

УДК 532.529:532.517.3

© 2007 г. В.М. АЛИПЧЕНКОВ, Л.И. ЗАЙЧИК

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ЧАСТИЦ В АНИЗОТРОПНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

Построены дифференциальные и алгебраические модели для турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе, а также для смешанных моментов пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз. Модели основаны на кинетическом уравнении для совместной плотности вероятности скорости и температуры частиц в анизотропном турбулентном потоке. Выполнено сопоставление с данными прямого численного моделирования.

*Ключевые слова:* анизотропная турбулентность, частицы, кинетическое уравнение, функция плотности вероятности, турбулентные напряжения и тепловые потоки.

Континуальный эйлеров метод моделирования дисперсных турбулентных потоков основан на двухжидкостных моделях в рамках механики взаимопроникающих гетерогенных сред. Этот подход требует определения турбулентных напряжений и тепловых потоков, т.е. вторых моментов пульсаций скорости и температуры, в обеих сплошной и дисперсной фазах. Наиболее последовательным способом нахождения турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе является построение кинетического уравнения для функции плотности вероятности (ФПВ) скорости и температуры частиц в турбулентном потоке. Кинетические уравнения для ФПВ скорости частиц в турбулентной сплошной среде были получены в [1–8], а для совместной ФПВ скорости и температуры частиц – в [9–11]. В [12] построено кинетическое уравнение для ФПВ скорости частиц с учетом анизотропии лагранжевых автокорреляционных функций и временных масштабов турбулентности [13]. Анализ движения дисперсной фазы в однородном сдвиговом потоке [12] свидетельствует, что модель, учитывающая анизотропию временных масштабов турбулентности, дает лучшее согласие с данными прямого численного моделирования и предсказывает большую анизотропию пульсаций скорости частиц по сравнению с моделью, основанной на изотропных временных масштабах.

В настоящей статье представлено кинетическое уравнение для совместной ФПВ скорости и температуры частиц с учетом эффектов анизотропии автокорреляционных функций и лагранжевых масштабов турбулентности. На основе кинетического уравнения для ФПВ построены дифференциальные и линейные и нелинейные алгебраические модели для турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе, а также алгебраические модели для смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз. Концентрация частиц предполагается небольшой, так что обратным влиянием частиц на турбулентность и межчастичными столкновениями можно пренебречь.

**1. Уравнение для ФПВ скорости и температуры частиц.** Движение и теплообмен с окружающей средой небольшой тяжелой частицы в турбулентном потоке описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{R}_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} + \mathbf{F}, \quad \frac{d\theta_p}{dt} = \frac{\vartheta(\mathbf{R}_p, t) - \theta_p}{\tau_t} + Q \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{R}_p$ ,  $\mathbf{v}_p$ ,  $\theta_p$  – координата, скорость и температура частицы;  $\mathbf{u}(\mathbf{R}_p, t)$ ,  $\vartheta(\mathbf{R}_p, t)$  – скорость и температура сплошной среды в точке  $\mathbf{x} = \mathbf{R}_p(t)$ ;  $\tau_p$ ,  $\tau_t \equiv \tau_p$  – времена динамической и

термической релаксации частицы;  $\mathbf{F}$  – ускорение внешней силы, действующей на частицу (например, силы тяжести);  $Q$  – интенсивность тепловыделения в частице. Уравнения (1.1) справедливы, если плотность материала частиц много больше плотности сплошной среды (жидкости), а размер частиц меньше колмогоровского пространственного масштаба турбулентности.

С целью перехода от динамических стохастических уравнений движения и теплообмена к статистическому описанию распределения скорости и температуры частицы вводится одночастичная ФПВ в фазовом пространстве координат, скоростей и температур  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \theta)$

$$P = \langle p \rangle = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)) \delta(\theta - \theta_p(t)) \rangle \quad (1.2)$$

где  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта-функция Дирака, а угловые скобки обозначают осреднение по ансамблю случайных реализаций скорости  $\mathbf{u}$  и температуры  $\vartheta$  турбулентного поля жидкости. ФПВ  $P(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \theta, t)$  определяется как плотность вероятности частицы находиться в точке  $\mathbf{x}$  со скоростью  $\mathbf{v}$  и температурой  $\theta$  в момент времени  $t$ . Дифференцируя (1.2) по времени с учетом (1.1), представляя актуальные скорость и температуру жидкости в виде сумм осредненных и пульсационных составляющих  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$  и  $\vartheta = T + \vartheta'$  и принимая во внимание соотношения  $\langle v_i p \rangle = v_i P$  и  $\langle \theta p \rangle = \theta P$ , получаем транспортное уравнение для ФПВ скорости и температуры частицы

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left[ \left( \frac{U_k - v_k}{\tau_p} + F_k \right) P \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{T - \theta}{\tau_r} + Q \right) P \right] = \\ = - \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial \langle u'_k p \rangle}{\partial v_k} - \frac{1}{\tau_r} \frac{\partial \langle \vartheta' p \rangle}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Члены в левой части уравнения (1.3) описывают эволюцию во времени и конвекцию в фазовом пространстве, а в правой части характеризуют взаимодействие частицы с турбулентными вихрями несущего потока. Для замыкания уравнения (1.3) необходимо определить корреляции между пульсациями скорости и температуры сплошной среды и плотностью вероятности скорости и температуры частицы  $\langle u'_i p \rangle$ ,  $\langle \vartheta' p \rangle$ . С этой целью поля скорости и температуры сплошной среды моделируются гауссовыми случайными процессами с известными корреляционными моментами. Следует отметить, что результаты экспериментов и прямых численных расчетов свидетельствуют, что даже изотропная турбулентность не является гауссовой и “хвосты” ФПВ заметно отличаются от нормального распределения. Однако статистические аргументы, основанные на центральной предельной теореме, позволяют заключить, что “ядро” ФПВ, где сосредоточена большая часть энергии турбулентности, при больших числах Рейнольдса должно быть близким к нормальному распределению. В частности, экспериментальные данные [14] показывают, что, по крайней мере, в однородном сдвиговом потоке ядро ФПВ близко к эллиптическому гауссову распределению.

Используя функциональный формализм с учетом формулы Фурутцу–Донскера–Новикова для гауссовых случайных функций и применяя итерационную процедуру для решения интегральных функциональных уравнений [5, 10, 12], получаем следующие выражения для корреляций между пульсациями скорости и температуры жидкости и плотностью вероятности скорости и температуры частицы:

$$\begin{aligned} \langle u'_i p \rangle &= -\tau_p \left( \mu_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial x_j} + \lambda_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial v_j} + \eta_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \\ \langle \vartheta' p \rangle &= -\tau_r \left( \mu_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial v_i} + \eta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь величины  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$ ,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\eta$  обозначают интегралы от вторых корреляционных моментов пульсаций скорости и температуры сплошной среды вдоль траектории частицы. Для вычисления этих интегралов необходимо определить лагранжевы корреляционные моменты пульсаций скорости и температуры жидких частиц, движущихся по траекториям инерционных частиц. Согласно [8, 12] соответствующий момент пульсаций скорости представляется как

$$\langle u'_i(\mathbf{x}, t) u'_j(\mathbf{R}_p(t - \tau), t - \tau) | \mathbf{R}_p(t) = \mathbf{x} \rangle = \left( \langle u'_i u'_k \rangle - \frac{\tau D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} \right) \Psi_{Lp kj}(\tau) \quad (1.5)$$

$$\frac{D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial t} + V_n \frac{\partial \langle u'_i u'_k \rangle}{\partial x_n} + \frac{\partial \langle u'_i u'_k v'_k \rangle}{\partial x_n}$$

где  $\langle u'_i u'_j \rangle$  – турбулентные рейнольдсовы напряжения в сплошной фазе;  $\Psi_{Lp ij}(\tau)$  – автокорреляционная функция пульсаций скорости сплошной среды, определенная вдоль траектории частицы. Для безынерционных или жидких частиц и отсутствии “транспортного члена”, содержащего  $D_p \langle u'_i u'_k \rangle / Dt$ , (1.5) переходит в соотношение, предложенное в [13]. В анизотропном турбулентном потоке лагранжева автокорреляционная функция является тензором в отличие от изотропной турбулентности, где  $\Psi_{Lp ij}(\tau) = \Psi_{Lp}(\tau) \delta_{ij}$  и  $\Psi_{Lp}(\tau)$  – скалярная функция от инкремента времени  $\tau$ . Дополнительный транспортный член, введенный впервые в [8], учитывает изменение пульсаций скорости сплошной среды вдоль траектории частицы вследствие нестационарности, конвекции и диффузии.

Аналогично (1.5) лагранжевы корреляционный момент пульсаций скорости и температуры и корреляционный момент пульсаций температуры жидкой частицы, движущейся вдоль траектории инерционной частицы, выражаются в виде

$$\langle u'_i(\mathbf{R}_p(t - \tau), t - \tau) \vartheta'(\mathbf{x}, t) | \mathbf{R}_p(t) = \mathbf{x} \rangle = \left( \langle u'_k \vartheta' \rangle - \frac{\tau D_p \langle u'_k \vartheta' \rangle}{Dt} \right) \Psi'_{Lp kj}(\tau) \quad (1.6)$$

$$\frac{D_p \langle u'_i \vartheta' \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle u'_i \vartheta' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle u'_i \vartheta' \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u'_i v'_k \vartheta' \rangle}{\partial x_k}$$

$$\langle \vartheta'(\mathbf{x}, t) \vartheta'(\mathbf{R}_p(t - \tau), t - \tau) | \mathbf{R}_p(t) = \mathbf{x} \rangle = \left( \langle \vartheta'^2 \rangle - \frac{\tau D_p \langle \vartheta'^2 \rangle}{Dt} \right) \Psi_{Lp}(\tau) \quad (1.7)$$

$$\frac{D_p \langle \vartheta'^2 \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle \vartheta'^2 \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle \vartheta'^2 \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle v'_k \vartheta'^2 \rangle}{\partial x_k}$$

где  $\langle u'_k \vartheta' \rangle$ ,  $\langle \vartheta'^2 \rangle$  – турбулентный тепловой поток и интенсивность пульсаций температуры сплошной среды;  $\Psi'_{Lp ij}(\tau)$ ,  $\Psi_{Lp}(\tau)$  – автокорреляционные функции пульсаций скорости и температуры и интенсивности пульсаций температуры жидкости, определенные вдоль траектории частицы.

