

УДК 532.529.2:532.5.013.4

© 2007 г. В.Г. БАЙДУЛОВ, П.В. МАТЮШИН, Ю.Д. ЧАШЕЧКИН

ЭВОЛЮЦИЯ ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННОГО ДИФфуЗИЕЙ НА СФЕРЕ, ПОГРУЖЕННОЙ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННУЮ ЖИДКОСТЬ

Асимптотическими и численными методами решена задача установления течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость. Аналитическое решение описывает структуру основных конвективных ячеек, включающее тонкие меридиональные струи вдоль поверхности и растекающиеся факелы от области конвергенции течения над верхним и нижним полюсами сферы, постепенно возвращающие частицы жидкости на горизонты нейтральной плавучести. Полная ширина прилегающих течений превышает толщину слоя дефицита солености – плотностного пограничного слоя. Численное решение полной задачи в нелинейной постановке описывает основные конвективные ячейки и две системы нестационарных внутренних волн, образующихся в окрестности полюсов сферы. На больших временах из всей системы внутренних волн остаются выраженными только ближайšie к окрестности горизонта их формирования. Рассчитанные картины течения согласуются между собой и данными теневой визуализации структуры стратифицированной жидкости около погруженного неподвижного препятствия.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, диффузия, вязкость, нестационарные внутренние волны, пограничное течение.

В природных системах (атмосфере и гидросфере) и в технологических установках плотность жидкости, как правило, является переменной, вследствие неоднородности температуры, концентрации растворенных веществ, взвеси или газов. Хотя вариации плотности обычно невелики ($\Delta\rho/\rho \sim 10^{-4}$ – 10^{-8}), они обуславливают существование ряда движений, отсутствующих в однородной жидкости. К их числу относятся внутренние волны, пограничные слои, внутренние пограничные течения и течения, индуцированные диффузией на неровностях рельефа даже в покоящейся жидкости. Они образуются под действием горизонтальных градиентов давления, возникающих вследствие неоднородности распределения плотности, обусловленной прерыванием молекулярного потока стратифицирующей компоненты на наклонных непроницаемых поверхностях [1].

Изучение течений, индуцированных диффузией на неровностях рельефа, представляет как научный, так и практический интерес. Такие течения инициируют интенсивные склоновые ветры в устойчиво стратифицированной атмосфере [2] и плотностные течения в океане [3], на распространение которых влияют силы Кориолиса [4]. С ними связывают процессы формирования тонкой структуры среды и переноса вещества на большие расстояния.

В силу математической сложности течения, индуцированные диффузией, первоначально изучались в стационарном приближении [1]. При этом на границе с восходящим потоком наблюдается сравнительно тонкое нисходящее течение, динамика установления которого оставалась неизвестной как в случае температурной [1], так и солевой стратификации [5]. Полученные стационарные решения для бесконечной наклонной плоскости не согласуются с известными точными решениями задач теплопроводности и не являются аналитическими функциями части физических переменных.

В точном решении задачи формирования течения на наклонной плоскости поля скорости и плотности характеризуются различными масштабами изменчивости [6]. При-

ближенные решения задачи формирования течений, индуцированных диффузией на плоскости и в канале, в клиновидной впадине, около цилиндрического препятствия [7] в приближении малых времен согласуются между собой и решениями [6, 8]. Однако они не переходят в стационарные решения типа [1, 5] и в асимптотику больших времен [8]. В численном решении трехмерной задачи формирования таких течений в [9] выявлен новый структурный элемент – семейство нестационарных внутренних волн, вызывающих искажения профиля плотности на больших удалениях от препятствия.

Для построения начальных условий в задачах динамики реальных стратифицированных течений и технологических приложений представляет интерес как общий анализ течений, индуцированных диффузией, так и их тонкой структуры в окрестностях особых линий и точек ограничивающих поверхностей (центральных сечений, острых кромок, полюсов). Цель данной работы – построение и анализ численного решения задачи установления течения в покоящейся жидкости на неподвижной сфере и сравнение с результатами асимптотического решения линеаризованной версии задачи, когда нелинейными членами уравнений можно пренебречь.

1. Определяющая система уравнений. Рассматривается эволюция структуры первоначально линейно стратифицированной жидкости, плотность которой $\rho_0 = \rho_{00}[1 - (z/\Lambda)]$ определяется распределением солёности $S_0(z)$ и характеризуется масштабом $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавуности $T_b = 2\pi/N$. В начальный момент времени $t = 0$ в жидкость без внесения механических возмущений помещается сфера диаметром d с непроницаемой для соли твердой поверхностью, на которой выполняются условия прилипания для скорости и непротекания для соли.

Система уравнений движения включает уравнения состояния, Навье–Стокса в приближении Буссинеска, неразрывности и диффузии стратифицирующей компоненты [10]

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{00} \left(1 - \frac{z}{\Lambda} + S \right) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= - \frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + S \mathbf{g} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) S &= \kappa \Delta S + \frac{v_z}{\Lambda} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – индуцированная скорость, S – возмущение солёности, включающее коэффициент солевого сжатия $\beta = (\partial \ln \rho / \partial S)_p$, P – давление за вычетом гидростатического, \mathbf{g} – ускорение свободного падения, t – время, ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа, ν и κ – коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли, соответственно. Их отношение $\epsilon^2 = \kappa/\nu = Sc^{-1}$ является малым, поскольку для водного раствора поваренной соли $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$, $\kappa = 1.41 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{с}$.

При тривиальных начальных условиях

$$t = 0, \quad \mathbf{v}, S = 0 \quad (1.2)$$

граничные условия непротекания для стратифицирующей примеси и прилипания для скорости на поверхности сферы Σ имеют вид

$$\mathbf{v} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial n} \quad (1.3)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности сферы Σ . На бесконечности все возмущения затухают

$$\mathbf{v}, S \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Размерные параметры задачи порождают многопараметрическое семейство масштабов длины, существенно различающихся по величине. Среди них выделенными являются масштаб плавучести Λ и размер тела d , универсальные микромасштабы скорости $\delta_N = \sqrt{v/N}$ и плотности $\delta_s = \sqrt{\kappa/N}$, порождающие комбинационный масштаб $\delta_c = \sqrt{\delta_N \delta_s}$, масштаб пограничного слоя Прандтля $\delta_u = v/u$, которые могут проявляться в размерах структурных элементов течений. В частности, толщина стационарного пограничного слоя зависит от локального угла наклона поверхности и комбинационного масштаба δ_c [1, 5]. Нестационарные плоские течения, индуцированные диффузией, характеризуются масштабами изменчивости δ_N для скорости и δ_s для солености, т.е. являются разномасштабными.

