

УДК 532.517.3

© 2007 г. В.А. ЖАРОВ, О.И. РОВЕНСКАЯ

ОДНОМЕРНАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ИНДУЦИРОВАННАЯ ДИНАМИКА АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КОНЕЧНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

В рамках уравнений Навье – Стокса рассмотрена задача об одномерном нестационарном течении вязкого сжимаемого газа на конечном интервале с периодическими граничными условиями, возбуждаемого малой внешней нестационарной, периодической по пространству и времени силой. Исследование проведено численно при длине интервала периодичности L , отнесенного к вязкой длине, от 10^2 до $2 \cdot 10^3$ и амплитудах внешней силы в диапазоне от 10^{-4} до 0.1. В рамках данной задачи исследована нелинейная динамика волновых процессов. Показано, что при L , больших или порядка 10^3 , развиваются нелинейные установившиеся колебания с резким изменением величин по пространству и времени, что приводит к появлению непрерывного спектра.

Ключевые слова: вязкий сжимаемый газ, внешняя периодическая по пространству и времени сила, одномерная задача, периодические граничные условия.

В аэродинамических исследованиях большое внимание уделяется проблеме численного моделирования и исследованиям явлений турбулентности и гидродинамических неустойчивостей [1]. Одна из возможных интерпретаций такого подхода – динамика акустических возмущений, возбуждаемых внешней силой. Сходные явления могут иметь место в выхлопной части канала турбореактивного авиационного двигателя (между турбиной и срезом сопла при дозвуковом течении). Турбина генерирует звуковые волны, которые дифракционно отражаются от среза сопла. При этом возникает динамика интенсивных акустических волн. Кроме того, представляет интерес определение диссипативного масштаба в турбулентном сжимаемом газе. Простейший вариант такой задачи – одномерная задача для уравнения Навье–Стокса на конечном интервале с периодическими граничными условиями.

Для ее численного решения использовался псевдоспектральный метод, основанный на дискретном преобразовании Фурье [2, 3]. Ранее сходная задача рассматривалась в [4]. Отличие состояло в том, что внешние периодические по пространству возмущения входили только в уравнение энергии в виде постоянных во времени источников.

Как показывает численный анализ, малые возмущения, обусловленные наличием малой внешней нестационарной силы в уравнении Навье–Стокса, приводили к возникновению ряда нелинейных эффектов [4, 5], в том числе к появлению частотного спектра близкого к непрерывному.

Далее, для демонстрации возникающих нелинейных эффектов, рассмотрено несколько характерных режимов динамики этой системы. В данной работе решается задача об одномерном нестационарном течении вязкой сжимаемой среды на конечном пространственном интервале с периодическими граничными условиями на его концах, которое возбуждается малой внешней, нестационарной, периодической по пространству и времени силой. Эволюция этого течения определяется из уравнений Навье–Стокса с периодическими граничными условиями.

1. Постановка задачи. Для решения поставленной задачи уравнения Навье–Стокса представляются в безразмерном дивергентном виде [6]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + \frac{1}{\gamma} \rho T \right) - \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left((T)^\omega \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \text{Fr} X(x, t) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \rho T \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)} T \right) - \frac{1}{\text{Pr}(\gamma-1)} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3} (T)^\omega u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$p - \rho RT = 0, \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega$$

где $0.5 < \omega < 1$; R – газовая постоянная; $\lambda = (\text{Pr}\mu)/c_p$ – коэффициент теплопроводности; $\epsilon = c_p T$ – внутренняя энергия идеального газа, $h = c_v T$ – энтальпия, c_p, c_v – удельные теплоемкости при постоянных давления значениях и объема, отнесенных к единице массы. А также соответствующие граничные и начальные условия

$$\rho\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \rho\left(\frac{L}{2}, t\right), \quad T\left(-\frac{L}{2}, t\right) = T\left(\frac{L}{2}, t\right), \quad u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u\left(\frac{L}{2}, t\right)$$

