 + \dots, \quad r_1 = \delta^{-1}(r - r_*) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$Y_2 = \delta^{-1}[Y - (f_{00} - g_*) + (1 + g_*')(r - r_*)]$$

Для получения требуемого результата достаточно проанализировать задачу (1.2), вид ее решения указан в (3.7). Формулируя задачи относительно u_1, v_1 и u_2, v_2 и решая их, получим

$$\begin{aligned} u_1 &= -F_1'(r_1 + Y_2), \quad v_1 = -\frac{1}{r_*} Y_2 - (2 + g_*')u_1 - g_*'' r_1 \\ u_2 &= G_1(r_1 + Y_2) - \frac{1}{2r_*} Y_2^2 u_1' + \frac{1}{2} g_*'' r_1^2 u_1' \\ v_2 &= -(2 + g_*')G_1 + \frac{r_1 Y_2}{r_*^2} - \frac{1}{2}(2 + g_*')g_*'' r_1^2 u_1' - g_*'' r_1 u_1 + \frac{1}{2r_*}(2 + g_*')Y_2^2 u_1' - \\ &\quad - \frac{1}{r_*} Y_2 u_1 + G_2(r_1) + \frac{g_*''}{r_*} r_1^2 \end{aligned}$$

Граничное условие на скачке выполнено при $Y_2 = 0$.

Для того чтобы точно удовлетворить условию на скачке уплотнения, необходимо вычислить скорость v_0 из (3.7) при $Y_2 = \delta(F_1 - 1/2 g_*'' r_1^2)$. Таким образом учитывается поправка в положении скачка. В результате получим

$$G_1(r_1) = F_1 F_1'' - F_2', \quad G_2(r_1) = -F_1'^2 + \frac{1}{r_*} F_1 - \frac{(rg)_*'''}{2r_*} r_1^2 \quad (3.8)$$

Уместно указать, что $G_2(r_1)$ совпадает с левой частью уравнения (2.3) для возмущения формы скачка уплотнения. Это означает, что если взаимодействие отсутствует, то сращивание даст $G_2 = 0$. При наличии же вытеснения тонкого ударного слоя сращивание скоростей u_1, v_1 и u_2, v_2 с соответствующими скоростями (3.1) дает

$$G_2 = -A'(r_1) + \text{const} \quad (3.9)$$

Полученное соотношение замыкает задачу (3.6), (3.8), (3.9) для функций $F_1(r_1)$ и $A(r_1)$. Постоянная в (3.9) означает сдвиг скачка.

Выполнив замену переменных $A = \mu_* r_1 + A_1$ и аффинное преобразование

$$F_1 = \frac{1}{r_*} E^2 F, \quad r_1 = ER, \quad A_1 = \frac{E^3}{r_*^2} A_2, \quad E = \frac{1}{\sqrt{\lambda U_{w*}}}, \quad k_1 = \frac{k}{r_*}$$

получаем задачу относительно наклона скачка $\Theta = F'(R)$ и $A_2(R)$ (индекс 2 опускаем)

$$2\Theta\Theta' - \Theta - 2dR = A'', \quad \gamma A'' - A = 2(\Theta - kR)$$

$$R \rightarrow -\infty: \quad \Theta = kR - \frac{\Gamma}{(-R)^{\alpha+1}} + \dots, \quad A \rightarrow 0 \tag{3.10}$$

$$R \rightarrow +\infty: \quad \Theta = k_+ R + \dots, \quad A = -2(k_+ - k)R + \dots$$

Краевые условия при $|R| \rightarrow \infty$ берутся из (2.4) и (2.5). Параметр Γ связан с приращением высоты центрального тела. При $\Gamma \rightarrow -\infty$ высота тела убывает. Помимо Γ задача (3.10) содержит два независимых параметра d и γ , зависящих от свойств течения и формы тела. Наклоны k и k_+ и показатель степени α зависят от d

$$k = \frac{1 - \sqrt{1 + 16d}}{4}, \quad k_+ = \frac{1 + \sqrt{1 + 16d}}{4}, \quad \alpha = -\frac{1}{2k}, \quad d = -\frac{1}{2} r_* (rg)_*$$

Необходимое условие на параметр d : $d > 0$.