2. Асимптотическое решение задачи установления течения. Аналитическое решение задачи формирования трехмерных течений, индуцированных диффузией на сфере, строится методами теории возмущений с использованием основного свойства задачи – отсутствия внешнего течения. В начальный момент времени покоятся и сфера, и стратифицированная жидкость, дальнейшие движения формируются малыми силами плавучести, возникающими вследствие неоднородности горизонтального распределения плотности в окрестности препятствия. Естественный диффузионный поток стратифицирующей компоненты прерывается на поверхности тела, что создает дефицит солености выше и избыток ниже него, что приводит к нарушению гидростатического равновесия.

Размерные параметры задачи – частота плавучести N (масштаб времени – период плавучести $T_b = 2\pi/N$) и толщина вязкого пограничного слоя (δ_N) определяют масштаб скорости течения – $U_N = \delta_N N$. Вариации солености характеризуются отношением $S_N = \delta_N/\Lambda$, записанным с учетом проведенного ранее обезразмеривания на коэффициент солевого сжатия. В качестве масштаба динамической компоненты завихренности ($\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\mathbf{v}$), имеющей размерность частоты, принимается частота плавучести $\omega_N = N$.

Начальный этап установления течения характеризуется малым параметром τ_* с нормировкой $t = \tau_*^2 t'$, $r = \tau_* r'$. Решения системы (1.1) ищутся в виде разложений

$$S = \sum \tau_*^n S_n, \quad \mathbf{v} = \sum \tau_*^n \mathbf{v}_n, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum \tau_*^n \boldsymbol{\omega}_n \quad (2.1)$$

с точностью до первых ненулевых членов. Расчеты проводятся в сферической системе координат $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$; $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$; $z = r \cos \vartheta$, центр которой помещен в геометрический центр сферы.

С учетом симметрии граничных условий решение (2.1) не зависит от азимутального угла φ и записывается в виде [11]

$$S = S(r, \vartheta, t); \quad \mathbf{v} = U(r, \vartheta, t) \mathbf{e}_\vartheta + V(r, \vartheta, t) \mathbf{e}_r; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(r, \vartheta, t) \mathbf{e}_\varphi$$

После подстановки разложений (2.1) в систему (1.1) и разделения порядков теории возмущений, уравнения первого приближения решаются с помощью преобразований Лапласа. Решения задачи в образах, которые выражаются через модифицированные функции Бесселя дробного аргумента [11], здесь для краткости не приводятся. Далее вычисляются их асимптотические значения, соответствующие приближению малых времен, после чего осуществляются обратные преобразования в конфигурационное пространство.

Полученные решения, представленные здесь в безразмерном виде, выражаются через интегралы от функции ошибок

$$S_1 = -2\varepsilon\sqrt{t}\frac{R}{r}i \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)\cos\vartheta$$

$$U_1 = -4\frac{(\varepsilon\sqrt{t})^3}{1-\varepsilon^2}\frac{R}{r}\left[i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{t}}\right) - i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)\right]\sin 2\vartheta$$

$$V_1 = -\frac{8}{R}\frac{\varepsilon^3 t^2}{1-\varepsilon^2}\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^2\left[i^4 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{t}}\right) - \varepsilon i^4 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)\right] - \alpha\left(\frac{R}{r}\right)^4\right\}(1+3\cos 2\vartheta) \quad (2.2)$$

$$\omega_1 = 2\frac{\varepsilon^2 t}{1-\varepsilon^2}\frac{R}{r}\left\{\varepsilon i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{t}}\right) - i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{r-R}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)\right\}\sin 2\vartheta$$

$$\varepsilon^2 = Sc^{-1} = \frac{\kappa}{\nu}, \quad R = \frac{d}{2\delta_N}, \quad \alpha = \frac{1-\varepsilon}{32}$$

Функция тока в сферической системе координат

$$V = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad U = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

в приближении малых времен принимает вид

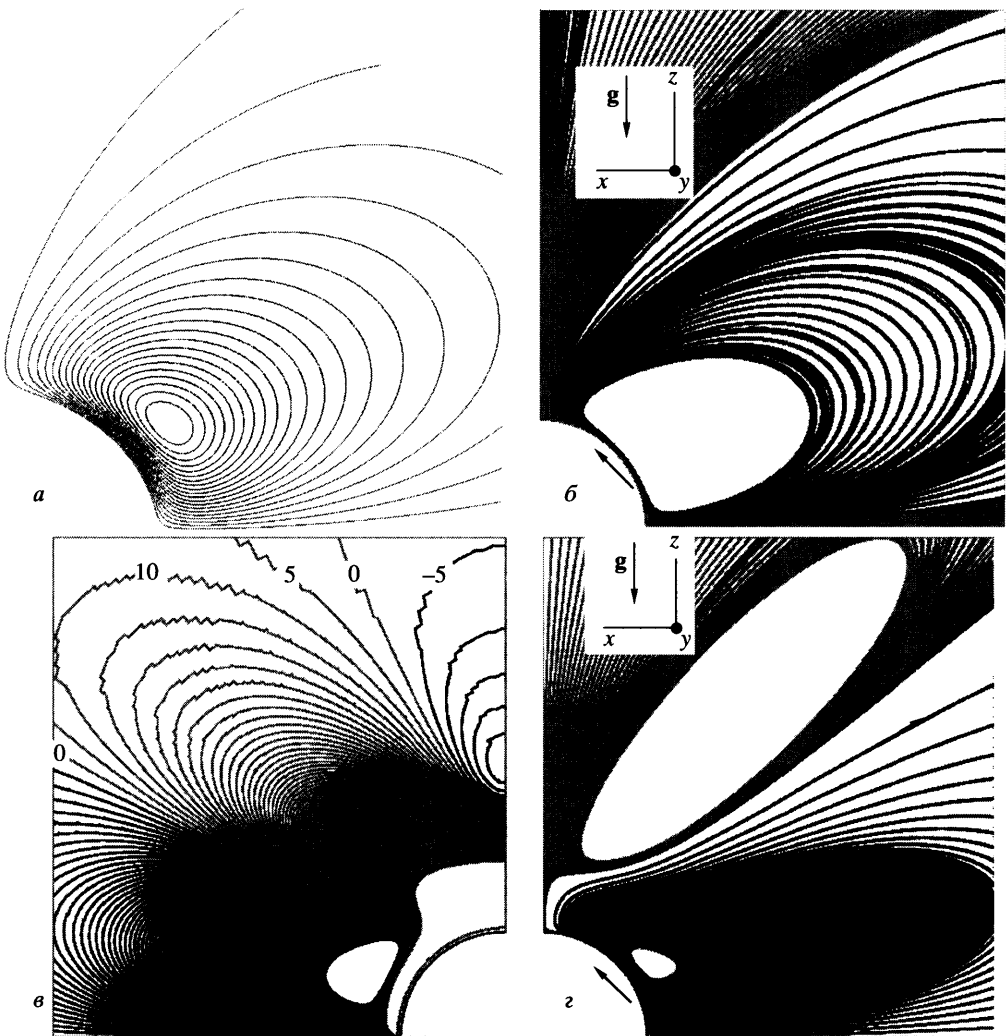
$$\Psi^{(1)} = r^2 V(r, t) \sin \vartheta \sin 2\vartheta$$

Картина функции тока решения (2.2) приведена на фиг. 1, а.

