

УДК 532.592: 517.953

© 2007 г. Н.А. КУДРЯШОВ, А.В. МИГИТА

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ УЧЕТЕ ДИСПЕРСИИ В ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Изучаются волновые процессы одной из моделей турбулентности, которая возникает при описании процессов реакции-диффузии в физико-химической гидродинамике [1–5]. Для некоторых параметров уравнения получены аналитические точные решения в виде бегущей волны в форме кинков. Анализ волновых процессов в общем случае проводится с помощью численного моделирования. Подтверждается, что при нулевых значениях коэффициента дисперсии нелинейные волновые процессы имеют неупорядоченный характер. Установлено, что при учете дисперсионных слагаемых, как и в случае уравнения Курамото–Сивашинского, начиная с некоторого порогового значения коэффициента дисперсии, в системе возникают периодические структуры.

*Ключевые слова:* диссипация, дисперсия, нелинейные волны, эволюционные уравнения, турбулентность, математическое моделирование, периодические структуры.

В последние годы проявляется большой интерес к изучению волновых процессов, описываемых простейшим нелинейным эволюционным уравнением шестого порядка, имеющим вид

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + \delta u_{xxx} + \varepsilon u_{xxxxx} = 0 \quad (0.1)$$

Впервые уравнение (0.1) было предложено в [1, 6] для описания продольных сейсмических волн в вязкоэластичной среде. Как пример уравнения, для которого при построении точных решений можно использовать метод сингулярных многообразий, уравнение (0.1) изучалось в [4]. Интерес к волновым процессам, описываемым (0.1), вновь возник в последнее время в связи с тем, что это уравнение используется при моделировании так называемого “мягкого типа турбулентности” [5, 7]. Уравнение (0.1) используется также при описании физических процессов, таких как описание электроконвекции в гомеотропно ориентированных жидких кристаллах [2] и для описания химических реакций в системах типа реакция-диффузия [3].

Формально уравнение (0.1) обобщает уравнение Курамото–Сивашинского

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + \delta u_{xxx} = 0 \quad (0.2)$$

имеющее многочисленные физические приложения: при стекании тонкого слоя жидкости по наклонной плоскости [8, 9], при описании фронтов пламени [10], для описания волн концентрации [11] и т.д. Волновые процессы, описываемые (0.2), в настоящее время хорошо изучены.

Умножив все слагаемые уравнения (0.1) на  $u(x, t)$  и проинтегрировав по  $x$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u^2 \rangle + \beta \langle u_x^2 \rangle - \delta \langle u_{xx}^2 \rangle + \varepsilon \langle u_{xxx}^2 \rangle = 0 \quad (0.3)$$

$$\langle u^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx \quad \langle u_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx$$

Из уравнения (0.3) следует, что при  $\beta < 0$ ,  $\delta < 0$  и  $\epsilon < 0$  третий и пятый члены в (0.1) соответствуют добавлению энергии в систему, тогда как четвертый член отвечает за диссипативные процессы. В случае  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$  и  $\epsilon > 0$  роль слагаемых в (0.1) меняется на противоположную. Естественно, что в зависимости от знаков коэффициентов  $\beta$ ,  $\delta$  и  $\epsilon$  в (0.1) возможны и другие варианты.

Введение дисперсионного слагаемого  $\sigma u_{xxx}$  в уравнение Курамото–Сивашинского (0.2) приводит к появлению периодических структур для волновых процессов при [12]  $\sigma(\beta\delta)^{-1/2} \geq 0.3$ . В этой связи возникает вопрос о периодических структурах при учете дисперсионных слагаемых в уравнении (0.1).

Цель данной работы – найти точные решения и показать, что введение в уравнение (0.1) дополнительных членов, соответствующих дисперсионным слагаемым, действительно приводит к образованию периодических структур.

**1. Точные решения уравнения (0.1).** Будем искать точные решения уравнения (0.1) в переменных бегущей волны, используя метод простейших уравнений [13, 14].

