

УДК 532.546

© 2007 г. В.М. ЕНТОВ, Е.М. ЧЕХОНИН

## ПОЛЕ ДАВЛЕНИЯ ВОКРУГ СКВАЖИНЫ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

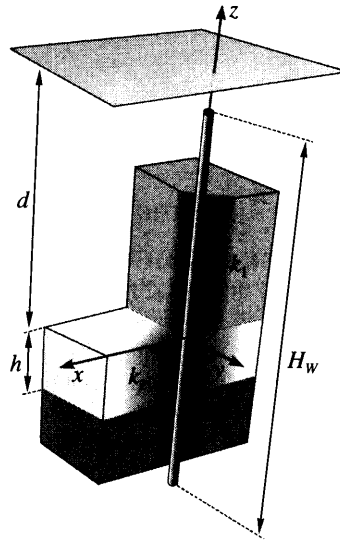
Рассматривается установившийся осесимметричный приток несжимаемой жидкости к гидродинамически совершенной по характеру вскрытия вертикальной скважине в слоисто-неоднородном полупространстве, состоящем из трех слоев различной проницаемости. Границы пластов предполагаются горизонтальными плоскостями, а кровля верхнего слоя непроницаема. Движение следует линейному закону фильтрации (закону Дарси). На скважине предполагается заданным распределение давления. Задание давления представляет собой основное препятствие к построению точного решения задачи. Начиная с классических работ Маскета и Чарного [1, 2], приближенное решение подобных задач строилось суперпозицией течений от точечных источников заданной интенсивности, распределенных вдоль оси скважины, причем это распределение задавалось достаточно простым. В данной работе этот же подход применяется для того, чтобы получить интегральное уравнение для распределения плотности источников, которое затем решается численно. Сравнение с известным точным решением для тонкого удлиненного эллипсоида (“иглы”) показывает, что такой подход позволяет получить точность, во всяком случае, достаточную для приложений.

*Ключевые слова:* слоисто-неоднородный пласт, осесимметричный приток к скважине.

Задача о притоке к несовершенной скважине, т.е. к скважине, вскрывающей продуктивный пласт не по всей его мощности, в силу ее важных приложений рассматривалась во множестве работ. Все они основаны на общей идее, восходящей к Маскету и Чарному, а именно задавать не распределение давления на скважине, а плотность источников, распределенных вдоль оси скважины. Таким образом, например, в [1] рассматривалась задача о несовершенной скважине в пласте, сложенном из двух пропластков разных проницаемостей, причем нижний пропласток считался полубесконечным. Методом разделения переменных получались основные элементарные решения, из которых синтезировалось конечное распределение потенциала. В [2] рассмотрена задача о притоке к одной необсаженной скважине с открытым забоем в центре кругового пласта. Поскольку распределение источников задается из общих соображений с малым числом свободных параметров, точность метода существенно зависит от удачного “угадывания” формы распределения, что в случае, например, слоистого пласта не тривиально.

Между тем современные вычислительные средства позволяют довести этот классический подход до логического завершения, рассматривая течение как суперпозицию течений от точечных источников, распределенных вдоль оси скважины с плотностью, подлежащей определению из условия на поверхности скважины. При этом максимально используется аналитический аппарат решения задач теории фильтрации и “тонкость” скважины по сравнению с прочими размерами задачи, порождающая основные трудности при прямом численном решении задачи.

Ниже рассматриваются два простых примера: приток к вытянутому эллипсоиду вращения в пространстве и приток к скважине конечной длины. Однако очевидно, что подход допускает обобщение на любую задачу, в которой явным образом выписывается решение для точечного источника, например, на течение вблизи горизонтальных и искривленных скважин.