Угловое распределение всех параметров течения описывается присоединенными полиномами Лежандра, поля скорости, солёности и завихренности характеризуются различными масштабами: δ_N и $\varepsilon\delta_N$. Внешние течения направлены к сфере на некотором удалении от экваториальной плоскости, далее поворачивают к полюсам вдоль меридианов, сходятся на полюсах и растекаются осесимметричными факелами в окрестности соответствующих горизонтов. Решение (2.2) аналитично по всем физическим параметрам и локально равномерно переходит в решения плоской (цилиндр [7]) и одномерной (наклонная плоскость) задач при неограниченном увеличении $R \rightarrow \infty$ и соответствующем выборе систем координат касательных плоскостей.

3. Численное решение задачи. Полная система нелинейных уравнений (1.1) решается численным методом расщепления по физическим факторам SMIF-MEPANЖ [12]. Для аппроксимации конвективных членов в системе уравнений (1.1) применяется явная гибридная конечно-разностная схема, основанная на комбинации модифицированных схем с центральными и ориентированными разностями. Разработанная схема расчета обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространственным переменным, минимальные схемную вязкость и дисперсию, а также монотонность и работоспособность в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Фруда [9, 13, 14]. Уравнение Пуассона для давления решается методом сопряженных градиентов [13].

При проведении вычислений в качестве масштаба длины выбирается радиус сферы $R = d/2$, задается характерная скорость $U_N \sim \sqrt{\nu N}$, на основе которых строятся традиционные безразмерные комплексы – числа Рейнольдса ($Re = U_N d/\nu$), Фруда ($Fr = U_N/Nd$), Шмидта ($Sc = \nu/\kappa$) и отношение масштабов ($C = \Lambda/d$). Для оценки роли масштабных фак-



Фиг. 1. Картина установления течения, индуцированного диффузией, на неподвижной сфере малого диаметра ($d = 2$ см, $T_b = 6.34$ с): *a, б* – картины линий тока из аналитического решения и численного моделирования, $t = 0.5 \cdot T_b$; *в, з* – картины изолиний возмущения солёности $S \cdot 10^{12}$ и линий тока, $t = T_b$

торов и последующего сравнения с опытами в расчетах принималось $d_1 = 2$ см, $d_2 = 4$ см ($d_1 < L_v < d_2$, $L_v = \sqrt[3]{g\nu/N} \approx 2.2$ см – вязкий волновой масштаб, характеризующий модальность течений [15]), $\Lambda = 10$ м ($N = 0.991$ с $^{-1}$), $U_{N,1} = 0.4$ мм/с, $U_{N,2} = 1$ мм/с.

Вычисления проводились на сферической сетке $N \times M \times L$, где N, M, L – число шагов разностной сетки в направлениях r, ϑ, ϕ . В силу осевой симметрии задачи относительно вертикальной оси число шагов разностной сетки в азимутальном направлении выбиралось равным единице (т.е. $L = 1$). Внешняя граница удалена от сферы на восемь диаметров. Для разрешения в формирующемся течении скоростного пограничного слоя с масштабом $\delta = R \sqrt{2/Re}$ осуществлялось сгущение сетки к поверхности сферы (в радиаль-

ном направлении), так чтобы в пограничном слое помещалось несколько (B) ячеек. Минимальный размер ячейки расчетной сетки в радиальном направлении равен $h_{\min} = \delta/B$. При выбранных в данных расчетах значениях d_1 и $d_2 - \delta_1 = 0.316$ см, $\delta_2 = 0.448$ см (при $U_N = U_{N,2}$). Кроме этого, использовалось более сильное сгущение сетки для разрешения масштаба $\delta_S = \varepsilon \delta_N = \sqrt{\kappa/N} = 3.76 \cdot 10^{-3}$ см (при этом минимальный размер ячейки составляет $h_S = \delta_S/B_S$).

Для наглядности представления результатов расчетов выбраны картины мгновенных линий тока, которые определяются из решений системы уравнений: $dr/ds = \mathbf{v}$. Здесь $\mathbf{r}(r, \vartheta)$ – полярные координаты, $\mathbf{v}(V, U)$ – мгновенный вектор скорости с компонентами V, U в фиксированный момент времени, s – расстояние вдоль линии тока, $ds = k\Delta t$, где $0 < k < 1$ (обычно $k = 0.2$). Временной интервал Δt выбирается из условия Куранта $\Delta t = \min\{h_r/V, h_\vartheta/U\}$, h_r, h_ϑ – шаги разностной сетки в окрестности выбранной точки. Координаты линии тока, начинающейся в точке (r_0, ϑ_0) , находятся из уравнений

$$r_i = r_{i-1} + V_{i-1} ds, \quad \vartheta_i = \vartheta_{i-1} + U_{i-1} ds/r$$

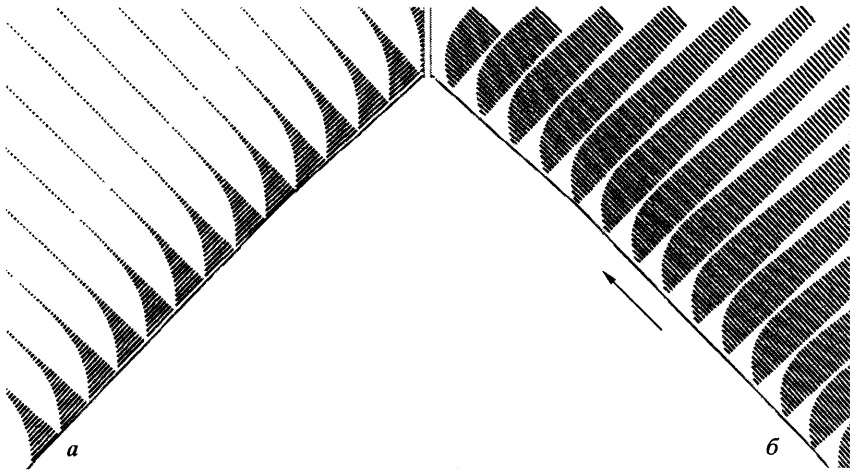
где $i = 1, 2, \dots, K$, K – число шагов, компоненты вектора V_{i-1} и U_{i-1} в точках $(r_{i-1}, \vartheta_{i-1})$ определяются линейной интерполяцией по значениям, рассчитанным в центрах граней разностной ячейки (фиг. 1, б).