Перейдем к переменным бегущей волны  $u(x, t) = y(z)$ ,  $z = x - C_0 t$ . Уравнение (0.1) после интегрирования по  $z$  принимает вид

$$\epsilon y_{zzzzz} + \delta y_{zzz} + \beta y_z + \frac{1}{2} y^2 - C_0 y + C_1 = 0 \quad (1.1)$$

Решение уравнения (1.1) имеет полюс пятого порядка, поскольку, подставляя  $w(z) = a_0/z^p$ , имеем укороченное уравнение

$$\epsilon y_{zzzzz} + \frac{1}{2} y^2 = 0$$

откуда получаем  $(a_0, p) = (30240\epsilon, 5)$ . Следовательно, решение уравнения (1.1) можно искать в виде

$$y(z) = A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + A_3 Y^3 + A_4 Y^4 + A_5 Y^5 \quad (1.2)$$

где  $Y(z)$  удовлетворяет уравнению Риккати

$$Y_z = -Y^2 + \alpha \quad (1.3)$$

Подставим (1.2) в (1.1). Тогда, учитывая, что (1.3) выполняется, и приравнявая коэффициенты при различных степенях  $Y(z)$  к нулю, получаем систему алгебраических уравнений на  $A_5, A_4, A_3, A_2, A_1, A_0, C_1, \beta, \alpha$ . Решая эту систему, получаем

$$A_5 = 30240\epsilon, \quad A_4 = 0, \quad A_3 = \frac{2520\delta}{11} - 50400\epsilon\alpha, \quad A_2 = 0$$

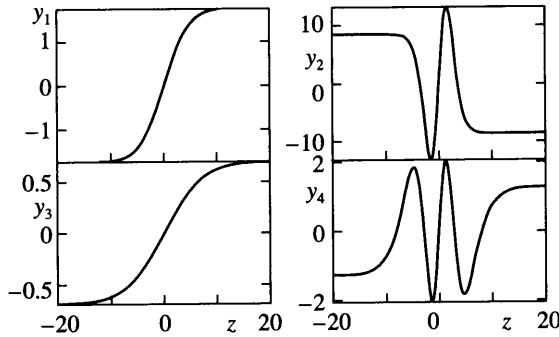
$$A_1 = -\frac{2520}{11}\delta\alpha + 20160\epsilon\alpha^2 + \frac{1260}{251}\beta - \frac{12600\delta^2}{30371\epsilon}, \quad A_0 = C_0$$

Коэффициент  $\alpha$  может принимать следующие значения

$$\alpha_k = \frac{\delta w_k}{\epsilon} \quad (k = 1, 2, \dots, 4)$$

$$w_1 = -\frac{1}{220}, \quad w_2 = -\frac{5}{176}, \quad w_3 = -\frac{1}{440}, \quad w_4 = \frac{1}{52800} \left( 557 - \frac{46031}{m} + m \right)$$

где константа  $m \approx 610, 966$ . Коэффициенты  $C_1$  и  $\beta$  в уравнении (1.1) зависят от  $w_k$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  и  $\alpha_k$ .



Фиг. 1. Точные решения уравнения (0.1), соответствующие  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

$$\beta = -1767040\epsilon^2 \alpha_k n + 84336\delta \alpha_k^2 n + \frac{2045\delta^3}{121\epsilon} n + \frac{84000}{11} \delta \alpha_k n$$

$$n = (9240\epsilon \alpha_k + 79\delta)^{-1}$$

Таким образом, получаем следующие решения уравнения (1.1):

$$y(z) = 30240\epsilon Y^5 + \left(\frac{2520}{11}\delta - 50400\epsilon \alpha_k\right) Y^3 + \left(-\frac{2520}{11}\delta \alpha_k + 20160\epsilon \alpha_k^2 + \frac{1260}{251}\beta - \frac{12600\delta^2}{30371\epsilon}\right) Y + C_0 \tag{1.4}$$

где  $Y(z)$  – решения уравнения (1.3) с  $\alpha = \alpha_k$

$$Y(z) = \sqrt{\alpha_k} \tanh(\sqrt{\alpha_k} z + \varphi_0), \quad (k = 1, 2, \dots, 4) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4), получаем четыре различных солитоноподобных точных решения уравнения (1.1), соответствующих четырём различным значениям  $\alpha$  (фиг. 1).