В результате получим

$$\lambda_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left( \frac{f_{ukj}}{\tau_p} + l_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} + \tau_p m_{ukl} \frac{\partial U_n}{\partial x_l} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{Dt} \left( f_{u1kj} + \tau_p l_{u1kn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right)$$

$$\mu_{ij} = \langle u'_i u'_k \rangle \left( g_{ukj} + \tau_p h_{ukn} \frac{\partial U_j}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p \langle u'_i u'_k \rangle}{2 Dt} g_{u1kj}$$

$$\eta_i = \langle u'_i u'_j \rangle \left( q_{ujk} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} + \tau_p r_{ujk} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p \langle u'_i u'_j \rangle}{2} q_{u1jk} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} + \frac{\langle u'_k \vartheta' \rangle f'_{tki}}{\tau_p} - \frac{\Upsilon D_p \langle u'_k \vartheta' \rangle}{2} \frac{f'_{t1ki}}{Dt} \quad (1.8)$$

$$\lambda_i = \frac{\langle u'_k \vartheta' \rangle}{\Upsilon} \left( \frac{f'_{uki}}{\tau_p} + l'_{ukn} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} + \tau_p m'_{ukl} \frac{\partial U_n}{\partial x_l} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} \right) - \frac{1}{2\Upsilon} \frac{D_p \langle u'_k \vartheta' \rangle}{Dt} \left( f'_{u1ki} + \tau_p l'_{u1kn} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} \right)$$

$$\mu_i = \frac{\langle u'_k \vartheta' \rangle}{\Upsilon} \left( g'_{uki} + \tau_p h'_{ukn} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p \langle u'_k \vartheta' \rangle}{2\Upsilon} \frac{g'_{u1ki}}{Dt}$$

$$\eta = \frac{\langle u'_i \vartheta' \rangle}{\Upsilon} \left( q'_{uik} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} + \tau_p r'_{uik} \frac{\partial U_n}{\partial x_k} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n} \right) - \frac{\tau_p D_p \langle u'_i \vartheta' \rangle}{2\Upsilon} \frac{q'_{u1ik}}{Dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} + \frac{\langle \vartheta'^2 \rangle f_t}{\tau_t} - \frac{1}{2} \frac{D_p \langle \vartheta'^2 \rangle}{Dt} f_{t1}$$

Коэффициенты  $f_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $l_{ij}$ ,  $h_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $f_{1ij}$ ,  $g_{1ij}$ ,  $l_{1ij}$  характеризуют степень вовлечения частиц в турбулентное движение сплошной среды. При использовании матричных обозначений эти коэффициенты записываются как

$$\mathbf{f}_u = \mathbf{M}_{u0}, \quad \mathbf{g}_u = \mathbf{N}_{u0} - \mathbf{f}_u, \quad \mathbf{f}_{u1} = \mathbf{M}_{u1}, \quad \mathbf{l}_u = \mathbf{g}_u - \mathbf{f}_{u1}, \quad \mathbf{h}_n = \mathbf{N}_{u1} + \mathbf{M}_{u1} - 2\mathbf{g}_u$$

$$\mathbf{m}_u = \mathbf{N}_{u1} + 2\mathbf{M}_{u1} + \mathbf{M}_{u2} - 3\mathbf{g}_u, \quad \mathbf{g}_{u1} = \mathbf{N}_{u1} - \mathbf{f}_{u1}, \quad \mathbf{f}_{u2} = 2\mathbf{M}_{u2}, \quad \mathbf{l}_{u1} = \mathbf{g}_{u1} - \mathbf{f}_{u2} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{M}_{un} = \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\tau) \tau^n \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_p} \mathbf{I}\right) d\tau, \quad \mathbf{N}_{un} = \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi_{Lp}(\tau) \tau^n d\tau$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Без учета анизотропии автокорреляционной функции  $\Psi_{Lp}(\tau)$  тензоры (1.9) становятся изотропными, т.е. превращаются в скалярные коэффициенты. Анизотропия коэффициентов вовлечения (1.9) может быть обусловлена двумя причинами – анизотропией масштабов турбулентности несущей сплошной среды и так называемым эффектом пересечения траекторий, имеющим место и в изотропной турбулентности [15, 16].

Коэффициенты вовлечения, характеризующие отклик частиц на совместные пульсации скорости и температуры жидкости, имеют вид

$$\mathbf{f}'_u = \mathbf{M}'_{u0}, \quad \mathbf{g}'_u = \mathbf{N}'_{u0} - \mathbf{f}'_u, \quad \mathbf{f}'_{u1} = \mathbf{M}'_{u1}, \quad \mathbf{l}'_u = \mathbf{g}'_u - \mathbf{f}'_{u1}, \quad \mathbf{h}'_n = \mathbf{N}'_{u1} + \mathbf{M}'_{u1} - 2\mathbf{g}'_u$$

$$\mathbf{m}'_u = \mathbf{N}'_{u1} + 2\mathbf{M}'_{u1} + \mathbf{M}'_{u2} - 3\mathbf{g}'_u, \quad \mathbf{g}'_{u1} = \mathbf{N}'_{u1} - \mathbf{f}'_{u1}, \quad \mathbf{f}'_{u2} = 2\mathbf{M}'_{u2}, \quad \mathbf{l}'_{u1} = \mathbf{g}'_{u1} - \mathbf{f}'_{u2}$$

$$\mathbf{f}'_t = \mathbf{M}'_{t0}, \quad \mathbf{f}'_{t1} = \mathbf{M}'_{t1}, \quad \mathbf{q}_u = \mathbf{N}_{u0} + \frac{\Upsilon^2 \mathbf{M}_{t0}}{1-\Upsilon} - \frac{\mathbf{M}_{u0}}{1-\Upsilon}, \quad \mathbf{q}'_u = \mathbf{N}'_{u0} + \frac{\Upsilon^2 \mathbf{M}'_{t0}}{1-\Upsilon} - \frac{\mathbf{M}'_{u0}}{1-\Upsilon}$$

$$\mathbf{q}_{u1} = \mathbf{N}_{u1} + \frac{\Upsilon^3 \mathbf{M}_{t1}}{1-\Upsilon} - \frac{\mathbf{M}_{u1}}{1-\Upsilon}, \quad \mathbf{q}'_{u1} = \mathbf{N}'_{u1} + \frac{\Upsilon^3 \mathbf{M}'_{t1}}{1-\Upsilon} - \frac{\mathbf{M}'_{u1}}{1-\Upsilon}$$

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{N}_{u1} - (2+\Upsilon)\mathbf{N}_{u0} + \frac{\Upsilon^4 \mathbf{M}_{t0}}{(1-\Upsilon)^2} + \frac{\mathbf{M}_{u1}}{1-\Upsilon} + \frac{(2-3\Upsilon)\mathbf{M}_{u0}}{(1-\Upsilon)^2} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{r}'_u = \mathbf{N}'_{u1} - (2 + \Upsilon)\mathbf{N}'_{u0} + \frac{\Upsilon^4 \mathbf{M}'_{t0}}{(1 - \Upsilon)^2} + \frac{\mathbf{M}'_{u1}}{1 - \Upsilon} + \frac{(2 - 3\Upsilon)\mathbf{M}'_{u0}}{(1 - \Upsilon)^2}$$

$$\mathbf{M}'_{un} = \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi'_{Lp}(\tau) \tau^n \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_p}\right) d\tau, \quad \mathbf{M}'_{tn} = \frac{1}{n! \tau_t^{n+1}} \int_0^\infty \Psi'_{Lp}(\tau) \tau^n \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_t}\right) d\tau$$

$$\mathbf{M}'_{tn} = \frac{1}{n! \tau_t^{n+1}} \int_0^\infty \Psi'_{Lp}(\tau) \tau^n \exp\left(-\frac{\mathbf{I}\tau}{\tau_t}\right) d\tau, \quad \mathbf{N}'_{un} = \frac{1}{n! \tau_p^{n+1}} \int_0^\infty \Psi'_{Lp}(\tau) \tau^n d\tau$$

Коэффициенты вовлечения, описывающие температурный отклик частиц, имеют вид

$$f_t = \frac{1}{\tau_t} \int_0^\infty \Psi_{Ltp}(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_t}\right) d\tau, \quad f_{t1} = \frac{1}{\tau_t} \int_0^\infty \Psi_{Ltp}(\tau) \tau \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_t}\right) d\tau \quad (1.11)$$

Для вычисления коэффициентов вовлечения необходимо задаться видом автокорреляционных функций. С этой целью можно использовать экспоненциальные аппроксимации

$$\Psi_{Lp}(\tau) = \exp(-\tau \mathbf{T}_{Lp}^{-1}), \quad \Psi'_{Lp}(\tau) = \exp(-\tau (\mathbf{T}'_{Lp})^{-1}), \quad \Psi_{Ltp}(\tau) = \exp(-\tau T_{Ltp}^{-1}) \quad (1.12)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получаем замкнутое кинетическое уравнение для одноточечной (одночастичной) ФПВ распределений скорости и температуры частицы в турбулентном потоке

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + v_k \frac{\partial P}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \left[ \left( \frac{U_k - v_k}{\tau_p} + F_k \right) P \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{T - \theta}{\tau_t} + Q \right) P \right] = \\ = \lambda_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_j} + \mu_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial v_i} + (\eta_i + \lambda_i) \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial \theta} + \mu_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial \theta} + \eta \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\eta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$ ,  $\eta$  определяются согласно (1.8). Члены в правой части (1.13) характеризуют диффузионный перенос в фазовом пространстве, обусловленный динамическим и тепловым взаимодействием частиц с турбулентными вихрями. Моделирование турбулентности при помощи гауссового процесса позволило выразить взаимодействие “частица–турбулентность” в виде дифференциального (диффузионного) оператора второго порядка. Этот диффузионный оператор учитывает анизотропию временных масштабов турбулентности через коэффициенты вовлечения. Если пренебречь анизотропией масштабов турбулентности и вкладом в (1.8) “транспортных членов”, содержащих производные  $D_p \langle u'_i u'_k \rangle / Dt$ ,  $D_p \langle u'_i \vartheta' \rangle / Dt$  и  $D_p \langle \vartheta'^2 \rangle / Dt$ , то (1.13) переходит в кинетическое уравнение для ФПВ распределения скорости и температуры частиц, полученное в [10]. Если пренебречь также вкладом членов с градиентами осредненных скоростей и температур, то получим кинетическое уравнение в однородном бессдвиговом турбулентном потоке [9]. В результате интегрирования по подпространству температур из (1.13) вытекает кинетическое уравнение для ФПВ распределения скорости частицы [12].