4. Картина течения на малых временах – фаза формирования. Полная картина течения, индуцированного диффузией около сферы малого диаметра, в начальной фазе процесса приведена на фиг. 1 для двух моментов времени ($\tau = t/T_b = 0.5; 1$). Для полноты описания даны поля двух физических величин – формирующих течение возмущений солёности и картины линий тока. Поскольку картина течения антисимметрична относительно горизонтальной экваториальной плоскости, и осесимметрична относительно вертикальной оси, приведены результаты только для центрального сечения и одного первого квадрата.

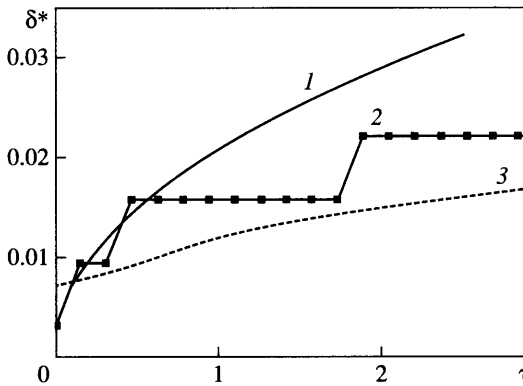
В картине линий тока, построенной по формулам (2.2) на сетке, представлена одна циркуляционная ячейка (фиг. 1, а). Жидкость движется вверх против часовой стрелки вдоль поверхности сферы, компенсируя дефицит солёности, вызванный прерыванием молекулярного потока на поверхности сферы и, отходя от нее, возвращается на исходный уровень плавучести, образуя замкнутую вихревую ячейку. Наибольшее значение тангенциальной компоненты скорости достигается в центральной части течения ($\vartheta = 45^\circ$). Распределение радиальной компоненты скорости (значение которой на этом временном интервале меньше тангенциальной) более сложное. Центр ячейки несколько смещен к горизонтали по отношению к биссектрисе первого координатного угла.

Результаты численного решения полной нелинейной системы (1.1) на сетке $1000 \times 360 \times 1$, $B_S = 5$, $h_{\min} = 0.75 \cdot 10^{-3}$ см для того же момента времени приведены на фиг. 1, б. Качественно, а непосредственное сравнение численных значений показывает, что и качественно, картины течения в центральной ячейке на фиг. 1, а и б совпадают. Со временем картина линий тока, построенная по формулам (2.2), качественно не меняется. Визуализация численного решения уравнений (1.1) показывает, что к моменту $t = T_b$ формируется вторая ячейка, располагающаяся над первой (фиг. 1, г, расчеты выполнены на сетке $480 \times 180 \times 1$, $B = 200$, $h_{\min} = 1.58 \cdot 10^{-3}$ см). Поля скоростей в соседних ячейках согласованы – выше и ниже разделяющей линии тока жидкость движется от тела. Следовательно, циркуляция в ячейках имеет разные знаки, жидкость в нижней ячейке движется по часовой стрелке, а в верхней – против. Картины течения в полях различных переменных не подобны: к моменту $t = T_b$ в поле возмущений солёности сформированы уже две полных и одна растущая ячейки (фиг. 1, в). Таким образом, примесь (солёность) не пассивная переменная задачи.

Различие в структурах полей возмущений солёности и вектора скорости, рассчитанных на сетке $1000 \times 360 \times 1$, $B_S = 5$, $h_{\min} = 0.75 \cdot 10^{-3}$ см, проявляется в картинах течения в



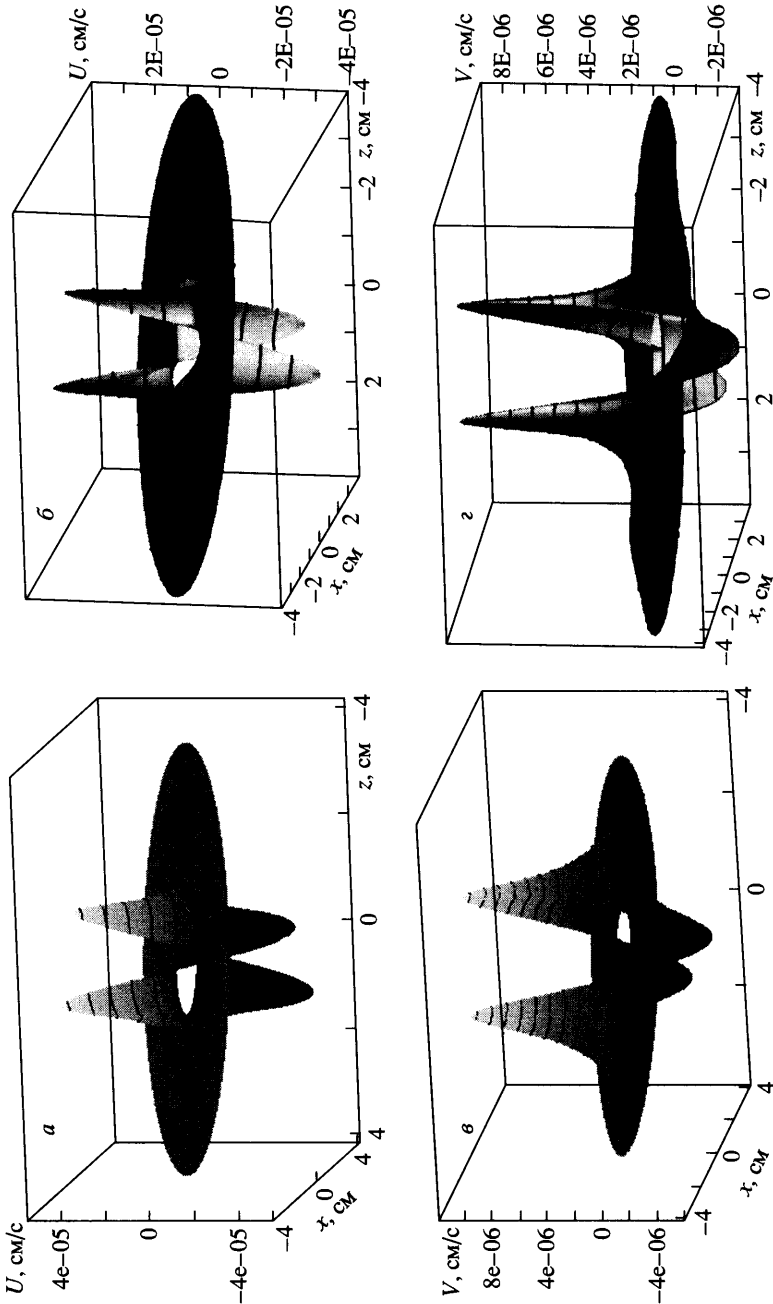
Фиг. 2. Тонкая структура течений вблизи поверхности сферы малого диаметра ($d = 2$ см, $T_b = 6.34$ с, $t = 0.5 \cdot T_b$, верхние и нижние точки поверхности соответствуют углам $\vartheta = 42, 48^\circ$): *a* – возмущения солёности, *б* – векторы скорости