Аналогично можно искать периодические точные решения уравнения (1.1) в виде

$$y(z) = B_1 + B_2 R(z) + B_3 R_z + B_4 R^2 + B_5 R R_z$$

где  $R(z)$  – решение уравнения

$$R_z^2 = -2R^3 + aR^2 + 2bR + d$$

Продельывая те же операции, что и в предыдущем случае, получаем

$$B_5 = -3780\epsilon, \quad B_4 = 0, \quad B_3 = 630\epsilon a + \frac{630}{11}\delta$$

$$B_2 = 0, \quad B_1 = C_0, \quad \beta = \frac{10}{121} \frac{\delta^2}{\epsilon}$$

$$b_{1,2} = -\frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{1452} \frac{\delta^2}{\epsilon^2} \pm \frac{1}{5082} \frac{\sqrt{21}\delta^2}{\epsilon^2}$$

$$d_{1,2} = \frac{1}{108}a^3 + \frac{13}{359370}\frac{\delta^3}{\varepsilon^3} \pm \frac{1}{119790}\frac{\sqrt{21}\delta^3}{\varepsilon^3} - \frac{1}{4356}\frac{a\delta^2}{\varepsilon^2} \mp \frac{1}{15246}\frac{a\sqrt{21}\delta^2}{\varepsilon^2}$$

$$C_1^{(1,2)} = -\frac{10854}{161051}\frac{\delta^5}{\varepsilon^3} + \frac{1}{2}C_0^2 \mp \frac{2484}{161051}\frac{\sqrt{21}\delta^5}{\varepsilon^3}$$

Окончательно периодические решения уравнения (1.1) имеют вид

$$y(z) = C_0 + 630\left(\varepsilon a + \frac{\delta}{11} - 6\varepsilon R\right)R_z$$

где  $R(z)$  является решением уравнения

$$R_z^2 = F(R, a, \delta, \varepsilon)$$

$$F(R, a, \delta, \varepsilon) = -2R^3 + aR^2 - \frac{1}{6}a^2R + \frac{1}{726}\frac{R\delta^2}{\varepsilon^2} \pm \frac{1}{2541}\frac{R\sqrt{21}\delta^2}{\varepsilon^2} +$$

$$+ \frac{1}{108}a^3 + \frac{13}{359370}\frac{\delta^3}{\varepsilon^3} \pm \frac{1}{119790}\frac{\sqrt{21}\delta^3}{\varepsilon^3} - \frac{1}{4356}\frac{a\delta^2}{\varepsilon^2} \mp \frac{1}{15246}\frac{a\sqrt{21}\delta^2}{\varepsilon^2} \quad (1.6)$$

При  $R_1, R_2$  и  $R_3$ , таких что  $R_1 \geq R_2 \geq R_3$  – действительные корни уравнения  $F(R, a, \delta, \varepsilon) = 0$ , общее решение (1.6) можно записать в виде

$$R(z) = R_2 + (R_1 - R_2)\operatorname{cn}^2(z\sqrt{R_1 - R_2}, S), \quad S^2 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 - R_3}$$

Решения (1.4) являются волнами переключения (кинками), соединяющими два уровня отклонения от положения равновесия. Зависимости  $u_1$  и  $u_2$  при этом имеют гладкий волновой фронт, а  $u_3$  и  $u_4$  – осцилляционный характер волнового фронта. Интересно проанализировать устойчивость этих волн для того, чтобы выяснить, могут ли они наблюдаться в эксперименте. Ниже будет показано, что уединенные волны  $u_1, u_2, u_3$  и  $u_4$  являются устойчивыми.

## 2. Численное моделирование волновых процессов, описываемых уравнением (0.1).

Рассмотрим волновые процессы, описываемые уравнением (0.1) при периодических граничных условиях. Численное решение задач, описываемых уравнением высокого порядка, представляет собой сложную задачу. Для решения этих задач использована модификация алгоритма ETDRK4, представленного в [15, 16].

Пусть имеется задача

$$u_t = Lu + N(u, t, x), \quad u(t_0) = u_0$$

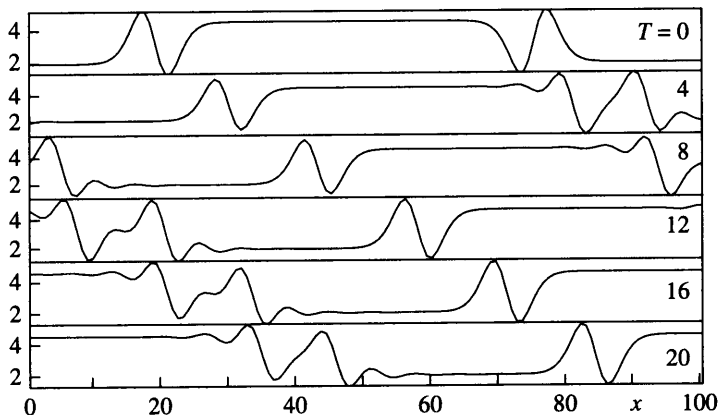
граничные условия – периодические. Здесь  $L$  – линейный оператор, обычно линейный дифференциальный оператор высокого порядка,  $N$  – нелинейный оператор низкого порядка.