$$\rho(x, 0) = 1, \quad T(x, 0) = 1, \quad u(x, 0) = 0$$

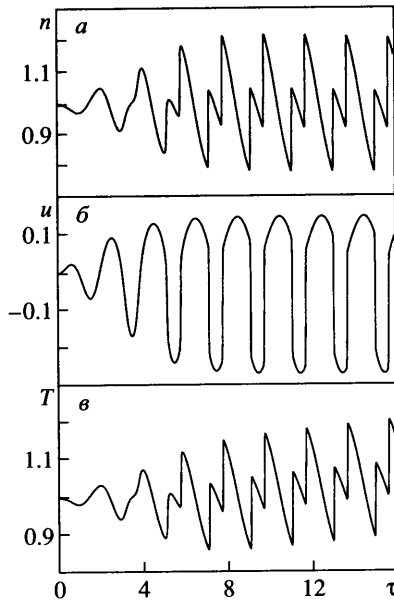
При обезразмеривании системы (1.1) плотность и температура были отнесены к параметрам невозмущенного потока газа ρ_0 и T_0 , скорость – к скорости звука $a(T_0) = \sqrt{\gamma RT_0}$, где $\gamma = c_p/c_v$, x – к вязкой длине $l = \nu_0/a$, где $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$, время – к характерному времени $\tau = l/a$. В уравнениях (1.1) получаются следующие безразмерные параметры подобия: $\text{Pr} = \mu_0 c_p / \lambda$ – число Прандтля, число Фруда $\text{Fr} = \tau f / a \tau$, где f – амплитуда внешней силы, $\text{Re}_a = aL/\nu_0 = L/l$ – число Рейнольдса.

При решении задачи использовались линейная зависимость вязкости от температуры, т.е. $\omega = 1$, $\text{Pr} = 1$ и $\gamma = c_p/c_v = 5/3$. $\text{Re}_a = L = \text{Re}_\mu/M$, где $M = u_{\max}/a$ – характерное число Маха, определенное по максимальной гидродинамической скорости акустических возмущений u_{\max} .

2. Метод решения. Решение задачи основано на коллокационном (псевдоспектральном) методе [2, 3] с использованием дискретного преобразования Фурье. Задача решалась с помощью стандартного пакета [3, 7]. Дискретизация уравнений осуществлялась по пространственной переменной, которая далее преобразовывалась с помощью дискретного фурье-преобразования. В результате получалась система из N обыкновенных дифференциальных уравнений по времени в фурье-пространстве. Начальные условия также преобразовывались в фурье-пространство. Система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени решалась с помощью схемы Рунге–Кутта 4-го порядка с адаптивным шагом по времени.

3. Анализ результатов численного эксперимента. *Стоячая волна.* Рассматривалась эволюция возмущений, при заданной внешней силе в виде $F(x, t) = A \sin((2\pi/L)x) \sin((2\pi/L)t)$ (стоячая волна). Исследовалось влияние на картину течения длины интервала L ($10^3 - 2.5 \cdot 10^3$) при фиксированной безразмерной амплитуде внешней силы $A = 10^{-4}$ и амплитуде вынуждающей силы A ($10^{-4} - 10^{-2}$) при постоянной длине интервала $L = \text{Re}_a = 10^2$.

Фигура 1 показывает, что характеристики течения, начиная с малых амплитуд, со временем выходят на почти периодический режим нелинейных колебаний с существенно большими амплитудами. Нелинейность колебаний связана с очень резкими измене-



Фиг. 1. Эволюция во времени плотности (а), скорости (б) и температуры (в) при $A = 10^{-4}$ и $L = Re_a = 2 \cdot 10^3$ при $x = 500$, $\tau = t/10^3$

ниями гидродинамических величин по пространству и времени, обусловленными появлением слабых нестационарных разрывов, периодически движущихся от центра интервала к его концам и обратно. Характерные безразмерные длины и времена неоднородности (фиг. 2) равны приблизительно 50. Температура медленно нарастает по времени из-за необратимой диссипации энергии. На графиках присутствует две ударные волны.