**2. Уравнения для моментов ФПВ.** Непосредственное решение кинетического уравнения представляет собой сложную задачу вследствие большой размерности фазового пространства. Более целесообразным с вычислительной точки зрения является решение уравнений для нескольких первых моментов кинетического уравнения, хотя при

этом, естественно, происходит некоторая потеря статистической информации о поведении частиц. Путем интегрирования (1.13) по подпространству скоростей и температур может быть получена система континуальных уравнений для осредненных одноточечных гидродинамических и тепловых характеристик дисперсной фазы.

Соответствующие (1.13) уравнения для концентрации  $\Phi$ , осредненной скорости  $V_i$  и осредненной температуры  $\Theta$  дисперсной фазы имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_k} + \frac{U_i - V_i}{\tau_p} + F_i - \frac{D_{pik} \partial \ln \Phi}{\tau_p \partial x_k} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = - \frac{\partial \langle v'_i \theta' \rangle}{\partial x_k} + \frac{T - \Theta}{\tau_t} + Q - \frac{D'_{pik} \partial \ln \Phi}{\tau_t \partial x_k} \quad (2.3)$$

$$\Phi = \int P d\nu d\theta, \quad V_i = \frac{1}{\Phi} \int v_i P d\nu d\theta, \quad \langle v'_i v'_j \rangle = \frac{1}{\Phi} \int (v_i - V_i)(v_j - V_j) P d\nu d\theta$$

$$\langle v'_i \theta' \rangle = \frac{1}{\Phi} \int (v_i - V_i)(\theta - \Theta) P d\nu d\theta$$

Здесь  $\langle v'_i v'_j \rangle$  и  $\langle v'_i \theta' \rangle$  – турбулентные напряжения и тепловой поток в дисперсной фазе, обусловленные вовлечением частиц в пульсационное движение сплошной среды. Последний член в (2.2) описывает турбулентную диффузию частиц, где тензор турбулентной диффузии частиц определяется выражением

$$D_{pij} = \tau_p (\langle v'_i v'_j \rangle + \mu_{ij}) \quad (2.4)$$

Последний член в (2.3) описывает турбулентный диффузионный перенос тепла, а вектор “тепловой диффузии” частиц определяется выражением

$$D'_{pi} = \tau_t (\langle v'_i \theta' \rangle + \mu_i) \quad (2.5)$$

Уравнения для вторых моментов пульсаций скорости (турбулентного напряжения), пульсаций скорости и температуры (турбулентного теплового потока) и интенсивности пульсаций температуры, следующие из (1.13), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_i v'_j v'_k \rangle}{\partial x_k} = - (\langle v'_i v'_k \rangle + \mu_{ik}) \frac{\partial V_j}{\partial x_k} - (\langle v'_j v'_k \rangle + \mu_{jk}) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ + \lambda_{ij} + \lambda_{ji} - \frac{2 \langle v'_i v'_j \rangle}{\tau_p} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle v'_i \theta' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v'_i \theta' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_i v'_k \theta' \rangle}{\partial x_k} = - (\langle v'_i v'_k \rangle + \mu_{ik}) \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} - (\langle v'_k \theta' \rangle + \mu_k) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \\ + \eta_i + \lambda_i - \left( \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_t} \right) \langle v'_i \theta' \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_k \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} = - 2 (\langle v'_k \theta' \rangle + \mu_k) \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} + 2\eta - \frac{2 \langle \theta'^2 \rangle}{\tau_t} \quad (2.8)$$

Уравнение для турбулентной энергии дисперсной фазы  $k_p \equiv \langle v'_k v'_k \rangle / 2$  согласно (2.6) представляется в виде

$$\frac{\partial k_p}{\partial t} + V_k \frac{\partial k_p}{\partial x_k} + \frac{1}{2\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v'_i v'_i v'_k \rangle}{\partial x_k} = -(\langle v'_i v'_i \rangle + \mu_{ik}) \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \lambda_{kk} - \frac{2k_p}{\tau_p} \quad (2.9)$$

Получаемая из (1.13) система уравнений для моментов, аналогично известной цепочке уравнений Фридмана–Келлера в теории однофазных турбулентных течений, является незамкнутой, так как уравнение для  $n$ -го момента содержит  $(n+1)$ -момент. Для получения замкнутой системы уравнений для моментов эту цепочку необходимо оборвать, вводя определенные замыкающие соотношения. Так, уравнения для третьих моментов пульсаций скорости могут быть замкнуты при помощи квазинормальной гипотезы, предполагающей равенство нулю кумулянтов четвертого порядка и представляющей четвертые моменты в виде суммы произведений вторых моментов. Если в этих уравнениях пренебречь членами, описывающими эволюцию во времени, конвекцию и порождение третьих моментов за счет градиентов осредненных скорости и температуры, то моменты третьего порядка будут определяться следующими алгебраическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \langle v'_i v'_j v'_k \rangle &= -\frac{1}{3} \left( D_{pin} \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_n} + D_{pjn} \frac{\partial \langle v'_i v'_k \rangle}{\partial x_n} + D_{pkn} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_n} \right) \\ \langle v'_i v'_j \theta' \rangle &= -\frac{1}{2\Upsilon + 1} \left( \Upsilon D_{pik} \frac{\partial \langle v'_j \theta' \rangle}{\partial x_k} + \Upsilon D_{pjk} \frac{\partial \langle v'_i \theta' \rangle}{\partial x_k} + D'_{pk} \frac{\partial \langle v'_i v'_j \rangle}{\partial x_k} \right) \\ \langle v'_i \theta'^2 \rangle &= -\frac{1}{\Upsilon + 2} \left( \Upsilon D_{pik} \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} + 2D'_{pk} \frac{\partial \langle v'_i \theta' \rangle}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Выражения (2.10) по виду аналогичны соотношениям для третьих моментов, полученным в [10] в предположении об изотропии масштабов турбулентности; влияние анизотропии масштабов проявляется через тензор турбулентной диффузии (2.4) и вектор “тепловой диффузии” (2.5). Система уравнений (2.1)–(2.3), (2.6)–(2.8) с учетом соотношений (2.4), (2.5) и (2.10) позволяет моделировать гидродинамику и теплоперенос в дисперсной фазе на уровне уравнений для вторых моментов.

Смешанные вторые корреляционные моменты пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз могут быть определены непосредственно из (1.4) с учетом (1.8) при помощи следующих алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} \langle u'_i v'_j \rangle &= \frac{1}{\Phi} \left( \int \langle v'_i p \rangle v_j dv d\theta - V_j \int \langle u'_i p \rangle dv d\theta \right) = \tau_p \left( \lambda_{ij} - \mu_{ik} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \right) \\ \langle u'_i \theta' \rangle &= \frac{1}{\Phi} \left( \int \langle u'_i p \rangle \theta dv d\theta - \Theta \int \int \langle u'_i p \rangle dv d\theta \right) = \tau_p \left( \eta_i - \mu_{ik} \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \right) \\ \langle v'_i \theta' \rangle &= \frac{1}{\Phi} \left( \int \int \langle \theta' p \rangle v'_i dv d\theta - V_i \int \int \langle \theta' p \rangle dv d\theta \right) = \tau_i \left( \lambda_i - \mu_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) \\ \langle \theta' \theta' \rangle &= \frac{1}{\Phi} \left( \int \int \langle \theta' p \rangle \theta dv d\theta - \Theta \int \int \langle \theta' p \rangle dv d\theta \right) = \tau_i \left( \eta - \mu_k \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эти корреляционные моменты необходимы, в первую очередь, для учета обратного влияния частиц на турбулентность. Как видно из первого соотношения (2.11), тензор

смешанных моментов, в отличие от турбулентных напряжений в сплошной и дисперсной фазах  $\langle u'_i u'_j \rangle$  и  $\langle v'_i v'_j \rangle$ , является несимметричным. В [17] для моделирования смешанных корреляционных моментов  $\langle u'_i v'_j \rangle$  были предложены дифференциальные уравнения, основанные на ланжевенновских уравнениях движения жидких и инерционных частиц.

Моделирование сложных трехмерных однофазных течений на основе системы дифференциальных уравнений для всех компонент турбулентных напряжений и тепловых потоков приводит к большим затратам времени даже при использовании самых быстродействующих компьютеров. Поэтому для расчета однофазных течений широкое распространение получили так называемые алгебраические модели рейнольдсовых напряжений и тепловых потоков, использующие дифференциальные уравнения только для турбулентной энергии и интенсивности пульсаций температуры. Нелинейные явные алгебраические модели, обладающие практически такой же точностью, как и дифференциальные модели для вторых и третьих моментов пульсаций скорости и температуры, позволяют кардинально уменьшить время вычислений, одновременно повышая устойчивость численных схем. Применение алгебраических моделей для расчета реальных двухфазных (или многофазных) турбулентных потоков имеет еще большую актуальность, чем однофазных течений. Двухфазная среда, как правило, представляет собой полидисперсную систему, состоящую из частиц различных размеров. Наиболее общим методом расчета такой полидисперсной среды является метод фракций, заключающийся в разбиении всей системы частиц на отдельные "моnofракции" с последующим моделированием переноса массы, импульса и тепла в каждой из фракций. Очевидно, что использование дифференциальной модели турбулентности второго порядка для частиц при большом числе фракций приведет к резкому росту времени расчетов по сравнению с однофазным потоком. Далее будут представлены два подхода для построения алгебраических моделей турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе. Эти подходы основаны на решении кинетического уравнения для ФПВ методом возмущений Чепмена–Энскога и решении уравнения для турбулентных напряжений и тепловых потоков методом итераций.