Фиг. 1. Вертикальная несовершенная скважина с открытым забоем в слоисто-неоднородной среде

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим область фильтрации  $D$  с заданным граничным условием

$$A(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})\frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial n} = C(\mathbf{x}), \quad x \in \partial D \quad (1.1)$$

Предположим, что область  $D$  содержит скважину  $W$ , т.е. узкую “трубку” радиусом  $\rho(s)$  с осью  $\Omega: \{x = x(s)\}$ , где  $s$  – длина дуги, отсчитываемая вдоль кривой  $\Omega$ . Предполагается, что нормальное к оси сечение “трубки”  $W$  в точке  $s$  есть окружность радиуса  $\rho(s)$ , причем  $\max \rho(s) \ll L$ , где  $L$  – характерный размер области  $D$ , т.е. скважина предполагается “тонкой”. Задано распределение давления вдоль скважины

$$p|_{x = x + \mathbf{n}(s)\rho(s)} = P(s) \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к оси скважины. Ищется распределение давления в области  $D \setminus W$ , удовлетворяющее уравнениям теории фильтрации [1, 2]

$$\mathbf{u} = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu} \nabla p, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

с граничными условиями (1.1) и (1.2).

В частности, рассмотрим задачу о притоке к одной несовершенной скважине с открытым забоем (т.е. скважине, совершенной по характеру, но несовершенной по степени вскрытия) в слоисто-неоднородной среде. Вертикальная скважина  $W$  длиной  $H_w$  и радиусом  $r_w$  расположена вдоль оси  $z$  (фиг. 1). Предполагается, что средний пропласток мощности  $h$  имеет проницаемость  $k_2$ , а выше и ниже залегающие горные породы – проницаемости  $k_1$  и  $k_3$  соответственно. Тогда распределение давления в каждом пласте удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границах пластов должны выполняться условия сопряжения

$$p_1(0^+) = p_2(0^-), \quad k_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=0^+} = k_2 \frac{\partial p_2}{\partial z} \Big|_{z=0^-} \quad (1.4)$$

$$p_2(-h^+) = p_3(-h^-), \quad k_2 \frac{\partial p_2}{\partial z} \Big|_{z=-h^+} = k_3 \frac{\partial p_3}{\partial z} \Big|_{z=-h^-} \quad (1.5)$$

Здесь верхний индекс “+” означает предел сверху, индекс “-” – предел снизу. На свободной поверхности  $z = d$  должно выполняться условие непроницаемости:

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0 \quad (1.6)$$

На бесконечности давление должно стремиться к невозмущенному пластовому давлению, принятому за нуль,  $p_r = 0$ . Внутренней границей области течения является стенка скважины, на которой предполагается заданным распределение давления (в простейшем случае – постоянное давление).

Обозначим через  $q(z)$  поток жидкости через поверхность скважины в расчете на единицу высоты. В силу малости радиуса скважины течение в непосредственной окрестности ее локально является радиальным, а источники можно считать распределенными по оси скважины.

Если на скважине задан поток  $q(z)$ , то задача решается стандартными методами. Например, выражение для поля давления в каком-либо пропластке можно записать через функцию Грина для соответствующего пропластка

$$p_i(r, z) = \int_W g_i(r, z, \zeta) q(\zeta) d\zeta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.7)$$

где  $r$  – расстояние от оси скважины  $W$  в плоскости  $z = \text{const}$ ;  $g_i$  – функция Грина для  $i$ -го пропластка, описывающая течение, вызванное в  $i$ -м пропластке точечным источником единичной интенсивности, расположенным в точке  $z = \zeta$  на оси скважины.

Если на поверхности скважины задано давление  $p_w(z)$ , то сначала необходимо решить уравнение (1.7) (которое является уравнением Фредгольма 1-го рода), а затем использовать найденную функцию  $q(z)$  для расчета распределения давления.

## 2. Нахождение функции Грина. Рассмотрим уравнение

$$\Delta g_i = \delta(x, y, z - \zeta), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

с граничными условиями (1.4)–(1.6). Функция  $g$  Грина может быть найдена, например, с использованием интегрального преобразования Фурье:

$$G(\xi, \eta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} g dx dy, \quad g = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x - i\eta y} G d\xi d\eta$$

при этом уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2 G_i}{dz^2} - r^2 G = \delta(z - \zeta), \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

Решение однородного уравнения для  $i$ -го пропластка имеет вид

$$G_i = c_i^+ e^{-rz} + c_i^- e^{rz}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (c_3^+ = 0)$$

Используя условия на границе раздела пород с различными коллекторскими свойствами (1.4)–(1.5) и условие на свободной поверхности (1.6), получим 5 уравнений. При  $z \rightarrow \zeta$  искомое решение непрерывно, а производная по  $z$  меняется скачком на величину 1:

$$G|_{z=\zeta^+} = G|_{z=\zeta^-}, \quad \frac{dG}{dz}\Big|_{z=\zeta^+} - \frac{dG}{dz}\Big|_{z=\zeta^-} = 1$$