Отметим некоторые свойства задачи (3.10), в частности, помимо алгебраически затухающих членов при $R \rightarrow -\infty$ существуют и экспоненциально затухающие

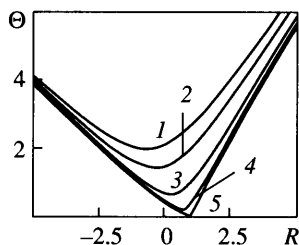
$$\Theta = kR + \dots + (-R)^{\beta-1} \exp\left(\frac{R}{\sqrt{\gamma}}\right) + \dots, \quad A = -\frac{1}{\beta\sqrt{\gamma}} (-R)^\beta \exp\left(\frac{R}{\sqrt{\gamma}}\right) + \dots, \quad \beta = \frac{1}{2\gamma k}$$

Это означает, что в отличие от (2.3), (2.4) в исследуемой задаче возможна передача возмущений вверх по потоку, и закономерно выставить условие вниз по потоку

$$R \rightarrow +\infty: \quad \Theta = k_+ R + \dots$$

Таким образом, вблизи особой точки ($f'_0 = -1$) возникает область взаимодействия между скачком уплотнения, основной частью тонкого ударного слоя и тонкой пристенной струйкой, описываемой (3.10). Эта задача решалась численно для $\gamma = 1$, $d = 15/16$, $k = -3/4$, $k_+ = 5/4$, $\alpha = 2/3$ и различных Γ . Расчеты показали (фиг. 8), что решение существует, если $\Gamma \leq \Gamma_* \approx -0.99$ (кривая 5). Это означает, что взаимодействие усугубляет процесс разрушения течения при выдвигании центрального тела. Физический смысл этого явления следующий. За звуковой точкой скачок отклоняется сильнее поперек к потоку набегающего газа, вследствие чего подрастает давление за скачком и на поверхности тела. Это приводит к торможению пристенной струйки и вызывает ее расширение, что, в свою очередь, еще больше отклоняет скачок уплотнения поперек к потоку. Поэтому особая точка достигается при меньших высотах центрального тела, чем в случае без учета взаимодействия. Неожиданным оказывается факт, что для системы (3.10), как и для (2.3), (2.4), точка, в которой $\Theta = 0$, оказывается особой и для $\Gamma > \Gamma_*$ не существует решений с указанными асимптотиками.

Так же, как и для исходного уравнения формы скачка (2.3), исследуем систему (3.10) вблизи точки $\Theta = 0$ при $\Gamma \rightarrow \Gamma_*^-$.



Фиг. 8. Решение (3.10) $\Theta(R)$: 1-5 – $\Gamma = -5; -3; -1.5; -1; -0.99$

Снова удобно в качестве малого параметра использовать размер Δ , на котором происходит сглаживание решения при $\Gamma \rightarrow \Gamma_*^-$. Асимптотическое разложение решения при $\Delta \rightarrow 0$ задачи (3.10) имеет вид

$$\Theta = \Delta \Theta_1(R_1) + \dots, \quad R_1 = \Delta^{-1}(R - R_*) \tag{3.11}$$

$$A = A_0 + \Delta A_1 R_1 + \frac{1}{2} \Delta^2 A_2 R_1^2 + \Delta^3 A_3(R_1) + \dots$$

Подставляя (3.11) в систему (3.10) и совершая предельный переход $\Delta \rightarrow 0$, $R_1 = O(1)$, получим

$$2\Theta_1 \Theta_1' - \Theta_1 - 2dR_1 = A_3'', \quad \gamma A_3'' - A_1 R_1 = 2(\Theta_1 - kR_1) \tag{3.12}$$

$$R_1 \rightarrow -\infty: \quad \Theta_1 = mR_1 + \dots$$

Постоянные A_0 и A_2 определяются, а A_1 находится, если известно $m < 0$. Заметим, что задача (3.12) после исключения A_3 имеет вид, схожий с (2.3) (если соотношение (2.3) один раз продифференцировать). Соответственно решение качественно совпадает с (2.5), представленным на фиг. 7. Таким образом, в окрестности точки $\Theta = 0$ взаимодействие вырождается, и решение жестко определяется краевым условием при $R_1 \rightarrow -\infty$. Роль взаимодействия описанного типа свелась к формированию локального, слабо не-параллельного течения, в котором снова формируется точка разрыва кривизны скачка при $\Gamma \rightarrow \Gamma_*^-$.