**3. Решение кинетического уравнения методом Чепмена–Энскога.** Применим метод возмущений Чепмена–Энскога [18] для решения кинетического уравнения (1.13), представленного в операторном виде

$$R[P] = N[P]$$

$$R[P] = \frac{1}{\tau_p} \left[ \frac{2k_p}{3} \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_i} + \frac{\partial(v_i - V_i)P}{\partial v_i} \right] + \frac{1}{\tau_i} \left[ \langle \theta'^2 \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} + \frac{\partial(\theta - \Theta)P}{\partial \theta} \right] \quad (3.1)$$

$$N[P] = \frac{\partial P}{\partial t} + v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + \left( \frac{U_i - V_i}{\tau_p} + F_i \right) \frac{\partial P}{\partial v_i} + \left( \frac{T - \Theta}{\tau_i} + Q \right) \frac{\partial P}{\partial \theta} + \left( \frac{2k_p}{3\tau_p} \delta_{ij} - \lambda_{ij} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial v_j} - \mu_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial v_i} - (\eta_i + \lambda_i) \frac{\partial^2 P}{\partial v_i \partial \theta} + \left( \frac{\langle \theta'^2 \rangle}{\tau_i} - \eta \right) \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} - \mu_i \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial \theta}$$

Здесь  $R[P]$  – основной оператор, реализующий максвелловское распределение по скорости и нормальное распределение по температуре;  $N[P]$  – возмущающий оператор, определяющий отклонение ФПВ скорости и температуры частиц от равновесных распределений. Решение уравнения (3.1) ищется в виде ряда

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + \dots \quad (3.2)$$

$$R[P^{(0)}] = 0, \quad R[P^{(1)}] = N[P^{(0)}] \quad (3.3)$$



Представление решения уравнения (3.1) в виде (3.2) справедливо, если величины  $\tau_p/T_u$  и  $\tau_p/T_r$ , где  $T_u$  и  $T_r$  – характерные времена изменения средних гидродинамических и тепловых параметров потока, являются малыми параметрами. Эти параметры являются аналогом числа Кнудсена в кинетической теории газов. Решение первого уравнения в (3.3) имеет вид

$$P^{(0)} = \Phi \left( \frac{27}{128\pi^4 k_p^3 \langle \theta^2 \rangle} \right)^{1/2} \exp \left( - \frac{3v'_k v'_k}{4k_p} - \frac{\theta^2}{2\langle \theta^2 \rangle} \right) \quad (3.4)$$

Согласно (3.4)

$$\langle v'_i v'_j \rangle_0 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j P^{(0)} d\mathbf{v} d\theta = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} \quad (3.5)$$

$$\langle v'_i \theta \rangle_0 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i \theta P^{(0)} d\mathbf{v} d\theta = 0 \quad (3.6)$$

$$\langle v'_i v'_j v'_k \rangle_0 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j v'_k P^{(0)} d\mathbf{v} d\theta = 0, \quad \langle v'_i v'_j \theta \rangle_0 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j \theta P^{(0)} d\mathbf{v} d\theta = 0 \quad (3.7)$$

$$\langle v'_i \theta^2 \rangle_0 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i \theta^2 P^{(0)} (d\mathbf{v}) d\theta = 0$$

Таким образом, равновесная ФПВ (3.4) приводит к изотропным напряжениям (3.5), нулевым тепловым потокам (3.6), а также нулевым третьим моментам пульсаций скорости и температуры (3.7). Вычислим правую часть второго уравнения в (3.3), используя (3.4). Производные во времени  $\partial\Phi/\partial t$ ,  $\partial V_i/\partial t$ ,  $\partial\Theta/\partial t$ ,  $\partial\langle\theta^2\rangle/\partial t$ ,  $\partial k_p/\partial t$  определяются соответственно из уравнений (2.1)–(2.3), (2.8), (2.9) с учетом (3.5)–(3.7). В результате получим

$$\begin{aligned} N[P^{(0)}] = & \left\{ \frac{3}{2k_p} \left( v'_i v'_j - \frac{v'_k v'_k}{3} \delta_{ij} \right) \left( V_{i,j} + \frac{3\mu_{ik} V_{j,k}}{2k_p} - \frac{3\lambda_{ij}}{2k_p} \right) + \frac{v'_i}{2k_p} \left( \frac{3v'_k v'_k}{2k_p} - 5 \right) \times \right. \\ & \times \left( \delta_{ij} + \frac{3\mu_{ij}}{2k_p} \right) k_{p,j} + \frac{3v'_i \theta'}{2k_p \langle \theta^2 \rangle} \left[ \left( \frac{2k_p \delta_{ij}}{3} + \mu_{ij} \right) \Theta_{,j} + \mu_j V_{i,j} - (\eta_i + \lambda_i) \right] + \\ & \left. + \frac{3\mu_i \theta'}{2k_p \langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{v'_k v'_k}{2k_p} - 1 \right) k_{p,i} + \frac{v'_i}{2\langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle} - 1 \right) \left( \delta_{ij} + \frac{3\mu_{ij}}{2k_p} \right) \langle \theta^2 \rangle_{,j} + \frac{\mu_i \theta'}{2\langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle} - 3 \right) \langle \theta^2 \rangle_{,i} \right\} P^{(0)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где нижний символ,  $i$  обозначает пространственную производную по координате  $x_i$ .

Решением второго уравнения в (3.3) с учетом (3.8) будет

$$\begin{aligned} P^{(1)} = & - \left\{ \frac{3\tau_p}{4k_p} \left( v'_i v'_j - \frac{v'_k v'_k}{3} \delta_{ij} \right) \left( V_{i,j} + \frac{3\mu_{ik} V_{j,k}}{2k_p} - \frac{3\lambda_{ij}}{2k_p} \right) + \frac{\tau_p v'_i}{6k_p} \left( \frac{3v'_k v'_k}{2k_p} - 5 \right) \times \right. \\ & \times \left( \delta_{ij} + \frac{3\mu_{ij}}{2k_p} \right) k_{p,j} + \frac{3\tau_p \tau_i v'_i \theta'}{2(\tau_p + \tau_i) k_p \langle \theta^2 \rangle} \left[ \left( \frac{2k_p \delta_{ij}}{3} + \mu_{ij} \right) \Theta_{,j} + \mu_j V_{i,j} - (\eta_i + \lambda_i) \right] + \\ & \left. + \frac{3\tau_p \tau_i \mu_i \theta'}{2(\tau_p + 2\tau_i) k_p \langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{v'_k v'_k}{2k_p} - 1 \right) k_{p,i} + \frac{\tau_p \tau_i v'_i}{2(2\tau_p + \tau_i) \langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle} - 1 \right) \times \right. \\ & \left. \times \left( \delta_{ij} + \frac{3\mu_{ij}}{2k_p} \right) \langle \theta^2 \rangle_{,j} + \frac{\tau_i \mu_i \theta'}{6\langle \theta^2 \rangle} \left( \frac{\theta^2}{\langle \theta^2 \rangle} - 3 \right) \langle \theta^2 \rangle_{,i} \right\} P^{(0)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

В соответствии с (3.4) и (3.9) получаем следующие соотношения для турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе:

$$\langle v'_i v'_j \rangle_1 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j (P^{(0)} + P^{(1)}) d\mathbf{v} d\theta = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} - \frac{\tau_p k_p}{3} \left( V_{i,j} + V_{j,i} - \frac{2}{3} V_{k,k} \delta_{ij} \right) - \frac{\tau_p}{2} \left( \mu_{ik} V_{j,k} + \mu_{jk} V_{i,k} - \frac{2}{3} \mu_{kl} V_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{\tau_p}{2} \left( \lambda_{ij} + \lambda_{ji} - \frac{2}{3} \lambda_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.10)$$

$$\langle v'_i \theta' \rangle_1 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i \theta' P^{(1)} d\mathbf{v} d\theta = -\frac{\tau_p \tau_t}{\tau_p + \tau_t} \left[ \left( \frac{2k_p \delta_{ij}}{3} + \mu_{ij} \right) \Theta_{,j} + \mu_j V_{i,j} - (\eta_i + \lambda_i) \right] \quad (3.11)$$

Выражение (3.11) дает линейную зависимость турбулентного напряжения  $\langle v'_i v'_j \rangle$  от градиента скорости  $V_{i,j}$ . Наряду с традиционными для моделей турбулентной вязкости членами с градиентами осредненной скорости дисперсной фазы  $V_{i,j}$  в представлении  $\langle v'_i v'_j \rangle$  присутствуют также члены  $\lambda_{ij}$ , непосредственно описывающие взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущей сплошной среды. Эти члены играют особенно существенную роль для малоинерционных частиц, обеспечивая переход к пределу безынерционных частиц. Уравнение (2.2), замкнутое при помощи (3.10), может рассматриваться как аналог уравнения Навье–Стокса для сплошной среды. Соотношение (3.11) предполагает линейную зависимость турбулентного теплового потока  $\langle v'_i \theta' \rangle$  от градиентов осредненных скорости  $V_{i,j}$  и температуры  $\Theta_{,j}$  дисперсной фазы. Аналогично (3.10) наряду с градиентными членами присутствуют также члены  $\eta_i$  и  $\lambda_i$ , непосредственно описывающие взаимодействие частиц с турбулентными вихрями несущей жидкости и играющие особенно существенную роль для малоинерционных частиц.