Решив полученную систему уравнений относительно неизвестных  $c_i^+$  и  $c_i^-$ , получим образ Фурье функции Грина для  $i$ -го пропластка, отвечающей точечному источнику в  $k$ -м пропластке, в виде

$$G_{ik} = -\frac{1}{2rs(r)} f_{ik}(r, z, \zeta)$$

$$s(r) = 1 - \alpha_{13}e^{-2rh} + \alpha_1e^{-2rd} - \alpha_3e^{-2r(h+d)}$$

$0 < z < d$ :

$$f_{11} = e^{-r|z-\zeta|} + e^{-r(2d-(z+\zeta))} - \alpha_1[e^{-r(2d-|z-\zeta|)} + e^{-r(z+\zeta)}] + \dots$$

$$\dots + \alpha_3[e^{-r(2h+z+\zeta)} + e^{-r(2(h+d)-|z-\zeta|)}] - \alpha_{13}[e^{-r(2(h+d)-(z+\zeta))} + e^{-r(2h+|z-\zeta|)}]$$

$$f_{12} = 2\alpha_{01}[e^{-r(z-\zeta)} + e^{-r(2d-(z+\zeta))}] + \alpha_3(e^{-r(2h+z+\zeta)} + e^{-r(2(h+d)-z+\zeta)})]$$

$$f_{13} = 4\alpha_{01}(1 - \alpha_{03})[e^{-r(z-\zeta)} + e^{-r(2d-(z+\zeta))}]$$

$-h < z < 0$ :

$$f_{21} = 2(1 - \alpha_{01})(\alpha_3[e^{-r(2h+z+\zeta)} + e^{-r(2(d+h)+(z-\zeta))}] + e^{-r(2d-(z+\zeta))} + e^{-r(\zeta-z)})$$

$$f_{22} = \alpha_1[e^{r(z+\zeta)} + e^{-r(2d+|z-\zeta|)}] + \alpha_3[e^{-r(2h+z+\zeta)} + e^{-r(2(h+d)-|z-\zeta|)}] + \dots$$

$$\dots + \alpha_{13}[e^{-r(2(d+h)+z+\zeta)} + e^{-r(2h-|z-\zeta|)}] + e^{-r(2d-(z+\zeta))} + e^{-r|z-\zeta|}$$

$$f_{23} = 2(1 - \alpha_{03})(\alpha_1[e^{-r(2d+(z-\zeta))} + e^{r(z+\zeta)}] + e^{-r(2d-(z+\zeta))} + e^{-r(z-\zeta)})$$

$z < -h$ :

$$f_{31} = 4\alpha_{03}(1 - \alpha_{01})[e^{r(z-\zeta)} + e^{-r(2d-(z+\zeta))}]$$

$$f_{32} = 2\alpha_{03}[e^{r(z-\zeta)} + e^{-r(2d-(z+\zeta))} + \alpha_1(e^{r(z+\zeta)} + e^{-r(2d-z+\zeta)})]$$

$$f_{33} = e^{-r|z-\zeta|} + e^{-r(2d-(z+\zeta))} + \alpha_1[e^{-r(2d+|z-\zeta|)} + e^{r(z+\zeta)}] - \dots$$

$$\dots - \alpha_3[e^{r(2h+z+\zeta)} + e^{-r(2(h+d)+|z-\zeta|)}] - \alpha_{13}[e^{-r(2(d-h)-(z+\zeta))} + e^{-r(2h+|z-\zeta|)}]$$

Величины  $f_{ik}$  зависят от комбинаций отношений проницаемостей, в связи с чем введем следующие безразмерные величины:

$$\alpha_i = \frac{1 - \gamma_i}{1 + \gamma_i}, \quad \gamma_i = \frac{k_i}{k_2}, \quad \alpha_{13} = \alpha_1\alpha_3, \quad \alpha_{0i} = \frac{1}{1 + \gamma_i}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$g_{ik} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{jk}(r, z, \zeta)}{rs(r)} e^{-i(\eta y + \xi x)} d\eta d\xi$$

При переходе к цилиндрическим координатам

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad \xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta$$