Фиг. 3. Нормированная толщина ($\delta^* = \delta_l/R$) нарастающей части скоростного (1, 2) и плотностного (3) пограничных слоев в зависимости от $\tau = t/T_b$, $T_b = 6.34$ с: 1 – асимптотика малых времен, 2, 3 – численный расчет

непосредственной окрестности сферы, которые приведены в увеличенном масштабе на фиг. 2. Полная солёность на поверхности сферы удовлетворяет граничному условию непротекания, т.е. изолинии солёности подходят нормально к сфере, однако возмущения солёности монотонно спадают с удалением от непроницаемой поверхности. Скорость вначале монотонно растёт, достигает максимума на кромке области возмущения солёности, после чего плавно убывает с удалением от тела на масштабах, определяемых главным образом вязкостью среды.

Результаты асимптотических и численных расчетов, приведенные на фиг. 3, подтверждают вывод о близости толщин растущей части скоростного и полного плотностного пограничных слоев (вычисления проведены на расчетной сетке $240 \times 720 \times 1$, $B = 50$, $h_{\min} = 6.3 \times 10^{-3}$ см), что позволяет разрешить масштаб $\delta_s = 3.8 \cdot 10^{-3}$ см. Асимптотические оценки показывают, что на малых временах толщина скоростного пограничного слоя растёт степенным образом ($\delta^* \sim \sqrt{vt}/R$), что совпадает с результатами численного



Фиг. 4. Псевдоизометрическое изображение полей тангенциальной U (а, б) и радиальной V (в, г) компонент скорости индуцированного течения ($d = 2$ см, $T_b = 6.34$ с, $\tau = 1.58$) (а, в) – асимптотика малых времен, (б, г) – численный расчет

счета (кривые 1, 2 на фиг. 3) и несколько превышает толщину плотностного пограничного слоя (кривая 3). При $\tau > 1$ точность асимптотического расчета падает. Из численного решения следует, что со временем толщины нарастающей части скоростного

δ^* и полного плотностного δ_ρ пограничных слоев постепенно увеличиваются и стабилизируются при $\tau > 37$, достигая толщин $\delta^* \approx 2.9 \cdot 10^{-2}$ см и $\delta_\rho \approx 2.7 \cdot 10^{-2}$ см соответственно.

Степень соответствия аналитических и численных расчетов картины течения также иллюстрирует поведение тангенциальной и радиальной компонент скорости течения в окрестности сферы, псевдоизометрия которых приведена на фиг. 4. При построении изображения использована осевая симметрия течения. На рисунках представлены центральные сечения полей компонент скорости ($\varphi = 0, y = 0$), значения которых отложены по вертикальной оси.

Хотя расчетное время $\tau = 1.58$ превышает период плаучести, т.е. условие малости параметра теории возмущения формально не выполняется, асимптотический и численный расчеты дают сходные результаты. Картины течения близки количественно и качественно везде, за исключением областей, непосредственно прилегающих к внешней границе восходящих струй. Впадины на фиг. 4, б и г в визуализации численного решения указывают на наличие областей с противотечением, которые появляются и в расчетах установившихся течений [1, 4, 5, 8]. Тангенциальная компонента скорости достигает максимума в средних широтах ($\vartheta = 45^\circ$), радиальная компонента скорости – на полюсах ($\vartheta = 0, 180^\circ$). Вторичные максимумы радиальной компоненты скорости в окрестности центральной экваториальной плоскости ($\vartheta = 90^\circ$) по абсолютной величине значительно меньше главных максимумов у полюсов – точек конвергенции течения. Такие особенности обусловлены геометрией задачи, поскольку вовлечение жидкости в течение происходит по всей поверхности тела, а растекание струи происходит из компактной области над полюсами.

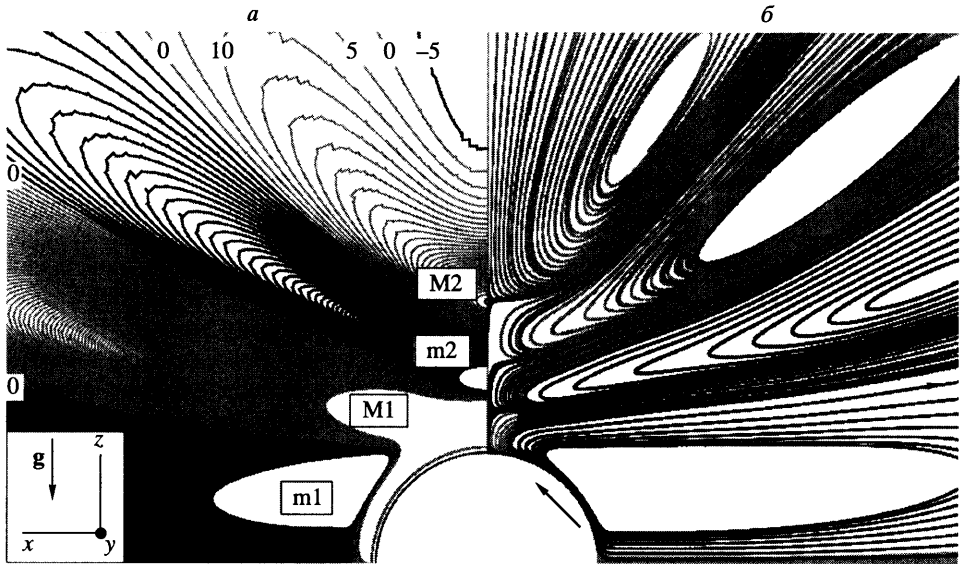
Таким образом, течение в окрестности сферы существенно неравномерно, область конвергенции струи и ее гравитационного раскрытия служит постоянно действующим локализованным источником нестационарных внутренних волн.