После преобразования Фурье получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (здесь  $u$  означает фурье-образ  $u$ ,  $L, N$  – фурье-образы  $L$  и  $N$  соответственно):

$$u_t = Lu + N(u, t, x)$$

Для решения таких систем была разработана схема EDT [16].

В данной работе использован метод четвертого порядка ETDRK4, основанный на аппроксимации типа Рунге–Кутты. Фактически использована модификация этого метода,



Фиг. 2. Моделирование распространения волны, описываемой точным решением  $u_1$  уравнения (0.1)

в которой для вычисления коэффициентов используются контурные интегралы. Подробно этот метод изложен в [15].

Полученные в разд. 1 точные решения уравнения (0.1) использованы для тестирования численного метода. Поскольку несингулярные точные решения являются кинками, это создавало дополнительные трудности при решении периодической задачи, которые преодолевались следующим образом. Точное решение зеркально отражалось относительно некоторой точки, и в качестве начального условия при моделировании задавалась суперпозиция точного и отраженного решения (фиг. 2).

Точное решение распространяется, не меняя своей формы, в виде бегущей волны, а отраженное решение разваливается, создавая при этом возмущения, захватывающие все большую область периодического домена (фиг. 2). При этом длина домена и время моделирования подбирались таким образом, чтобы возмущения от отраженного решения не успевали дойти до кинка и разрушить его. Увеличивая длину домена, можно наблюдать точное решение сколь угодно долго.

С помощью численного моделирования периодических волн, описываемых уравнением (0.1), проверялась также устойчивость точных решений уравнения (0.1). Периодические волны, описываемые уравнением (0.1), неустойчивые [7, 17]. Однако численное моделирование при значительных возмущениях точных решений (1.4) показало, что точные решения в течение всего времени расчета не меняют своей формы. Из этого можно сделать вывод, что точные решения в виде кинков устойчивы.

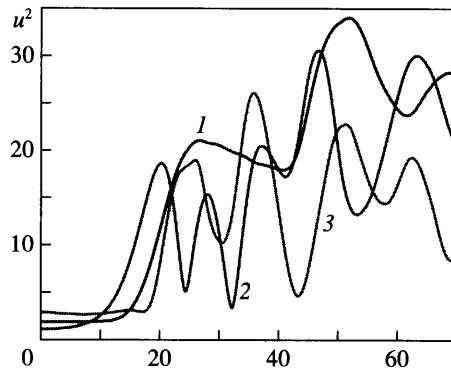
В уравнении (0.1) присутствуют три параметра, однако независимым из них является только один. С помощью замены переменных, приведем уравнение к виду

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^2 [ru - (1 + \partial_x^2) u] = 0 \quad (2.1)$$

В таком виде уравнение удобнее анализировать. Дисперсионным соотношением этого уравнения будет

$$\lambda = k^2 [r - (1 - k^2)^2] \quad (2.2)$$

Из (2.2) видно, что при  $r \leq 0$   $\lambda < 0$  для всех мод, начальные возмущения затухают. Следовательно, неустойчивость возникает при  $r > 0$ . При  $r \ll 1$  она характеризуется взаимодействием длинноволновых мод, сосредоточенных вблизи  $k = 0$ , с неустойчивыми



Фиг. 3. Эволюция амплитуды трех первых мод при  $L = 32\pi$ ,  $r = 0.2$ ,  $\sigma = 0$

модами, для которых  $k \sim 1$ . Причем ширина части спектра, где  $\lambda > 0$ , является величиной порядка  $\sqrt{r}$ . С ростом  $r$  полоса неустойчивости расширяется, и при  $r \sim 1$  сценарий взаимодействия неустойчивых мод с длинноволновыми гармониками уже не может реализоваться, так как эти две части спектра уже не разделяются.