выражения для функции Грина значительно упрощаются: кратный интеграл принимает вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(r, z, z')}{s(r)} dr \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\theta - \vartheta)} d\theta$$

причем внутренний интеграл при помощи подстановки  $\cos \theta = \tau$  сводится к табличному и выражается через бесселеву функцию [3]. Окончательно имеем

$$g_{jk} = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{+\infty} J_0(r\rho) \frac{f_{jk}(r, z, \zeta)}{s(r)} dr, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

**3. Расчет поля давления.** Выражение для поля давления в  $i$ -м пропластке на расстоянии  $r$  (в плоскости  $z = \text{const}$ ) от скважины имеет вид (1.7), где

$$g_i(\rho, z, \zeta) = g_{ij}(\rho, z, \zeta) \frac{\mu}{k_j}, \quad \zeta \in W_j \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Здесь  $W_j$  – часть скважины  $W$ , находящаяся в  $j$ -м пропластке,  $g_{ij}$  – вычисляемая по (2.2) функция Грина для  $i$ -го пропластка, отвечающая точечному источнику, действующему в  $j$ -м пропластке.

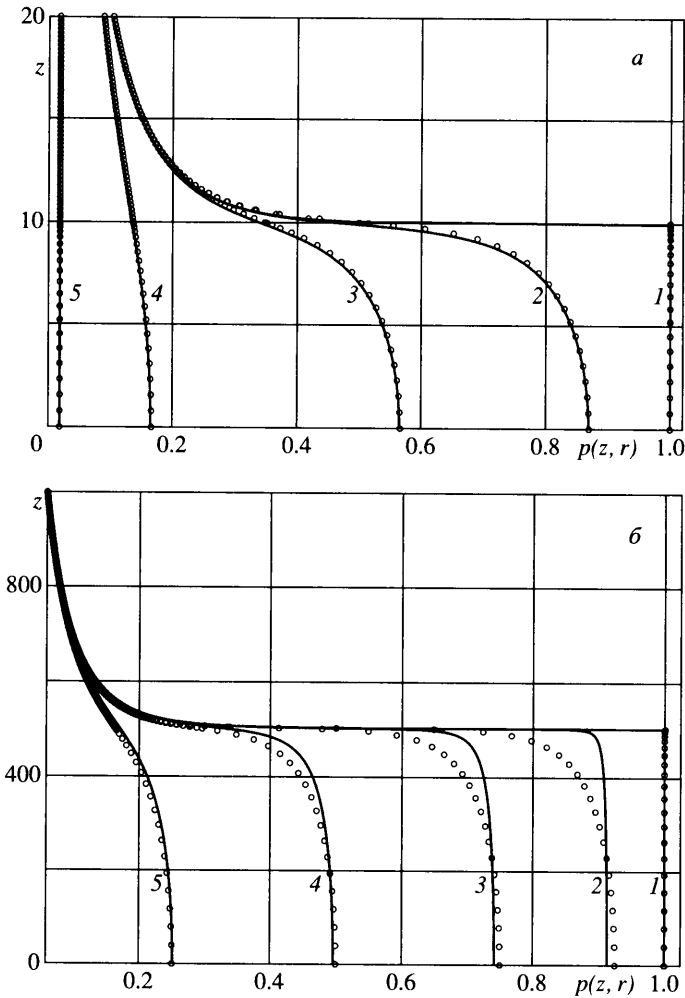
При заданном распределении давления выражение (1.7) есть уравнение Фредгольма первого рода. В общем случае решение такого рода уравнений есть некорректная задача, разрешимая лишь в ограниченном классе функций. В данной работе применялся следующий алгоритм численного решения, представляющий собой вариант метода граничных элементов [4]. Бралась равномерная сетка по  $z$  из  $N$  узлов. Интеграл (1.7) заменялся конечными суммами, вычисленными по значениям подынтегральных выражений в точках  $\zeta = z_i$ . Таким образом, для каждого узла согласно (3.1) вычислялась функция Грина. Далее, задав на скважине давление  $p(r_w, z_i) = p_w$ , приходим к системе из  $N$  уравнений относительно неизвестных  $q(z_i)$ , решение которой позволяет по формуле (1.7) рассчитать распределение давления в любой точке пласта.