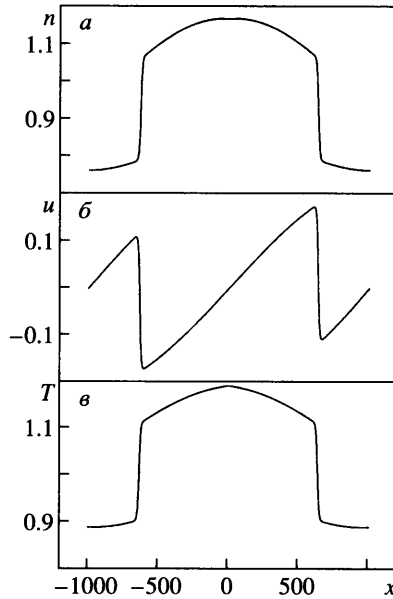
С появлением ударных волн связано формирование непрерывного спектра. Из графика на фиг. 3 видно, что спектр в логарифмических координатах (1) в значительной области частот близок к непрерывному. Соответствующий степенной закон зависимости энергии от частоты (2) имеет показатель степени $k \approx -5$. Вертикальной линией (3) помечена частота накачки.

При увеличении амплитуды возмущения A от 10^{-4} до 10^{-2} при фиксированном числе Рейнольдса (длине интервала L) колебания плотности и скорости происходят около начальных значений, а температура увеличивается, и со временем все величины выходят на периодический режим, т.е. колебания устанавливаются.

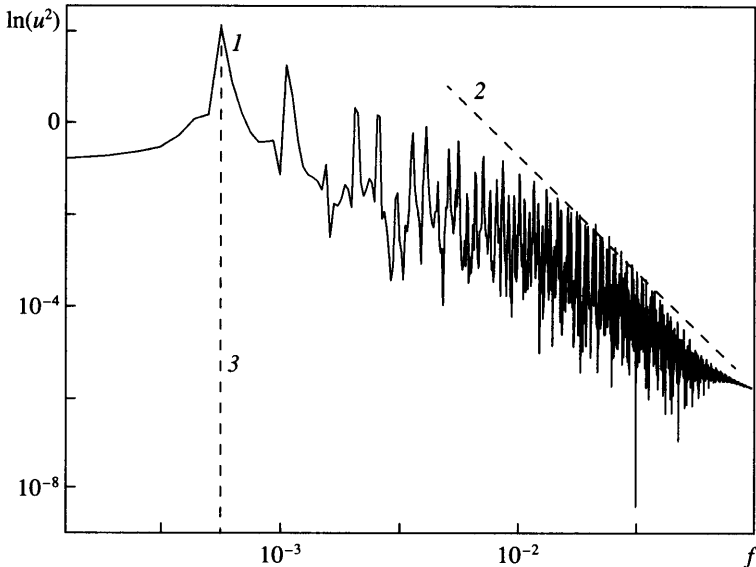
Суперпозиция волн с разными амплитудами. В газе возбуждаются две встречные волны с разными амплитудами, тогда сила в уравнениях (1.1) задается следующим образом: $F(x, t) = A_1 \cos((2\pi/L)(t - x)) - A_2 \cos((2\pi/L)(t + x))$, где $A_1 = 0.5 A$, $A_2 = 0.125 A$.

Данный случай интересен тем, что между волнами, образующимися в газе, идет релаксационный процесс и появляется средняя скорость движения газа. Таким образом, возбужденные в газе колебания приводят к возникновению течения в нем, что соответствует теоретическим представлениям о генерации скорости с помощью звуковых колебаний [5]. В связи с этим в процессе эволюции скорость совершает колебания около значения средней скорости (фиг. 4). Рассмотрены случаи с переменным числом Рейнольдса Re_a от 10^2 до 10^3 при фиксированной амплитуде $A = 5 \cdot 10^{-4}$.