Со временем картина течения усложняется, однако и на более поздних стадиях остается выраженной центральной ячейка, к которой примыкают несколько различающихся по высоте вторичных циркуляционных ячеек. Нулевые линии возмущений, на которых происходит смена знака циркуляции, образуют периодическую коническую структуру с центром на вертикальной оси, проходящей через полюса тела. Наклон границ ячеек к горизонту со временем уменьшается, как и их вертикальный размер в окрестности оси симметрии. При $\tau = 2$ в поле возмущений солёности наблюдается четыре полных ячейки, в окрестности вертикальной оси появляется растущая пятая ячейка, о чем свидетельствует смена знака возмущений на изолиниях в левой части фиг. 5.

Положения областей максимальных возмущений солёности, которые с увеличением номера приближаются к вертикальной оси, отмечены точками $m1, M1, m2, M2$ (строчными буквами обозначены превышения, прописными – понижения относительно невозмущенного значения на данном горизонте).

Высота базовой ячейки определяется размерами сферы, к которой она примыкает. Направление движения в ней фиксировано – в окрестности экваториальной плоскости жидкость подтекает к телу, далее движется параллельно поверхности сферы к полюсам (т.е. всплывает или погружается в верхнем или нижнем полупространствах) и оттекает от сферы около полюсов. Со временем верхняя граница базовой ячейки выполаживается, скорость внутри ячейки медленно растет.

Амплитуда возмущений солёности быстро убывает с увеличением номера ячейки. Разделяющие ячейки линии нулевого уровня возмущений солёности и скорости на фиг. 5 расположены на разных уровнях и пересекают ось z на различных расстояниях от центра тела: при $\tau = 1, z = 1.03, 2.21$ см для солёности и 1.56 см для скорости соответственно; при $\tau = 1.58, z = 1.05, 1.57, 2.45$ см для солёности и 1.41, 1.93 см для скорости; при $\tau = 2, z = 1.04, 1.51, 2.10, 3.52$ см для солёности и 1.39, 1.85, 2.36 см для скорости. Различие



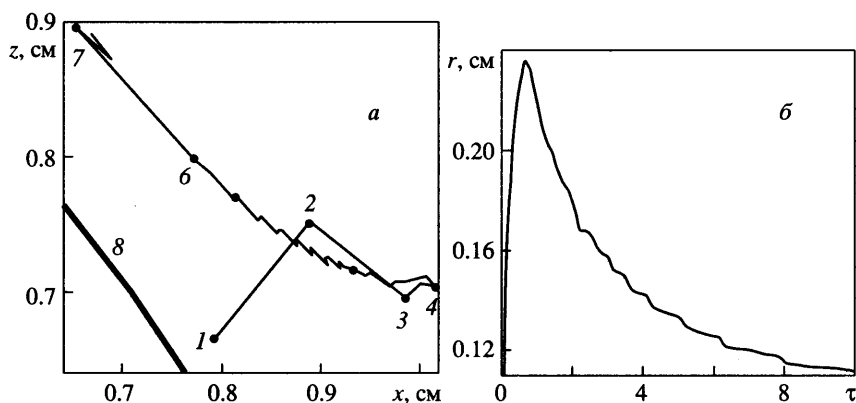
Фиг. 5. Карты изолиний возмущения солёности $S \cdot 10^{12}$ (а) и линий тока (б) в течении, индуцированном на сфере ($d = 2$ см, $T_b = 6.34$ с, $\tau = 2$)

в положении нулевых линий (границ ячеек) в полях солёности и скорости характерно для волновых процессов в стратифицированных средах.

Сравнение фиг. 1 и 5 между собой показывает, что наблюдаемые картины течения обладают свойствами, характерными для нестационарных внутренних волн, порождаемых короткодействующим компактным источником в однородно стратифицированной жидкости [15–17]. В частности, при $\tau = 1$ вторая ячейка занимает верхнюю половину квадранта (фиг. 1, 2), в дальнейшем она сплющивается под воздействием вновь образующихся ячеек (фиг. 5).

Волны образуются с периодичностью, определяемой стратификацией среды в окрестности вертикальной оси. Их число равно целой части отношения $n = [t/T_b]$. Групповая скорость этих волн направлена по радиус-вектору от эффективного центра волнообразования – полюса сферы, фазовая скорость – по нормали к ней. На больших удалениях от тела фазовые поверхности с постоянной угловой скоростью стремятся к горизонтальной плоскости, проходящей через центр волнообразования. Мгновенный центр формирования нестационарных внутренних волн, переносящих на большие расстояния информацию об особенностях рельефа, располагается на вершине зоны конвергенции течения, индуцированного диффузией, на полюсе сферы [9]. Аналогичный процесс генерации внутренних колебаний плотностным маркером – равномерно погружающимся следом за всплывающим газовым пузырьком или погружающимся кристаллом соли, используется для прямого измерения периода плавучести [18].

Свойства центральной и вышележащих ячеек существенно различны. Восходящее и нисходящее течения на сфере образуют подобие кольцевых вихрей с диффузной выпуклой внешней и вогнутой внутренней, непосредственно контактирующей со сферой, сторонами (фиг. 1, 5). Жидкость вовлекается в вихревые движения в окрестности экваториальной плоскости сферы и отходит в окрестности горизонтов полюсов. Линии нулевой скорости – центры вихрей – образуют окружности. В фазе формирования центры вихрей мигрируют вдоль сферы (фиг. 6, а), вначале быстро удаляясь от нее, а при $\tau > 0.5$, когда начинается формирование второй полуволны, меняют направление движения на