**4. Сравнение с точным решением.** Для проверки эффективности решения интегрального уравнения рассмотрим случай однородной среды ( $k_i = \text{const}$ ) без свободной поверхности ( $d \rightarrow \infty$ ). При этом выражение (2.2) сводится к выражению для потенциала точечного источника в пространстве

$$g_{jk}(r, z, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}}$$

Рассмотрим “скважину” в виде узкого эллипсоида вращения с центром в начале координат и полуосями  $a, b, c$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a = b = r_w, \quad c = \frac{H_w}{2} \gg r_w \quad (4.1)$$



Фиг. 2. Распределение давления вдоль вертикали в случае однородной среды: сравнение точного решения для "иглы" (точки) с решением интегрального уравнения (сплошные кривые) для вытянутого эллипсоида (а); и (точки) для цилиндрической скважины (б)

В такой постановке исходная задача эквивалентна задаче о поле заряженного идеально проводящего эллипсоида (4.1), решение которой представляется эллиптическим интегралом [5, 6]

$$p(\xi) = A \int \frac{d\xi}{\xi \sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)}} + B$$

$$\xi = \frac{1}{4}(r^+ + r^-)^2 - c^2, \quad r^\pm = r^2 + (z \mp \sqrt{c^2 - a^2})^2$$

причем координатная поверхность  $\xi = 0$  соответствует поверхности эллипсоида. Учитывая, что на поверхности задано постоянное давление  $p_0$ , а на бесконечности поле должно исчезнуть, получим

$$p(\xi) = p_0 \int_{\xi}^0 [(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)]^{-1/2} d\xi$$

$$\left( \int_0^{\infty} [(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)(c^2 + \xi)]^{-1/2} d\xi \right)^{-1}$$

откуда, согласно (4.1), имеем

$$p(r, z) = \frac{p_0}{\operatorname{arth} \varepsilon} \operatorname{arth} \left[ \frac{\varepsilon H_w}{\sqrt{2}} (\theta + \sqrt{\theta^2 - (\varepsilon z H_w)^2})^{-1/2} \right]$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left( \frac{2r_w}{H_w} \right)^2}, \quad \theta(r, z) = z^2 + r^2 + \frac{(\varepsilon H_w)^2}{2}$$

где  $\operatorname{arth}$  – обратный гиперболический тангенс, а величина  $\varepsilon$  – эксцентриситет. Взяв равномерную сетку  $\{z_i\}_{i=1, \dots, N}$  с заданным шагом  $\Delta_z$ , поставим ей в соответствие множество точек  $(z_i, r_i)$  поверхности  $\Gamma$  эллипсоида (4.1), где

$$r_i = r_w \sqrt{1 - \left( \frac{2z_i}{H_w} \right)^2}, \quad i = 1, \dots, N$$

Задав на этом множестве постоянное давление, получаем систему уравнений для распределения плотности  $q$  источников, которая затем решается численно согласно алгоритму, описанному выше. По найденной функции  $q(z)$  рассчитывается распределение давления, которое сравнивается с точным решением для “иглы”.