Из анализа результатов следует, что колебания плотности происходят около ее начального значения, скорости – около средней скорости. Температура, из-за наличия



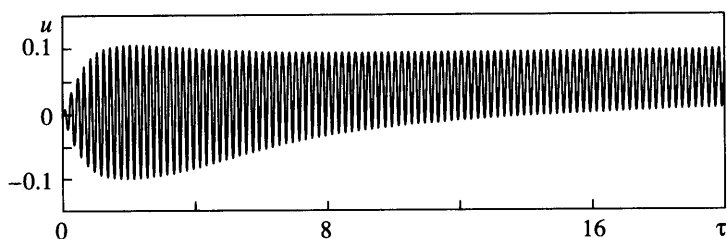
Фиг. 2. Пространственное изменение плотности (а), скорости (б) и температуры (в) при $A = 10^{-4}$ и $L = \text{Re}_a = 2 \cdot 10^3$ в момент времени $t_k = 1.6 \cdot 10^4$



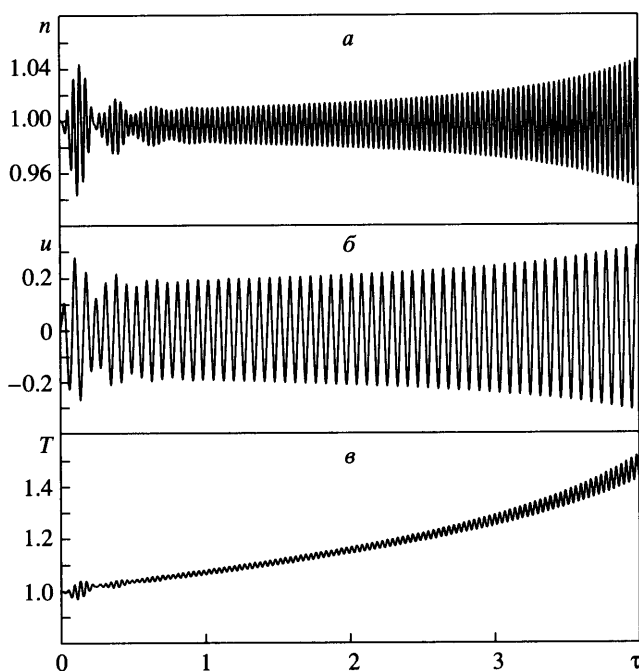
Фиг. 3. Энергетический спектр скорости при $L = \text{Re}_a = 2 \cdot 10^3$ и $A = 10^{-4}$: 1 – спектр, 2 – степенной закон (–), 3 – частота накачки

внешней силы, растет со временем, и ее колебания происходят около среднего значения. Изменения этих величин, через некоторое время, выходят на регулярные квазипериодические колебания.

Встречные волны со скоростями, не совпадающими со скоростью звука. Исследован случай, когда сила определена таким образом, чтобы частота внешнего возбужде-



Фиг. 4. Эволюция скорости при $A = 5 \cdot 10^{-4}$ и $L = Re_a = 2 \cdot 10^2$ при $x = 50$, $\tau = t/10^3$



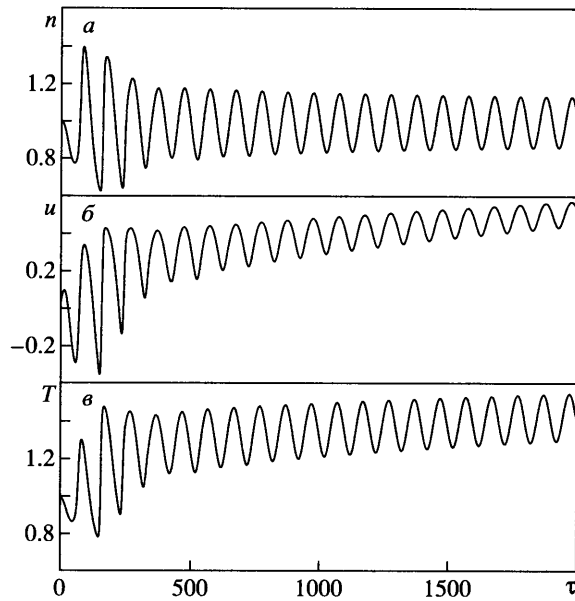
Фиг. 5. Эволюция плотности (а), скорости (б) и температуры (в) при $A = 8 \cdot 10^{-3}$ и $L = Re_a = 10^2$ в точке $x = 25$, $\tau = t/10^3$