Интересно изучить поведение системы, описываемой уравнением (2.1), при малых  $r$ , что и сделано с помощью численного моделирования. Численное моделирование показало, что эволюция профиля при малых  $r$  проходит по сходному сценарию: в некоторый момент профиль “взрывается”, т.е. амплитуда скачкообразно изменяется, после чего остается постоянной. Момент взрыва можно считать временем образования структур.

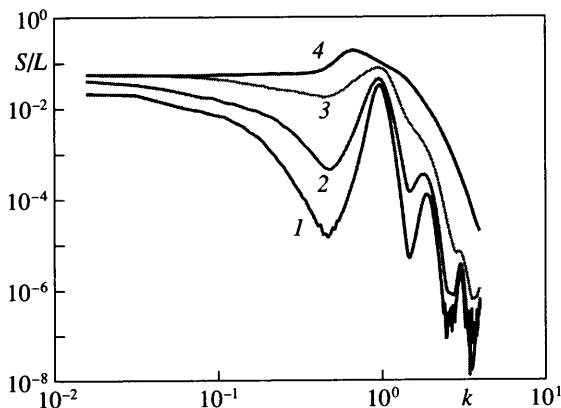
На фиг. 3 показана эволюция амплитуды трех первых мод. Из графика видно, что после небольшого промежутка времени устанавливается некоторый асимптотический режим. Было показано, что этот режим характеризуется всеми признаками развитого пространственно-временного хаоса – экспоненциальным разбеганием близких траекторий в фазовом пространстве и экспоненциальным затуханием автокорреляционных функций [7].

Одной из важнейших характеристик хаотического режима является спектральная плотность  $S(k)$  – установившееся распределение энергии по гармоникам [17]. Была проведена серия расчетов при различных значениях параметра  $r$  с целью выяснения характера этого распределения (фиг. 4). Расчеты показывают, что с ростом  $r$  и увеличением полосы неустойчивости распределение переходит в аналогичное распределение, полученное для уравнения Курамото–Сивашинского. Условно границей между двумя видами хаоса можно считать  $r \approx 0.5$ –1 [18].

Из проведенного численного анализа волновых процессов, описываемых уравнением (0.1), следует, что точные решения в виде кинков устойчивы на прямой. Некоторые характеристики асимптотического хаотического режима показывают, что при  $r \sim 1$  он имеет большое сходство с хаосом, определяемым уравнением Курамото–Сивашинского.

**3. Образование периодических волновых структур при учете дисперсии.** Учет дополнительного дисперсионного слагаемого в уравнении Курамото–Сивашинского приводит к образованию волновой структуры с конкретной частотой волны, т.е. к стабилизации [12]. Возникает вопрос: наблюдается ли подобное явление для волновых процессов, описываемых уравнением (0.1)? С целью выяснения этого вопроса проведено численное моделирование волновых процессов, описываемых уравнением

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + \sigma u_{xxx} + \delta u_{xxxx} + \epsilon u_{xxxxx} = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 4. Распределение энергии по модам при  $r = 0.015, 0.03, 0.1$  и для уравнения Курamoto–Сивашинского ( $L = 128\pi, T = 20000$ )

Поскольку уравнение допускает замену  $u \rightarrow -u, x \rightarrow -x, \sigma \rightarrow -\sigma$ , численное моделирование проводилось при  $\sigma > 0$ .

Результаты расчетов при периодических граничных условиях показали, что при некоторых значениях  $\sigma > \sigma_*$  в системе возникают периодические структуры. Непосредственно перед моделированием можно перейти к безразмерным переменным, при этом в системе останутся два свободных параметра. Имеет смысл выбрать два параметра, описывающих систему, и зафиксировать остальные, изучая уравнение (3.1)