Третьи моменты пульсаций скорости и температуры согласно решению (3.9) имеют вид

$$\langle v'_i v'_j v'_k \rangle_1 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j v'_k P^{(1)} d\mathbf{v} d\theta = -\frac{2}{9} (\delta_{ij} D_{pkn} + \delta_{ik} D_{pjn} + \delta_{jk} D_{pin}) k_{p,n}$$

$$\langle v'_i v'_j \theta' \rangle_1 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i v'_j \theta' P^{(1)} d\mathbf{v} d\theta = -\frac{2\tau_p \tau_t}{3(\tau_p + 2\tau_t)} \delta_{ij} \mu_{kk} k_{p,k} \quad (3.12)$$

$$\langle v'_i \theta'^2 \rangle_1 = \frac{1}{\Phi} \int v'_i \theta'^2 P^{(1)} d\mathbf{v} d\theta = -\frac{\tau_t D_{pik} \langle \theta'^2 \rangle_{,k}}{(2\tau_p + \tau_t)}, \quad D_{pin} = \tau_p \left( \frac{2k_p}{3} \delta_{ij} + \mu_{ij} \right)$$

Формулы (3.12) совпадают с (2.10), если в последних принять изотропные представления для турбулентных напряжений и тепловых потоков (3.5) и (3.6).

Соотношения (3.10) и (3.11) совместно с уравнением для турбулентной энергии частиц (2.9) описывают турбулентные напряжения и тепловые потоки в рамках линейных алгебраических моделей. Метод возмущений Чепмена–Энскога может быть применен для нахождения второго приближения в разложении (3.2) и построения на его основе нелинейных алгебраических моделей, как это сделано в работе [19] для получения квадратичной модели для рейнольдсовых напряжений в однофазной турбулентности путем решения простейшего кинетического уравнения с релаксационным “столкновительным членом”. Однако такой подход применительно к кинетическому уравнению (1.13) является слишком громоздким. Поэтому применим для построения нелинейных алгебраических моделей метод итераций.

**4. Решение уравнений для турбулентных напряжений и тепловых потоков методом итераций.** Вначале определим турбулентные напряжения дисперсной фазы. С этой целью по аналогии с известной аппроксимацией для однофазных турбулентных течений [20], примем, что транспортные члены в уравнении для вторых моментов (2.6) могут быть выражены через транспортные члены в уравнении для кинетической энергии турбулентности частиц (2.9) как

$$\begin{aligned} & \frac{D_p \langle v_i' v_j' \rangle}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} [f_{u1kj} + \tau_p (l_{u1kn} U_{j,n} - g_{u1kn} V_{j,n})] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_j' u_k' \rangle}{Dt} [f_{u1ki} + \tau_p (l_{u1kn} U_{i,n} - g_{u1kn} V_{i,n})] = \\ & = \frac{\langle v_i' v_j' \rangle}{k_p} \left\{ \frac{D_p k_p}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} [f_{u1ki} + \tau_p (l_{u1kn} U_{i,n} - g_{u1kn} V_{i,n})] \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{D_p \langle v_i' v_j' \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i' v_j' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k}$$

$$\frac{D_p k_p}{Dt} = \frac{\partial k_p}{\partial t} + V_k \frac{\partial k_p}{\partial x_k} + \frac{1}{2\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_j' v_k' \rangle}{\partial x_k}$$

Из (2.6) с учетом (2.9) и (4.1) можно получить

$$\begin{aligned} \langle v_i' v_j' \rangle &= \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} - \frac{1}{2E} \left[ \tau_p \left( \langle v_i' v_k' \rangle V_{j,k} + \langle v_j' v_k' \rangle V_{i,k} - \frac{2}{3} \langle v_k' v_l' \rangle V_{k,l} \delta_{ij} \right) - \right. \\ & \left. - \left( X_{ij} + X_{ji} - \frac{2}{3} X_{kk} \delta_{ij} \right) \right], \quad E = \frac{X_{kk} - \tau_p \langle v_i' v_k' \rangle V_{i,k}}{2k_p} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$X_{ij} = \langle u_i' u_k' \rangle [f_{ukj} + \tau_p (l_{ukn} + \tau_p m_{ukl} U_{n,l}) U_{j,n} - \tau_p (g_{ukn} + \tau_p h_{ukl} U_{n,l}) V_{j,n}]$$

Выражение (4.2) представляет собой неявную алгебраическую модель для определения турбулентных напряжений дисперсной фазы. Уравнение (4.2) аналогично по смыслу неявной алгебраической модели [20] для турбулентных напряжений в сплошной однофазной среде. Алгебраические модели в однофазной среде, строго говоря, справедливы только в так называемом равновесном состоянии [21], когда все транспортные члены не играют существенной роли. Равновесное состояние реализуется в однородной турбулентности или в неоднородной турбулентности при равенстве порождения и диссипации турбулентной энергии. Однако по аналогии с однофазной турбулентностью алгебраические модели могут оказаться полезными и для неравновесных турбулентных двухфазных потоков. Недостатком неявных алгебраических моделей является необходимость операции обращения матрицы для получения зависимости турбулентных напряжений от градиентов осредненной скорости. Поэтому выигрыш от использования неявных алгебраических моделей вместо полных дифференциальных моделей для турбулентных напряжений может быть потерян. С вычислительной точки зрения существенным преимуществом по отношению к неявным обладают явные алгебраические модели, непосредственно связывающие турбулентные напряжения с градиентами осредненной скорости.

Для решения неявных алгебраических уравнений и построения явных алгебраических моделей для однофазных течений привлекается теория инвариантов, позволяющая представить турбулентные напряжения в виде разложения на ортогональном тензорном базисе [21–24]. Однако представление на полном тензорном базисе приводит к слишком громоздким выражениям для турбулентных напряжений. Поэтому при построении удобных для практического использования явных алгебраических моделей турбулентных напряжений в большинстве случаев ограничиваются разложением не на полном, а на усеченном базисе, как правило, на трехчленном, что строго справедливо только в двумерном случае. Переход к двухфазным течениям вызывает существенное усложнение теории построения явных алгебраических моделей вследствие значительного расширения тензорного базиса. Так, число базисных функций для представления турбулентных напряжений дисперсной фазы в двумерном осредненном потоке с трехмерной турбулентностью уже равно пяти [25]. Модели турбулентных напряжений дисперсной фазы, построенные путем разложения (проецирования) при малом числе базисных функций, в частности, на трехчленном базисе, являются слишком грубыми и приводят к большим ошибкам. Поэтому для решения уравнения (4.2) и построения явных алгебраических моделей для турбулентных напряжений дисперсной фазы вместо метода разложения на тензорном базисе применим итерационную процедуру.

Решение уравнения (4.2) представим в виде

$$\langle v'_i v'_j \rangle_{n+1} = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} - \frac{1}{2 E_n} \left[ \tau_p \left( \langle v'_i v'_k \rangle_n V_{j,k} + \langle v'_j v'_k \rangle_n V_{i,k} - \frac{2}{3} \langle v'_k v'_l \rangle_n V_{k,l} \delta_{ij} \right) - \left( X_{ij} + X_{ji} - \frac{2}{3} X_{kk} \delta_{ij} \right) \right], \quad E_n = \frac{X_{kk} - \tau_p \langle v'_i v'_k \rangle_n V_{i,k}}{2 k_p} \quad (4.3)$$

где  $n$  – номер приближения. Условием применимости итерационной процедуры является требование, чтобы величина  $\tau_p (V_{i,k} V_{i,k})^{1/2}$  являлась малым параметром.

В качестве нулевого используется изотропное приближение (3.5). Подстановка (3.5) в правую часть (4.3) дает

$$\langle v'_i v'_j \rangle_1 = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} + \frac{\langle v'_i v'_j \rangle^{(1)}}{E_0}, \quad \langle v'_i v'_j \rangle^{(1)} = -\frac{\tau_p k_p}{3} \left( V_{i,j} + V_{j,i} - \frac{2}{3} V_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2} \left( X_{ij} + X_{ji} - \frac{2}{3} X_{kk} \delta_{ij} \right), \quad E_0 = \frac{X_{kk} - \tau_p V_{k,k}}{2 k_p} \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) аналогично (3.10) предсказывает линейную зависимость турбулентных напряжений  $\langle v'_i v'_j \rangle$  от градиента скорости  $V_{i,j}$ . Подстановка (4.4) в правую часть (4.2) приводит к квадратичной зависимости турбулентных напряжений частиц от градиента осредненной скорости

$$\langle v'_i v'_j \rangle_2 = \frac{2}{3} k_p \delta_{ij} + \frac{\langle v'_i v'_j \rangle^{(1)}}{E_1} + \frac{\langle v'_i v'_j \rangle^{(2)}}{E_0 E_1},$$

$$\langle v'_i v'_j \rangle^{(2)} = -\frac{\tau_p}{2} \left( \langle v'_i v'_k \rangle^{(1)} V_{j,k} + \langle v'_j v'_k \rangle^{(1)} V_{i,k} - \frac{2}{3} \langle v'_k v'_l \rangle^{(1)} V_{k,l} \delta_{ij} \right), \quad (4.5)$$

$$E_1 = E_0 - \frac{\tau_p \langle v'_i v'_k \rangle^{(1)} V_{i,k}}{2 k_p E_0}$$

Соотношения (4.5) вместе с уравнением для турбулентной энергии (2.9) представляют собой нелинейную явную алгебраическую модель турбулентных напряжений диспер-

ной фазы. Это соотношение так же, как и (3.10) и (4.4), содержит дополнительные члены, непосредственно характеризующие взаимодействие частиц с турбулентной жидкостью. Очевидно, что точность нелинейной модели, хотя и будет большей по сравнению с линейной моделью, уменьшается с ростом инерционности частиц, поскольку возрастает вклад транспортных эффектов. В качестве критерия применимости алгебраических моделей может служить малость параметра  $\tau_p/T_u$ .