4. Следующий характерный режим будет при $\Delta = \epsilon^{1/4}$, при этом рассматриваемая область течения – квадратная $\Delta u \sim \Delta r \sim \epsilon^{1/2}$. Возмущения скоростей в этой области также одного порядка $\Delta v_r \sim \Delta v_y \sim \epsilon^2$, давление $\Delta p \sim \epsilon^{3/2}$. Необходимо также учитывать сжимаемость, так как $\Delta p \sim \epsilon^{1/2}$. Из (3.11) следует, что давление на поверхности тела возмущено в члене $\Delta p \sim \epsilon^2$, т.е. пристенная струйка перестает участвовать в процессе взаимодействия. Таким образом, течение описывается линейными уравнениями Эйлера сжимаемого газа. Асимптотические представления решения имеют вид

$$v_r = \epsilon^{1/2} u_{00} + \dots + \epsilon^2 U + \dots, \quad p = 1 + \epsilon p_{00} + \dots + \epsilon^{3/2} P + \dots$$

$$v_y = \epsilon^{1/2} g_*' v_r + \epsilon v_0 + \dots + \epsilon^2 V + \dots, \quad \rho = \frac{1}{\epsilon} + \rho_{00} + \dots + \epsilon^{1/2} \rho_1 + \dots \tag{4.1}$$

$$y_s' = \epsilon^{1/2} f_0'(r_*) + \dots + \epsilon^{3/2} \Theta(r_2) + \dots, \quad g'(r) = \epsilon^{1/2} g_*' + \epsilon g_*'' r_2 + \dots$$

$$r_2 = \epsilon^{-1/2}(r - r_*), \quad Y_1 = \epsilon^{-1/2}(y - \epsilon^{1/2} g(r))$$

Подставляя (4.1) в уравнения Эйлера и совершая предельный переход, получим

$$u_0 \frac{\partial U}{\partial r_2} + Vu'_0 = -\frac{\partial P}{\partial r_2} + L_1(u_0, r_2), \quad u_0 \frac{\partial V}{\partial r_2} = -\frac{\partial P}{\partial Y_1} + L_2(u_0, r_2) \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_2} + u_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r_2} + \frac{\partial V}{\partial Y_1} + L_3 = 0, \quad P - \rho_1 = L_4$$

В этой системе уравнений L_i – неоднородности, обусловленные Тейлоровскими членами разложения решения. Граничные условия для давления P и вертикальной составляющей скорости V следуют из соотношений (3.11), (3.12). После необходимой нормировки получим

$$Y_1 = 0: \quad P = -A_1 r_2$$

$$Y_1 = Y_s: \quad P = 2\Theta - 2kr_2, \quad \frac{\partial V}{\partial r_2} = -(2\Theta\Theta' - \Theta - 2dr_2) \tag{4.3}$$

При $|r_2| \rightarrow \infty$ выставляются условия сращивания с решением системы (3.12)

$$r_2 \rightarrow -\infty: \quad \Theta = mr_2 + \dots; \quad r_2 \rightarrow +\infty: \quad \Theta = m_+ r_2 + \dots$$

Коэффициенты m и m_+ получаются из расчета задачи (3.10) при $\Gamma \rightarrow \Gamma^*$.

Система уравнений (4.2) может быть сведена к единственному уравнению в частных производных эллиптического типа относительно возмущения давления P . Сделав замену переменных

$$P = -\frac{1}{\gamma} A_1 r_2 \int_{Y_1}^{Y_*} u_{00}^2 dY_1 + \frac{2}{\gamma} (\Theta - kr_2) \int_0^{Y_1} u_{00}^2 dY_1 + P_1$$