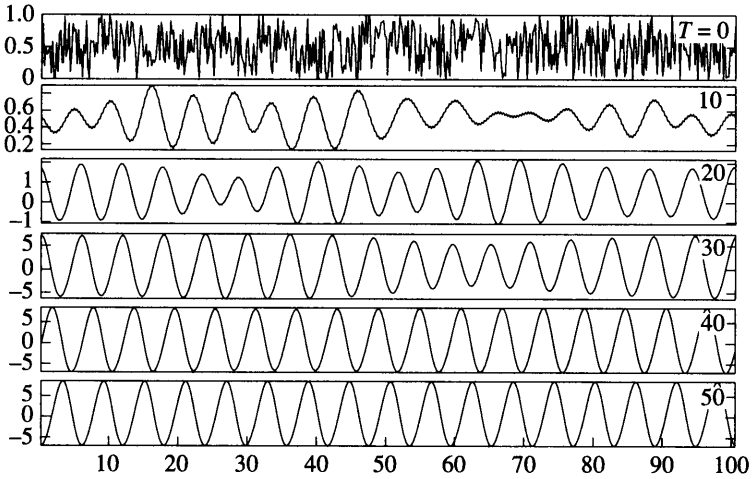
$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x^2 [ru - (1 + \partial_x^2)^2 u] + \sigma \partial_x^3 u = 0$$

Значения  $r$  и  $\sigma$  при разных расчетах изменялись. Начальное условие для периодической задачи, описываемой (3.1), задавалось с помощью датчика случайных чисел с амплитудой, равной 1 в каждой точке пространственной координаты. На фиг. 5 иллюстрируется образование периодической структуры, описываемой уравнением (3.1) при  $r = 0.2$  и  $\sigma = 5.14$ . Из фиг. 5 видно, что начальный профиль за время порядка  $\sim r^{-1/2}$  переходит в устойчивую периодическую структуру. Таким образом, обеспечивающее дисперсию слагаемое  $\sigma u_{xxx}$  приводит к образованию устойчивых периодических структур.

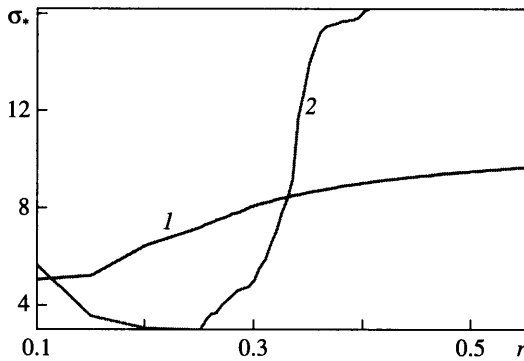
Численные эксперименты показали, что при малых значениях параметра  $\sigma$  дисперсия не оказывает существенного влияния на динамику. Однако при увеличении параметра  $\sigma$  хаотический асимптотический режим сменяется регулярным – образуются периодические структуры. Таким образом, можно говорить о некотором критическом значении параметра  $\sigma_*$ . Так как у уравнения (3.1) имеются два контрольных параметра:  $r$  и  $\sigma$ , очевидно, критическое значение будет зависеть от  $r$ , т.е.  $\sigma_* = \sigma_*(r)$ . Была проведена серия численных экспериментов для выяснения характера зависимости  $\sigma_*(r)$ . Она определялась следующим образом: для фиксированного  $r$  критическим считалось то значение  $\sigma$ , при котором наибольшее отклонение энергии каждой из мод от своего среднего значения не превышало 0.1.

Полученные данные (фиг. 6) следует интерпретировать как приближенную зависимость  $\sigma_*(r)$ . При одних и тех же значениях параметров существует несколько состояний, одно из которых является периодической структурой не в форме бегущей волны, а в форме устойчивых периодических колебаний.

При фиксированном значении  $r$  и увеличении  $\sigma$  получают структуры, в которых представлены одна-две моды: мода с  $k = 1$  и ее пространственные сателлиты (фиг. 7).



Фиг. 5. Образование периодической структуры при  $r = 0.2$  и  $\sigma = 5.14$



Фиг. 6. Зависимость  $\sigma_*$  от  $r$  для уравнений (3.1) и (3.2) (кривые 1 и 2)

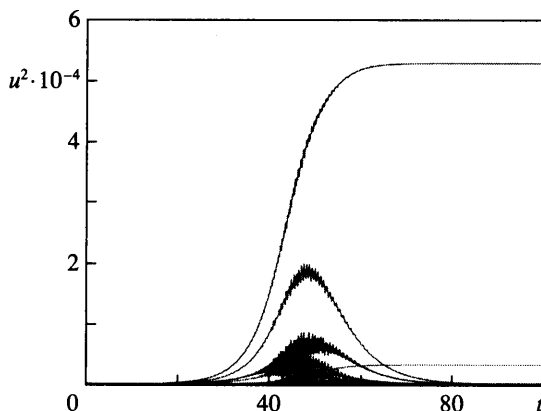
Установлено, что образование структур можно наблюдать и при учете дисперсионного слагаемого с пятой производной. Так численное моделирование периодических волн, описываемых уравнением

$$u_t + uu_x + \beta u_{xx} + \delta u_{xxxx} + \sigma u_{xxxxx} + \epsilon u_{xxxxxx} = 0 \tag{3.2}$$