ния отличалась от частоты акустических волн распространяющихся в газе, т.е сила задавалась в виде: $F(x, t) = A \sin((2\pi/L)x) \sin(\sqrt{2} (2\pi/L)t)$.

Исследование было проведено при фиксированной длине интервала L ($Re_a = 10^2$) и варьировании амплитуды внешней силы A от 10^{-3} до 10^{-2} . Минимальное количество точек на пространственном интервале равнялось 1001. Согласно фиг. 5, плотность, скорость и температура выходят со временем на квазипериодические колебания. Амплитуда колебаний плотности и скорости нарастает, а средняя температура увеличивается.

Бегущая волна. В данном случае сила задавалась в виде: $F(x, t) = A \sin((2\pi/L)(x - t))$. Тогда в газе возбуждается бегущая волна, распространяющаяся со скоростью звука.

Исследование проведено при изменении амплитуды внешней силы от $A = 10^{-3}$ до 10^{-1} и при фиксированном значении числа Рейнольдса $Re_a = 10^2$. Минимальный шаг по x равен 0.25.



Фиг. 6. То же, что на фиг. 5 при $A = 10^{-2}$ и $L = Re_a = 10^2$ в точке $x = 25$, $\tau = t$

Наиболее сложный случай возникал при достаточно большой амплитуде действующей силы $A = 0.1$. Этот случай характеризуется образованием резких изменений гидродинамических величин на безразмерных временах порядка 50. Ввиду этого, получение длительных по времени зависимостей гидродинамических величин сопряжено с большими вычислительными трудностями.

Фигура 6 показывает, что на начальной стадии наблюдается заметная ангармоничность колебаний. Со временем колебания становятся более гармоничными, выходя на некоторый квазистационарный режим с возникновением средней скорости движения газа [6].

С ростом амплитуды возмущающей силы ангармоничность колебаний можно отметить на более длительном интервале времени.

Заключение. Рассмотрена задача об одномерном нестационарном течении вязкого сжимаемого газа на конечном интервале с периодическими граничными условиями, возбуждаемого внешней нестационарной силой. Эволюция такого течения описывается решениями уравнений Навье–Стокса, определенными на безразмерных временах порядка $1.5 \cdot 10^4$. Исследование проведено при $Re_a = L = 10^2 - 2 \cdot 10^3$ и $A = 10^{-4} - 10^{-1}$.

При исследовании нелинейной динамики волновых процессов показано, что внешняя сила малой амплитуды на больших пространственных интервалах ($A = 10^{-4}$ и $Re_a = L \geq 2 \cdot 10^3$) приводит со временем к появлению возмущений типа слабых ударных волн. При этом спектр близок к непрерывному. При $A = 10^{-4}$ и $Re_a = L \leq 10^3$ подобные явления не наблюдаются.

Увеличение амплитуды внешней силы приводит к заметному усложнению движения газа, выражающегося в том, что колебания становятся ангармоническими даже при $Re_a = L = 10^2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00556).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002. 286 с.
2. Марчук Г.Н. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
3. Fornberg B. A Practical guide to Pseudospectral Methods. Cambridge: Univ. Press, 1996. 231 p.
4. Дроздов С.М. Моделирование возникновения нестационарности и хаоса в гидродинамической системе, управляемой небольшим числом степеней свободы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 1. С. 31–45.
5. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе: О детерминистическом подходе к турбулентности. Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. 368 с.
6. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Mathematica 5.0. Users Guide, Wolfram Research, 2003.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.2006