получаем при условии, что $u_{00}(Y_*) = 1$, краевую задачу

$$(1 - u_{00}^2) \frac{\partial^2 P_1}{\partial r_2^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial Y_1^2} - 2 \frac{u'_{00}}{u_{00}} \frac{\partial P_1}{\partial Y_1} = -\frac{2}{\gamma} \Theta'' (1 - u_{00}^2) \int_0^{Y_1} u_{00}^2 dY_1 \tag{4.4}$$

$$P_1(Y_1 = 0) = P_1(Y_1 = Y_*) = [P_1]_{|r_2| \rightarrow \infty} = 0$$

Из сращивания вертикальной составляющей скорости на скачке уплотнения $Y_1 = Y_s$ с ее значением из области полных уравнений Эйлера (4.3) возникает дополнительное условие к задаче (4.4)

$$Y_1 = Y_*: \quad \frac{\partial P_1}{\partial Y_1} = 2\Theta\Theta' - \left(1 + \frac{2}{\gamma}\right)\Theta - \left(2d + \frac{A_1}{\gamma} - \frac{2k}{\gamma}\right)r_2 \tag{4.5}$$

Задача (4.4) корректно поставлена при заданной неоднородности в уравнении и удовлетворение условию (4.5) в этом случае не требуется. Однако функция $\Theta(r_2)$ неизвестна, поэтому для нее должно быть выполнено некоторое условие разрешимости, из которого найдутся Θ и P_1 . Воспользуемся преобразованием Фурье, чтобы выписать условие разрешимости

$$p^* = \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(r_2, Y_1) \exp(-ilr_2) dr_2, \quad p^* = -\frac{2}{\gamma} [\Theta''(r_2)]^* p(l, Y_1)$$

Применяя к (4.4) преобразование Фурье и выполняя указанную замену переменных, получим краевую задачу

$$p'' - 2 \frac{u'_{00}}{u_{00}} p' - l^2 (1 - u_{00}^2) p = (1 - u_{00}^2) \int_0^{Y_1} u_{00}^2 dY_1 \quad (4.6)$$

$$p(0) = p(Y_*) = 0$$

Задача (4.6) может быть решена для любой заданной $u_{00}(Y_1)$, в результате найдется

$$\frac{dp}{dY_1} = T^*(l), \quad Y_1 = Y_*$$

Теперь легко выписать условие разрешимости, используя условие (4.5)

$$-\frac{2}{\gamma} [\Theta''(r_2)]^* T^*(l) = [2\Theta\Theta' - a\Theta - br_2]^* \quad (4.7)$$

Таким образом, получено уравнение относительно $\Theta(r_2)$ в переменных Фурье. Константы a и b введены для краткости записи и равны соответствующим коэффициентам в (4.5). Решение задачи (4.7) необходимо строить численно, задаваясь профилем скорости u_{00} . Конкретный метод решения таких задач указать трудно, поскольку уравнение не удается выписать в действительном виде. Ясно только, что при $l \rightarrow \infty$ получим предел без взаимодействия. Свойства задачи (4.7) в случае, если левая часть существенна, пока остаются неизвестными.

Заключение. Изучено течение совершенного газа вблизи почти плоского торца круглого цилиндра при больших числах Маха в предположениях теории тонкого ударного слоя. Найдены решения, содержащие точки бифуркации по параметру – высоте центрального тела на торце. Обнаружены режимы течения, в которых существенно взаимодействие между скачком уплотнения, течением в области за скачком и тонкой струйкой вблизи поверхности тела.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00765) и Государственной поддержке ведущих научных школ (№ НШ-8597.2006.1) и ВЦП РНПВШ.2.1.1.5904.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hayes W.D. Hypersonic flow fields at small density ratio (and its continuation) // Ramo-Wooldridge Corp. Rep. Los Angeles, Calif., 1955.
2. Антонов А.Н., Хейз У.Д. Расчет обтекания тупоносых тел гиперзвуковым потоком газа // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 2. С. 347–352.
3. Голубкин В.Н., Негода В.В. Расчет гиперзвукового обтекания наветренной стороны крыла малого удлинения при больших углах атаки // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 10. С. 1586–1594.
4. Голубинский А.И., Голубкин В.Н. Анализ особенностей в решении задачи гиперзвукового обтекания треугольного крыла малого удлинения // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 2. С. 20–29.
5. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
6. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
7. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
8. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Физматлит, 2004. 455 с.