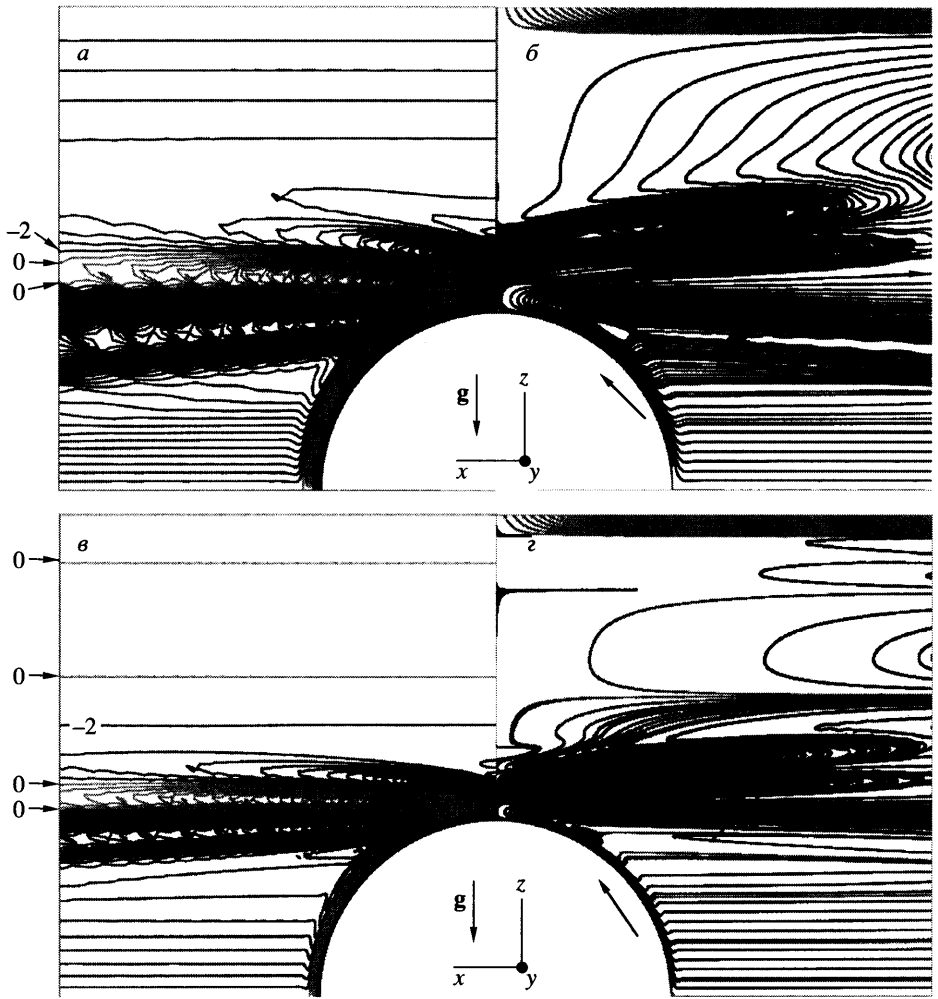
Фиг. 6. Положение центра вихря внутри базовой ячейки течения, индуцированного диффузией на сфере ($d = 2$ см, $T_b = 6.34$ с): a – в центральном сечении ($0.02 < \tau < 37$): 1–7 – $\tau = 0.02$; 0.16; 0.32; 0.63; 2.05; 12.8; 36.6; 8 – граница тела (верхняя и нижняя точки поверхности сферы соответствуют углами $\tau = 40, 50^\circ$); b – отстояние центра вихря от границы тела вдоль радиус-вектора в зависимости от τ

обратное. Спадающая кривая на интервале $\tau \in (0.63, 10)$ аппроксимируется степенной зависимостью $r = a\tau^{-b}$ ($a = 0.22$, $b = 0.3$), на которую наложены малые осцилляции с периодом плавучести (фиг. 6, б). При $\tau > 37$ положение центра базовой ячейки стабилизируется на расстоянии 0.112 см от поверхности сферы в точке с координатами $x = 0.665$, $z = 0.891$ см (фиг. 6, а). Таким образом, при $\tau > 37$ полная ширина скоростного пограничного слоя (0.112 см), спадающая внешняя часть которого определяется вязкостью, для водного раствора поваренной соли (и морской воды) в 4 раза превосходит толщину нарастающей части скоростного ($\delta^* \approx 2.9 \cdot 10^{-2}$ см) и полного плотностного ($\delta_s \approx 2.7 \cdot 10^{-2}$ см) пограничных слоев и примерно совпадает с теоретической толщиной вязкого пограничного слоя $\delta_N = 0.1$ см [6]. Расчеты выполнены на сетке $240 \times 720 \times 1$ ($B = 50$, $h_{\min} = 6.32 \cdot 10^{-3}$ см).

Таким образом, анализ результатов полного численного решения нелинейной задачи позволяет выявить существование возмущения, обусловленного локальной неоднородностью рельефа (топографией), на значительных удалениях от него в пространстве и выявить его волновую природу. Формирование картины течения, индуцированного диффузией вблизи сферы, приводит к видоизменению и стабилизации картины течения, которая отличается от наблюдаемой в режиме установления.

5. Картина установившегося течения. На больших временах, превышающих несколько десятков периодов плавучести, размеры и положение ячеек стабилизируются, как в поле солёности, так и в картине линий тока (фиг. 7, б, расчетная сетка $160 \times 60 \times 1$, $B = 50$, $h_{\min} = 6.32 \cdot 10^{-3}$ см). В картине линий тока в базовой ячейке к узкому восходящему течению примыкает значительно меньшая по величине нисходящая струя. Центр вихря располагается непосредственно у внешнего края пограничного течения на горизонте тонкоструктурных возмущений в поле солёности. К базовой ячейке примыкают две вторичных ячейки, с согласованными направлениями течения и чередующимися знаками циркуляции. В поле возмущений солёности в этой области также располагаются две ячейки толщиной $\delta_{\rho,1} = 2.2$ мм, формирующие тонкую высокоградиентную структуру среды (фиг. 7, а). Линии нулевого уровня для возмущений солёности ($z = 1.09$, 1.23 и 1.42 см) не совпадают и на больших временах с нулевыми линиями тока ($z = 1.17$, 1.32, 1.50 и 2.59 см).

Структура течения сохраняется при увеличении диаметра сферы. Поскольку здесь, как и в теории внутренних волн, выделенным является вязкий волновой масштаб $L_v = \sqrt[3]{g\nu/N}$ [19], на фиг. 7, в, г приведена картина течения, рассчитанная для сферы

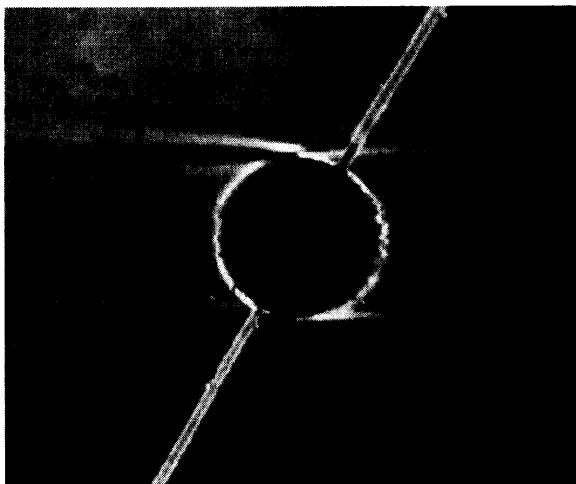


Фиг. 7. Картина установившегося течения, индуцированного диффузией на сфере малого и большого диаметра: *а, б* – $d = 2$ см, $\tau = 1662$; *в, г* – $d = 4$ см, $\tau = 1075$; *а, в* – картины возмущений солености $S \cdot 10^8$; *б, г* – линий тока, $T_b = 6.34$ с

большого диаметра $d = 4$ см $> L_v$ (для принятых условий $L_v = 2.2$ см). При этом высота базовой ячейки возрастает, к ней примыкают две вторичные ячейки несколько большего размера (высотой $\delta_{p,2} = 3.2$ мм, фиг. 7, б). С учетом изменения размера тела приведенные на фиг. 7 картины течений подобны. К базовой ячейке примыкают две тонкие протяженные волновые ячейки, формирующие тонкую структуру среды на сфере как большого ($d > L_v$), так и малого диаметра ($d < L_v$).