Аналогично (4.1) выразим транспортные члены в уравнении для турбулентных тепловых потоков (2.7) через транспортные члены в уравнениях для кинетической энергии турбулентности (2.9) и интенсивности пульсаций температуры частиц (2.8)

$$\begin{aligned}
 & \frac{D_p \langle v_i' \theta' \rangle}{Dt} + \frac{\tau_p D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{2 Dt} (q_{u1kn} T_{,n} - g_{u1kn} \Theta_{,n}) + \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_k' \vartheta' \rangle}{Dt} \left[ \Upsilon f_{t1ki}' + \frac{f_{u1ki}'}{\Upsilon} + \right. \\
 & \left. + \frac{\tau_p}{\Upsilon} (l_{u1kn}' U_{i,n} - g_{u1kn}' V_{i,n}) \right] = \\
 & = \frac{\langle v_i' \theta' \rangle}{2k_p} \left\{ \frac{D_p k_p}{Dt} + \frac{1}{2} \frac{D_p \langle u_i' u_k' \rangle}{Dt} [f_{u1ki} + \tau_p (l_{u1kn} U_{i,n} - g_{u1kn} V_{i,n})] \right\} + \\
 & + \frac{\langle v_i' \theta' \rangle}{2 \langle \theta'^2 \rangle} \left[ \frac{D_p \langle \theta'^2 \rangle}{Dt} + \frac{D_p \langle \vartheta'^2 \rangle}{Dt} f_{t1} + \frac{\tau_p D_p \langle v_k' \vartheta' \rangle}{\Upsilon Dt} (q_{u1kn}' T_{,n} - g_{u1kn}' \Theta_{,n}) \right] \\
 & \frac{D_p \langle v_i' \theta' \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle v_i' \theta' \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle v_i' \theta' \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_i' v_k' \theta' \rangle}{\partial x_k} \\
 & \frac{D_p \langle \theta'^2 \rangle}{Dt} = \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial t} + V_k \frac{\partial \langle \theta'^2 \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi \langle v_k' \theta'^2 \rangle}{\partial x_k}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Подстановка (4.6) с учетом (2.8) и (2.9) в (2.7) дает

$$\begin{aligned}
 \langle v_i' \theta' \rangle &= -\frac{\tau_p \tau_t}{\Pi(\tau_p + \tau_t)} (\langle v_i' v_k' \rangle \Theta_{,k} + \langle v_k' \theta' \rangle V_{i,k} + X_i) \\
 \Pi &= \frac{\tau_t E + \tau_p E'}{\tau_p + \tau_t}, \quad E' = \frac{\wp - \tau_t \langle v_k' \theta' \rangle \Theta_{,k}}{\langle \theta'^2 \rangle} \\
 X_i &= \langle u_i' u_j' \rangle [(g_{ujk} + \tau_p h_{ujn} U_{k,n}) \Theta_{,k} - (q_{ujk} + \tau_p r_{ujn} U_{k,n}) T_{,k}] + \\
 & + \frac{\langle u_j' \vartheta' \rangle}{\Upsilon} [(g'_{ujk} + \tau_p h'_{ujn} U_{k,n}) V_{i,k} - (l'_{ujk} + \tau_p m'_{ujn} U_{k,n}) U_{i,k} - f'_{uji} - \Upsilon f'_{tji}] \\
 \wp &= \langle \vartheta'^2 \rangle f_t + \tau_p \langle u_i' \vartheta' \rangle [(q'_{uik} + \tau_p r'_{uin} U_{k,n}) T_{,k} - (g'_{uik} + \tau_p h'_{uin} U_{k,n}) \Theta_{,k}]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Выражение (4.7) представляет собой неявную алгебраическую модель для определения турбулентных тепловых потоков. Для решения уравнения (4.7) применим метод итераций

$$\begin{aligned}
 \langle v_i' \theta' \rangle_{n+1} &= -\frac{\tau_p \tau_t}{\Pi(\tau_p + \tau_t)} (\langle v_i' v_k' \rangle_n \Theta_{,k} + \langle v_k' \theta' \rangle_n V_{i,k} + X_i) \\
 \Pi_n &= \frac{\tau_t E_n + \tau_p E'_n}{\tau_p + \tau_t}, \quad E'_n = \frac{\wp - \tau_t \langle v_k' \theta' \rangle_n \Theta_{,k}}{\langle \theta'^2 \rangle}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

В качестве нулевого используется изотропное приближение (3.5) и (3.6). В результате получим первое приближение (линейную модель) для турбулентных тепловых потоков

$$\langle v_i' \theta' \rangle_1 = \frac{\langle v_i' \theta' \rangle^{(1)}}{\Pi_0}, \quad \langle v_i' \theta' \rangle^{(1)} = -\frac{\tau_p \tau_t}{\tau_p + \tau_t} \left( \frac{2k_p}{3} \Theta_{,i} + X_i \right) \quad (4.9)$$

$$\Pi_0 = \frac{\tau_t E_0 + \tau_p E_0'}{\tau_p + \tau_t}, \quad E_0' = \frac{\wp}{\langle \theta'^2 \rangle}$$

Область применимости линейной модели (4.9) ограничена малыми значениями параметров  $\tau_p/T_u$  и  $\tau_t/T_r$ . Подстановка (4.4) и (4.9) в правую часть (4.8) дает второе приближение (нелинейную модель)

$$\langle v_i' \theta' \rangle_2 = \frac{\langle v_i' \theta' \rangle^{(1)}}{\Pi_1} + \frac{\langle v_i' \theta' \rangle^{(2)}}{\Pi_0 \Pi_1}, \quad \langle v_i' \theta' \rangle^{(2)} = -\frac{\tau_p \tau_t}{\tau_p + \tau_t} \left( \frac{\Pi_0}{E_0} \langle v_i' v_k' \rangle^{(1)} \Theta_{,k} + \langle v_k' \theta' \rangle^{(1)} V_{i,k} \right) \quad (4.10)$$

$$\Pi_1 = \Pi_0 - \frac{\tau_p \tau_t}{\tau_p + \tau_t} \left( \frac{\langle v_i' v_k' \rangle^{(1)} V_{i,k}}{2E_0 k_p} + \frac{\langle v_k' \theta' \rangle^{(1)} \Theta_{,k}}{\Pi_0 \langle \theta'^2 \rangle} \right)$$

Точность нелинейной модели (4.10) также будет снижаться с ростом параметров  $\tau_p/T_u$  и  $\tau_t/T_r$ .

Представленные линейные и нелинейные модели кроме алгебраических соотношений для  $\langle v_i' v_j' \rangle$  и  $\langle v_i' \theta' \rangle$  включают также дифференциальные уравнения для турбулентных характеристик дисперсной фазы. Так, модели (3.10), (3.11), (4.4) и (4.5) включают уравнение для  $k_p$ , а модели (4.9) и (4.10) – уравнения для  $k_p$  и  $\langle \theta'^2 \rangle$ .

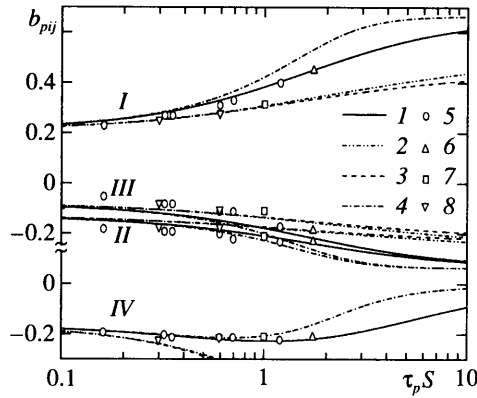
**5. Однородный сдвиговой поток.** Рассмотрим поведение турбулентных напряжений, тепловых потоков и интенсивности пульсаций температуры частиц в однородном турбулентном потоке с постоянными градиентами осредненных скоростей и температур при отсутствии внешних сил и внутренних источников тепла. Вследствие однородности течения все тройные одноточечные корреляции пульсаций скоростей и температур обращаются в нуль и, следовательно, могут быть получены точные решения уравнений для вторых моментов. Поэтому однородные течения имеют фундаментальное значение для верификации турбулентных моделей переноса импульса и тепла. Кроме того, дополнительной мотивацией для тестирования моделей в однородном сдвиговом потоке является наличие результатов детальных численных экспериментов, посвященных исследованию как лагранжевых характеристик турбулентности сплошной среды [13], так и турбулентных характеристик дисперсной фазы [11, 26–28].

Вследствие однородности потока из (2.1) и (2.2) следует, что концентрация частиц в пространстве не изменяется, а градиенты сплошной и дисперсной фаз равны:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = S \delta_{i1} \delta_{j2} \quad (5.1)$$

где  $S$  – скорость сдвига.

В рассматриваемом однородном турбулентном течении с постоянной скоростью сдвига при отсутствии действия массовых сил осредненные скорости обеих фаз совпадают. Поэтому “эффект пересечения траекторий” отсутствует, и единственной причиной различия между корреляциями пульсаций скорости сплошной среды, вычисленными вдоль траекторий инерционных и безынерционных частиц, является разница между масштабами турбулентности Лагранжа и Эйлера. Примем, что при отсутствии эффекта



Фиг. 1. Ненулевые компоненты тензора анизотропии пульсаций скорости частиц:  $b_{p11} - I$ ,  $b_{p22} - II$ ,  $b_{p33} - III$ ,  $b_{p12} - IV$ ; 1–4 – модели (2.6), (3.10), (4.4), (4.5); 5 – [26]; 6 – [27]; 7 – [28]; 8 – [11]

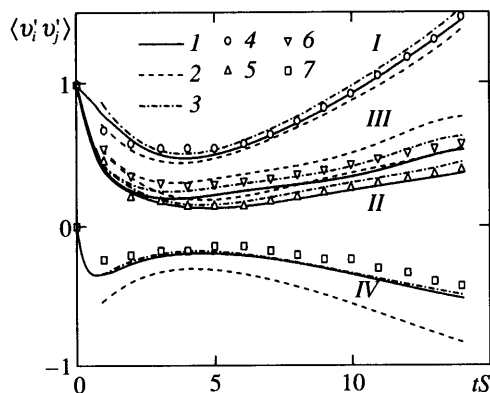
пересечения траекторий влияние инерционности частиц на времена их взаимодействия с турбулентными вихрями такое же, как и в изотропной турбулентности. Тогда связь между тензорами времен взаимодействия “частица–турбулентность”  $T_{Lp}$  и лагранжевыми макромасштабами турбулентности сплошной среды  $T_L$  может быть определена согласно [16]. Тензор лагранжевых временных масштабов турбулентности  $T_L$  задается в соответствии с результатами прямого численного моделирования, приведенных в [13]. Коэффициенты вовлечения определяются на основе соотношений (1.9)–(1.11) с учетом (1.12).