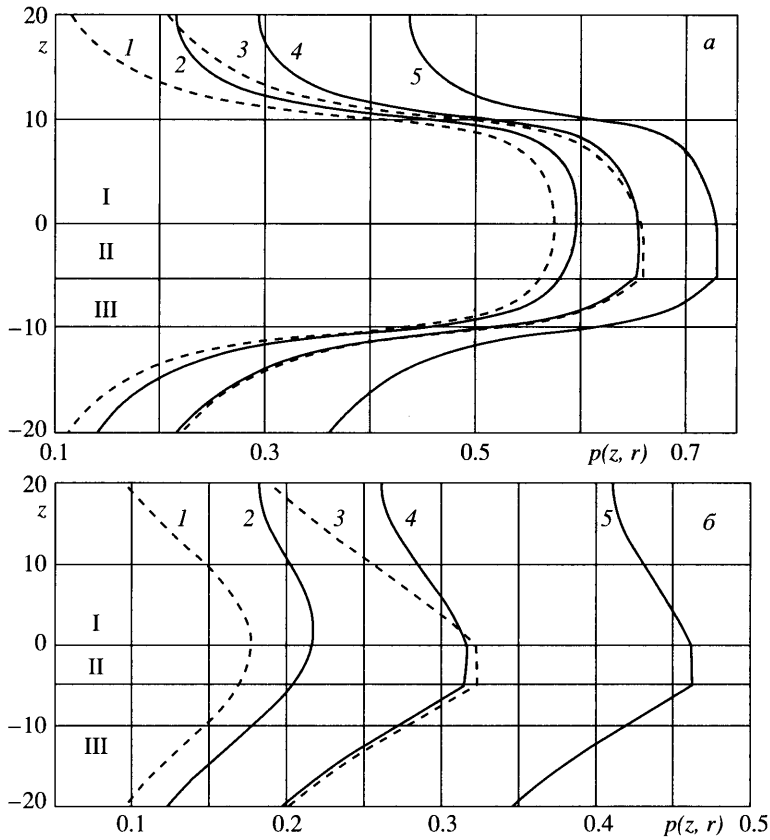
Графики распределения давления вдоль вертикали на различных расстояниях  $r$  от оси “скважины” в случае однородной среды приведены на фиг. 2. Сопоставление с точным решением показано на фиг. 2, а; очевидно, в данном случае численное решение практически совпадает с точным. Кривой 1 соответствует расстояние  $r = 0$  при  $|z| > H_w/2$ , а при  $|z| < H_w/2$  величина  $r$  выбирается соответственно точке на поверхности эллипсоида; кривой 2 соответствует расстояние  $r = 0.2$ ; 3 –  $r = 1$ ; 4 –  $r = 10$ ; 5 –  $r = 100$ . Для расчета бралась равномерная сетка из  $N = 200$  узлов с шагом  $\Delta_z = 0.1$  (м).

На фиг. 2, б точное решение для “иглы” сопоставлено с решением интегрального уравнения для тонкой цилиндрической скважины радиуса  $r_w = 0.1$  и длиной  $H_w = 1000$ , являющейся изобарой, соответствующей 1 атм. Для расчета в этом случае бралась равномерная сетка с шагом  $\Delta_z = 0.25$  (м) из  $N = 4000$  узлов.

На фиг. 3 приведены графики распределения давления вдоль вертикали на расстоянии  $r = 1$  (фиг. 3, а) и 10 м (фиг. 3, б) от оси  $z$  цилиндрической скважины как в случае однородной, так и в случае слоистой сред. Кривые 1, 2 соответствуют случаю  $k_i = 10^{-13}$  (м<sup>2</sup>), кривые 3, 5 – случаю  $k_1 = 10^{-13}$ ,  $k_2 = 10^{-12}$ ,  $k_3 = 10^{-14}$  (м<sup>2</sup>), 4 –  $k_1 = 10^{-14}$ ,  $k_2 = 10^{-12}$ ,  $k_3 = 10^{-13}$  (м<sup>2</sup>).

**Заключение.** Рассмотрен приток к вертикальной скважине конечной длины в однородной или слоистой среде. Течение строится как суперпозиция течений от точечных источников, распределенных вдоль оси скважины. Плотность источников определяется из условия равенства давления в скважине давлению, заданному на ее поверхности. Возникающее интегральное уравнение для распределения плотности источников решается численно.

В качестве эталона рассчитано течение в окрестности тонкого удлиненного эллипсоида в однородной среде, для которого имеется точное аналитическое решение. Сравнение показывает, что применяемый подход позволяет получить достаточную для приложений точность.



Фиг. 3. Распределение давления вдоль вертикали для однородной (кривые 1, 2), и в случае слоистой сред (кривые 3–5); кривые 1, 3 соответствует случаю  $d \rightarrow \infty$  (отсутствие свободной поверхности), кривые 2, 4, 5 – случаю  $d = 20$  м; кривые давления на расстоянии  $r = 1$  м от оси  $z$  (а),  $r = 10$  м (б)

Представлены подробные результаты расчета течений вблизи вертикальной скважины конечной длины в слоисто-неоднородном пласте, состоящем из трех пропластков разной проницаемости как при наличии свободной поверхности, так и вдали от нее.

Предполагается, что аналогичный подход может быть использован для решения широкого круга задач о притоке к скважинам в пластах сложного строения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 628 с.
2. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Ред. Э.И. Григолюк. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 661 с.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 604 с.