Линии нулевого уровня значимых возмущений солености располагаются на горизонтах $z = 2.09, 2.28, 2.48, 2.58$ см; а скорости – на $z = 2.19, 2.38, 2.56, 2.67, 2.83, 3.43$ см (фиг. 7, в, г). Таким образом, изменение размеров тела слабо влияет на высоту вторичных ячеек и толщину скоростного пограничного слоя, которые определяются стратификацией и диссипативными параметрами среды. Рассчитанные картины течений сохраняются при изменении параметров сетки.

В целом характер и динамика изменчивости структуры позволяют классифицировать вторичные ячейки как нестационарные внутренние волны, которые могут возникать



Фиг. 8. Теневая картина сформировавшегося течения, индуцированного диффузией, на покоящейся сфере ($d = 4.5$ см, $T_b = 7$ с)

под действием возмущений не только механической, но и термодинамической природы (диссипативно-гравитационные волны [20]).

Рассчитанные картины течения на больших временах согласуются с результатами теневой визуализации течений около неподвижных препятствий в лабораторных опытах. В теневой картине такого течения, приведенной на фиг. 8, представлены три практически горизонтальные полосы, примыкающие к полюсам тела (яркие наклонные линии – нити поддержки). Одна из полос – граница базовой ячейки, две другие, как и в расчете установившегося течения (фиг. 7), иллюстрируют вторичные циркуляционные ячейки волновой природы. Длина тонкоструктурных горизонтальных особенности растет с увеличением чувствительности метода регистрации. Тонкая структура полей солёности и температуры, как правило, регистрируется и около горных вершин в атмосфере и океане [2–4].

Заключение. Проведенные аналитические и численные расчеты выявили подобие свойств главной циркуляционной ячейки около непроницаемой для вещества сферы, в приближении малых времен. Непосредственно к сфере примыкает тонкий концентрационный пограничный слой, инициирующий восходящее течение. Полная ширина пограничного течения, включающая области нарастания и спадания скорости, определяется вязкостью и заметно (в четыре раза) превышает толщину нарастающей части скоростного и полную толщину плотностного пограничных слоев. Внешний край базовой ячейки диффузный. Зона конвергенции основного течения – источник внутренних волн, в фазе формирования течения – нестационарных, на больших временах – установившихся, типа диссипативно-гравитационных волн. Вторичные течения формируют тонкую структуру среды, искажающую исходный гладкий профиль распределения солёности вблизи и на больших расстояниях от тела. Рассчитанные картины течения на больших временах согласуются с результатами теневой визуализации течений около неподвижных препятствий в лабораторных опытах.

Несмотря на внешнее сходство, имеются принципиальные различия в картинах ячеистого течения, индуцированного диффузией около неподвижного препятствия, и многокомпонентной конвекцией около компактного источника [21]. Циркуляция в волновых ячейках знакопеременна, масштабы областей изменчивости скорости и солёности на границах близки между собой. Все конвективные ячейки вращаются в одну сторону, на их границах располагаются высокоградиентные прослойки с различными масштабами изменчивости скорости и плотности.

Таким образом, в средах с устойчивой стратификацией условие отсутствия движения выполняется только для двух типов ограничивающих поверхностей (бесконечных горизонтальных и вертикальных плоскостей). Около препятствия конечного размера всегда образуется течение, индуцированное диффузией, формирующее тонкую структуру среды и влияющее на перенос вещества.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 05-01-00496, 05-01-00154, 02-05-65383) и программы “Математическое моделирование” Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 520 с.
2. *Oerlemans J., Grisogono B.* Glacier winds and parameterization of the related heat fluxes // *Tellus*. 2002. V. 54a. P. 440–452.
3. *Thompson L., Johnson G.C.* Abyssal currents generated by diffusion and geothermal heating over rises // *Deep-Sea Res.* 1996. V. 43. № 2. P. 193–211.
4. *Garrett C., MacCready P., Rhines P.* Boundary mixing and arrested Ekman layers: rotating stratified flow near a sloping boundary // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1993. V. 25. P. 291–323.
5. *Phillips O.M.* On flows induced by diffusion in a stably stratified fluid // *DeepSea Res.* 1970. V. 17. № 3. P. 435–443.
6. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // *Докл. РАН.* 1992. Т. 325. № 4. С. 833–837.
7. *Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.* Пограничные течения, индуцированные диффузией около неподвижного горизонтального цилиндра в непрерывно стратифицированной жидкости // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана.* 1996. Т. 32. № 6. С. 818–823.
8. *Linden P.F., Weber J.E.* The formation of layers in a double-diffusive system with a sloping boundary // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 81. P. 757–773.
9. *Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура течения, индуцированного диффузией, около сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // *Докл. РАН,* 2005. Т. 401. № 5. С. 613–618.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. *Байдулов В.Г.* Общие свойства и тонкая структура течений непрерывно стратифицированной жидкости: Дис. ... канд. физ.-мат. н. М.: ИПМ РАН, 1999. 118 с.
12. *Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
13. *Гуцин В.А., Матюшин П.В.* Численное моделирование пространственных отрывных течений около сферы // *Ж. вычисл. математики и мат. физики.* 1997. Т. 37. № 9. С. 1122–1137.
14. *Gushchin V.A., Kostomarov A.V., Matyushin P.V.* 3D Visualization of the Separated Fluid Flows // *J. Visualization.* 2004. V. 7. № 2. P. 143–150.
15. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
16. *Теодорович Э.В., Городцов В.А.* О некоторых сингулярных решениях уравнений внутренних волн // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1980. Т. 16. № 7. С. 776–779.
17. *Чашечкин Ю.Д., Макаров С.А.* Нестационарные внутренние волны // *Докл. АН СССР.* 1984. Т. 276. № 5. С. 1246–1250.
18. *Смирнов С.А., Чашечкин Ю.Д., Ильиных Ю.С.* Высокоточный метод измерения профиля периода плавучести // *Измерит. техника.* 1998. № 6. С. 15–18.
19. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально-стратифицированной жидкости // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 1990. Т. 26. № 7. С. 744–754.
20. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Диссипативно-гравитационные волны в докритических режимах многокомпонентной конвекции // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2001. Т. 37. № 4. С. 513–519.
21. *Беляев В.С., Чашечкин Ю.Д.* Режимы свободной термоконцентрационной конвекции над локализованным источником тепла // *Изв. АН СССР, МЖГ.* 1989. № 2. С. 27–34.