В целом ряде физических и численных экспериментов было установлено, что в потоке с постоянной скоростью сдвига так же, как и в других однородных однофазных турбулентных течениях, когда можно пренебречь процессами конвективного и диффузионного переноса пульсаций скорости, при больших временах достигается равновесное состояние. Это равновесное состояние интерпретируется как асимптотическое решение при больших временах, когда течение становится автомодельным и не зависит от начальных условий, и характеризуется постоянными значениями всех компонент тензора анизотропии  $b_{ij}$  и других безразмерных корреляционных моментов более высокого порядка. Аналогично двухфазное течение считается равновесным, когда конвекция и диффузия не играют роли, а тензоры анизотропии пульсаций скорости частиц  $b_{p_{ij}}$  не изменяются во времени. Тензоры анизотропии определяются как

$$b_{ij} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle u'_k u'_k \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad b_{p_{ij}} = \frac{\langle v'_i v'_j \rangle}{\langle v'_k v'_k \rangle} - \frac{\delta_{ij}}{3}$$

Параметр  $\tau_p S$  на фиг. 1 характеризует влияние инерционности частиц на  $b_{p_{ij}}$ , значения  $b_{p_{ij}}$  при  $\tau_p S = 0$  соответствуют значениям компонент тензора анизотропии пульсаций скорости жидкости  $b_{ij}$ . Представленные на фиг. 1 результаты получены на основе дифференциальной (2.6) и алгебраических (3.10), (4.4), (4.5) моделей с учетом соотношений (5.1) при больших временах. Также показаны результаты численных расчетов, полученные на основе метода крупных вихрей (LES) [26, 27] и прямого численного моделирования (DNS) [11, 28], для максимальных значений времени в этих работах, когда течение можно считать близким к равновесному.

Из фиг. 1 видно, что анизотропия пульсаций скорости частиц возрастает с увеличением их инерционности и значения продольной компоненты пульсаций скорости  $\langle v_1'^2 \rangle$  вы-



Фиг. 2. Турбулентные напряжения в дисперсной фазе:  $\langle v_1^2 \rangle$  – I,  $\langle v_2^2 \rangle$  – II,  $\langle v_3^2 \rangle$  – III,  $\langle v_1 v_2 \rangle$  – IV; 1, 2, 3 модели (2.6), (4.4), (4.5); 4–7 – [11]

сокоинерционных частиц значительно превышают соответствующие значения в поперечном и трансверсальном направлениях  $\langle v_2^2 \rangle$  и  $\langle v_3^2 \rangle$ . Этот рост анизотропии обусловлен вкладом сдвига скорости в генерацию продольных пульсаций скорости дисперсной фазы и отсутствием механизма перераспределения между различными компонентами пульсаций скорости, как это имеет место в турбулентной жидкости за счет пульсаций давления. Видно немонокотное изменение касательной компоненты тензора анизотропии в зависимости от инерционности частиц: вначале  $b_{p12}$  уменьшается с ростом величины  $\tau_p S$ , достигая минимума при  $\tau_p S \approx 1$ , а далее увеличивается, стремясь к предельному значению при  $\tau_p S \rightarrow \infty$ . Дифференциальная модель (2.6) хорошо описывает результаты численных расчетов. Значения  $b_{rij}$ , предсказываемые линейными моделями (3.10) и (4.4), оказываются очень близкими. Однако линейные модели существенно занижают анизотропию нормальных компонент турбулентных напряжений и не воспроизводят немонокотную зависимость касательного напряжения от параметра  $\tau_p S$ . Напротив, нелинейная алгебраическая модель (4.5) предсказывает несколько большую степень анизотропии нормальных компонент турбулентных напряжений по сравнению с дифференциальной моделью. В целом квадратичная модель качественно правильно описывает все компоненты турбулентных напряжений, хотя ее точность, естественно, снижается с ростом параметра  $\tau_p S$  и при  $\tau_p S > 1$  компоненты тензора анизотропии, получаемые на основе (4.5), заметно отклоняются от соответствующих значений  $b_{rij}$ , даваемых дифференциальной моделью (2.6). Это отклонение обусловлено погрешностью в описании вклада транспортных членов в баланс касательных напряжений согласно аппроксимации (4.1). Таким образом, область справедливости нелинейной модели (4.5) ограничена условием  $\tau_p S \leq 1$ .

На фиг. 2 турбулентные напряжения, полученные на основе моделей (2.6), (4.4) и (4.5) при  $\tau_p S = 0.6$  и изотропном начальном состоянии, сопоставляются с данными численных экспериментов [11]. Поскольку соотношения (4.4) и (4.5) алгебраические и не могут удовлетворять начальным условиям, соответствующим изотропному состоянию, то даваемые ими временные зависимости для компонент  $\langle v_i v_j \rangle$  на фиг. 2 начинаются на некотором отступлении от момента  $t = 0$ . Все компоненты  $\langle v_i v_j \rangle$ , базирующиеся на дифференциальной и нелинейной алгебраической моделях, за исключением начального участка, оказываются близкими и достаточно хорошо согласуются с результатами прямого чис-



ленного моделирования. Линейная модель завышает поперечную и трансверсальную компоненты и занижает продольную компоненту. Особенно неудовлетворительно линейная модель описывает касательную компоненту напряжений  $\langle v'_1 v'_2 \rangle$ .

Рассмотрим поведение турбулентного теплового потока и интенсивности пульсаций температуры частиц в однородном турбулентном потоке с постоянными градиентами осредненных скоростей и температур для условий, соответствующих данным DNS [11], где проведены расчеты для трех вариантов температурных градиентов, накладываемых на поле течения (5.1). В первом варианте температурные градиенты соответствуют скоростным градиентам и задаются в поперечном к основному потоку направлении  $x_2$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = \Sigma \quad (5.2)$$

где  $\Sigma$  – градиент температуры.

Второй вариант обусловлен градиентами температуры в трансверсальном направлении  $x_3$

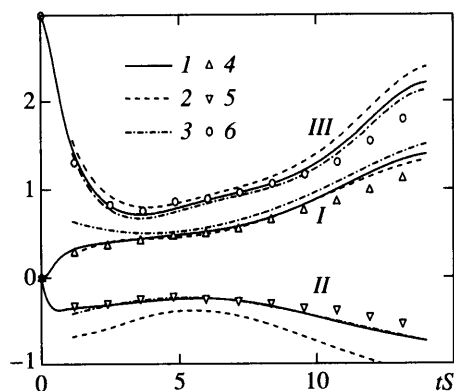
$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = \Sigma \quad (5.3)$$

В третьем варианте градиенты температуры накладываются в продольном направлении  $x_1$

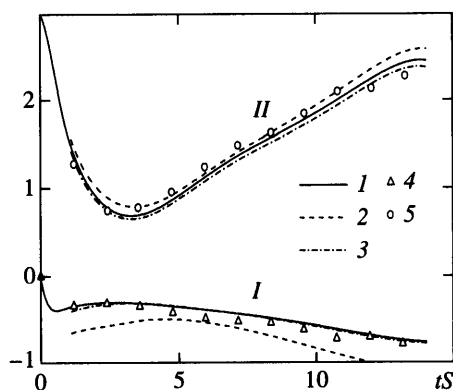
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = \Sigma \quad (5.4)$$

Во всех трех случаях градиенты температуры  $\Sigma$  имели одно и то же значение. Поскольку варианты (5.2) и (5.4) в качественном отношении зеркальны, то ограничимся анализом первых двух. Поведение турбулентного потока тепла  $\langle v'_i \theta' \rangle$  и интенсивности пульсаций температуры  $\langle \theta'^2 \rangle$  описывается соответственно уравнениями (2.7) и (2.8), упрощенными применительно к рассматриваемым однородным течениям. Кроме того, для моделирования  $\langle v'_i \theta' \rangle$  вместо (2.7) используются также алгебраические соотношения (3.11), (4.9) и (4.10). Тензор времени корреляций пульсаций скорости и температуры  $\mathbf{T}'_{Lp}$  полагается равным  $\mathbf{T}_{Lp}$ . Интегральный временной масштаб пульсаций температуры жидкости вдоль траектории инерционной частицы  $T_{Lp}$  принимается равным среднедиагональному масштабу пульсаций скорости  $T_{Lpkk}/3$ .