показывает, что слагаемое  $\sim u_{xxxxx}$  при достаточно больших значениях коэффициента  $\sigma$  приводит к стабилизации. Как и для уравнения (3.1), была проведена серия расчетов для определения качественной зависимости  $\sigma_*(r)$ . Результаты вычислений представлены на фиг. 6. Для уравнения (3.2) также существует несколько устойчивых состояний при одних и тех же значениях параметров. Одно из этих состояний является периодической структурой, другие – некоторыми устойчивыми периодическими по времени и пространству решениями.

**Заключение.** Изучались волновые процессы одной из моделей турбулентности, описываемой диссипативным уравнением шестого порядка (0.1) по пространственной координате. Найдены точные решения этого уравнения в виде уединенных волн и для перио-





Фиг. 7. Образование структур при  $\sigma = 500$  и  $r = 0.2$ : эволюция мод

дических граничных условий. Численное моделирование показало, что решения в виде кинков устойчивы. Определены характеристики волнового процесса, в частности спектральная плотность. При некоторых значениях параметров тип хаотического поведения близок к волновым процессам, описываемым уравнением Курамото–Сивашинского. Изучено влияние дисперсионных слагаемых с производными третьего и пятого порядков на образование структур, возникающих при моделировании периодических задач для рассматриваемых уравнений ((3.1), (3.2)). При значениях коэффициента при дисперсионном члене  $\sigma > \sigma_*$  образуются устойчивые периодические структуры. Получена зависимость критических чисел  $\sigma_*$  от параметров модели.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikolaevskii V.N. Dynamics of viscoelastic media with internal oscillators // Recent Advances in Engineering Sciences. Eds Koh S.L., Speciale C.G. Berlin: Springer, 1989. P. 210–221.
2. Tribelsky M.I. Statistical properties of chaos at onset of electroconvection in homeotropically aligned nematic layer // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 3. P. 3729–3732.
3. Tanaka D. Chemical turbulence equivalent to Nikolaevskii turbulence // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 1. P. 1522-1–1522-4.
4. Кудряшов Н.А. Точные решения уравнения N-го порядка с нелинейностью Бюргерса–Кортвега-де Фриза // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 6. С. 57–65.
5. Tribelsky M.I., Tsuboi K. New scenario for transition to turbulence // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 10. P. 1631–1634.
6. Beresnev I.A., Nikolaevskiy V.N. A model for nonlinear seismic waves in a medium with instability // Physica D. 1993. V. 66. № 1. P. 1–6.
7. Трибельский М.И. Коротковолновая неустойчивость и переход к хаосу в распределенных системах с дополнительной симметрией // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 2. С. 167–190.
8. Шкадов В.Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
9. Topper J., Kawahara T. Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 2. P. 663–666.
10. Sivashinsky G.I. Instabilities, pattern formation, and turbulence in flames // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 179–199.
11. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Progr. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2. P. 356–369.

12. Алексеев А.А., Кудряшов Н.А. Особенности нелинейных волн в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 4. С. 130–136.
13. Kudryashov N.A. Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. V. 24. № 5. P. 1217–1231.
14. Kudryashov N.A. Exact solutions of generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Phys. Lett. A. 1990. V. 147. № 5–6. P. 287–291.
15. Kassam A., Trefethen L.N. Fourth-order time stepping for stiff PDEs // SIAM Journal Scient. Comput. 2005. V. 26. № 4. P. 1214–1233.
16. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems // J. Comp. Phys. 2002. V. 176. № 2. P. 430–455.
17. Matthews P.C., Cox S.M. One-dimensional pattern formation with Galilean invariance near a stationary bifurcation // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 2. P. R1473–R1476.
18. Dan Tanaka. Critical exponents of Nikolaevskii turbulence <http://arxiv.org/abs/nlin.CD/412012.2004>.

Москва

Поступила в редакцию  
31.VIII.2006