Представленные на фиг. 3 и 4 ненулевые компоненты турбулентного потока тепла и интенсивность пульсаций температуры получены на основе моделей (2.7), (4.9) и (4.10), упрощенных применительно к однородному течению с постоянными градиентами скорости и температуры. Результаты расчета по линейным алгебраическим моделям (3.11) и (4.9) практически совпадают, и поэтому распределения, соответствующие (3.11), не приводятся. В начальный момент времени имело место изотропное состояние, характеризуемое нулевыми значениями всех компонент турбулентных тепловых потоков сплошной и дисперсной фаз ( $\langle u'_i \vartheta' \rangle$  и  $\langle v'_i \theta' \rangle$ ). С ростом времени анизотропия турбулентных потоков тепла увеличивается. Из фиг. 3 следует, что для варианта (5.2) отличными от нуля являются две компоненты тепловых потоков, тогда, как согласно фиг. 4, для варианта (5.3) только одна компонента тепловых потоков имеет ненулевое значение. После небольшого начального промежутка времени распределения тепловых потоков и пульсаций температуры, основанные на дифференциальной (2.7) и нелинейной алгебраической (4.10) моделях, оказываются близкими и достаточно хорошо согласуются с ре-



Фиг. 3. Турбулентные тепловые потоки и интенсивности пульсаций температуры дисперсной фазы для температурных градиентов (5.2):  $\langle v_1' \theta' \rangle - I$ ,  $\langle v_2' \theta' \rangle - II$ ,  $\langle \theta'^2 \rangle - III$ ; 1, 2, 3 модели (2.7), (4.9), (4.10); 4, 5, 6 – [11]

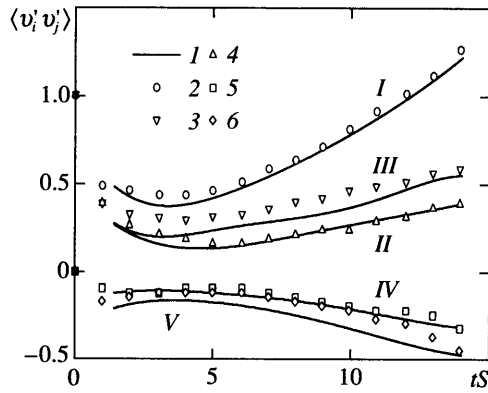


Фиг. 4. Турбулентные тепловые потоки и интенсивности пульсаций температуры дисперсной фазы для температурных градиентов (5.3):  $\langle v_3' \theta' \rangle - I$ ,  $\langle \theta'^2 \rangle - II$ ; 1, 2, 3 – модели (2.7), (4.9), (4.10); 4, 5 – [11]

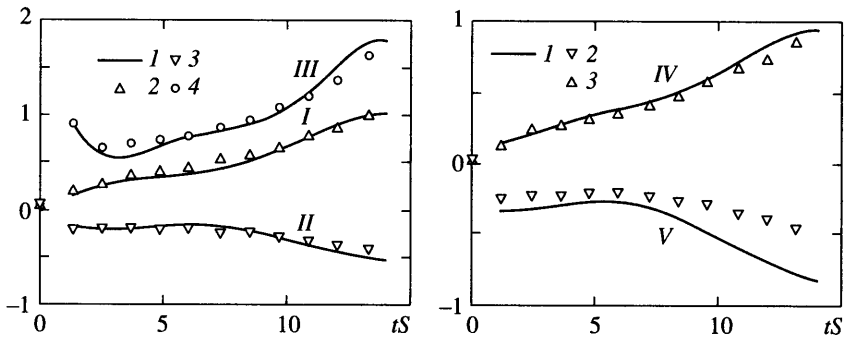
зультатами DNS, а линейная модель (4.9) может приводить к существенным погрешностям для тепловых потоков.

На фиг. 5–7 показана эволюция во времени смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз. Из сравнения с результатами DNS видно, что модель (2.11) воспроизводит все основные особенности поведения смешанных корреляционных моментов.

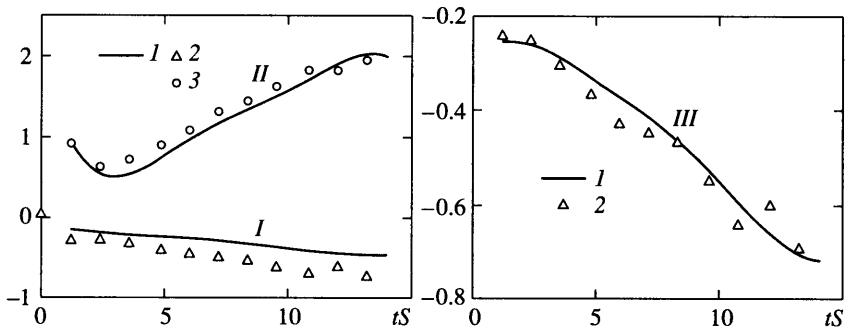
**Заключение.** Получено кинетическое уравнение для совместной плотности вероятности распределений скорости и температуры частиц с учетом анизотропии лагранжевых автокорреляционных функций и временных масштабов турбулентности. На основе кинетического уравнения построены дифференциальные и алгебраические модели для турбулентных напряжений и тепловых потоков в дисперсной фазе, а также соотношения для смешанных корреляционных моментов пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз. Проведенный анализ для однородного течения с постоян-



Фиг. 5. Корреляционные моменты пульсаций скоростей сплошной и дисперсной фаз:  $\langle u_1' v_1' \rangle - I$ ,  $\langle u_2' v_2' \rangle - II$ ,  $\langle u_3' v_3' \rangle - III$ ,  $\langle u_1' v_2' \rangle - IV$ ,  $\langle u_2' v_1' \rangle - V$ ; 1 – модель (2.11), 2–6 – [11]



Фиг. 6. Корреляционные моменты пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз для температурных градиентов (5.2):  $\langle v_1' \theta' \rangle - I$ ,  $\langle v_2' \theta' \rangle - II$ ,  $\langle \theta' \theta' \rangle - III$ ,  $\langle v_1' \theta' \rangle - IV$ ,  $\langle v_2' \theta' \rangle - V$ ; 1 – модель (2.11); 2–4 – [11]



Фиг. 7. Корреляционные моменты пульсаций скоростей и температур сплошной и дисперсной фаз для температурных градиентов (5.3):  $\langle v_3' \theta' \rangle - I$ ,  $\langle \theta' \theta' \rangle - II$ ,  $\langle u_3' \theta' \rangle - III$ ; 1 – модель (2.11); 2, 3 – [11]

ными градиентами осредненных скоростей и температур свидетельствует, что дифференциальные и нелинейные алгебраические модели для турбулентных напряжений и тепловых потоков предсказывают близкие результаты и хорошо согласуются с данными прямого численного моделирования, а линейные модели могут приводить к большим погрешностям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-08-01292).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Осаждение частиц из турбулентного потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 5. С. 96–104.
2. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // Phys. Fluids A. 1991. V. 3. № 3. P. 446–456.
3. Reeks M.W. On the continuum equation for dispersed particles in nonuniform flows // Phys. Fluids A. 1992. V. 4. № 6. P. 1290–1303.
4. Swailes D.C., Darbyshire K.F.F. A generalized Fokker–Plank equation for particle transport in random media // Physica A. 1997. V. 242. P. 38–48.
5. Зайчик Л.И. Моделирование движения частиц в неоднородном турбулентном потоке на основе уравнения для функции плотности вероятности // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 132–138.
6. Hyland K.E., McKee S., Reeks M.W. Deviation of a pdf kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // J. Phys. A: Math. Gen. 1999. V. 32. P. 6169–6190.
7. Pozorski J., Minier J.-P. Probability density function modeling of dispersed two-phase turbulent flows // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 1. P. 855–863.
8. Derevich I.V. Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. № 19. P. 3709–3723.
9. Деревич И.В., Зайчик Л.И. Уравнение для плотности вероятности скорости и температуры частиц в турбулентном потоке, моделируемом гауссовым случайным полем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 767–774.
10. Zaichik L.I. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 6. P. 1521–1534.
11. Pandya R.V.R., Mashayek F. Non-isothermal dispersed phase of particles in turbulent flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 475. P. 205–245.
12. Алипченков В.М., Зайчик Л.И. Статистическая модель движения и дисперсии частиц в анизотропном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 5. С. 70–83.
13. Pope S. B. Stochastic Lagrangian models of velocity in homogeneous turbulent shear flow // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 5. P. 1696–1702.
14. Tavoularis S., Corrsin S. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient // J. Fluid Mech. 1981. V. 104. P. 311.
15. Csanady G.T. Turbulent diffusion of heavy-particles in the atmosphere // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 201–208.
16. Wang L.-P., Stock D. E. Dispersion of heavy particles in turbulent motion // J. Atmos. Sci. 1993. V. 50. № 13. P. 1897–1913.
17. Simonin O., Deutsch E., Minier J.-P. Eulerian prediction of the fluid / particle correlated motion in turbulent two-phase flows // Appl. Scientific Res. 1993. V. 51. P. 275–283.
18. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press, 1970.
19. Chen H., Orszag S.A., Staroselsky I., Succi S. Expanded analogy between Boltzmann kinetic theory of fluids and turbulence // J. Fluid Mech. 2004. V. 519. P. 301–314.
20. Rodi W. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. V. 56. P. T219–T221.
21. Gatski T. B., Speziale C. G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 59–78.
22. Girimaji S.S. Fully explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model // Theoret. Comput. Fluid Dynamics. 1996. V. 8. P. 387–402.

23. *Jongen T., Gatski T. B.* General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows // *Int. J. Eng. Sci.* 1998. V. 36. P. 739–763.
24. *Wallin S., Johansson A.V.* An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows // *J. Fluid Mech.* 2000. V. 403. P. 89–132.
25. *Mashayek F., Taulbee D.B.* Turbulent gas-solid flows. Part II: Algebraic models // *Numerical Heat Transfer. Part B.* 2002. V. 41. P. 31–52.
26. *Simonin O., Deutsch E., Boivin M.* Large eddy simulation and second-moment closure model of particle fluctuating motion in two-phase turbulent shear flows // *Turbulent Shear Flow 9*. Edited by F. Durst et al. Springer-Verlag, 1995. P. 85–115.
27. *Laviéville J., Simonin O., Berlemont A., Chang Z.* Validation of inter-particle collision models based on large eddy simulation in gas-solid turbulent homogeneous shear flow // *Proc. 7th Int. Symp. on Gas-Particle Flows, ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, 1997, FEDSM97-3623*.
28. *Taulbee D.B., Mashayek F., Barré C.* Simulation and Reynolds stress modeling of particle-laden turbulent shear stress // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 1999. V. 20. P. 368–373.

Москва

Поступила в редакцию  
16.1.2006