

УДК 532.526.2.532.135

© 2007 г. К.Б. ПАВЛОВ, А.П. ШАХОРИН

## К ВОПРОСУ О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ДИЛАТАНТНОЙ ЖИДКОСТИ

В дилатантных жидкостях скорость распространения сдвиговых возмущений конечна в отличие от ньютоновских и псевдопластических жидкостей, в которых эта скорость бесконечна [1]. Поэтому при определенных течениях дилатантных жидкостей в них могут образовываться фронтовые поверхности, разделяющие области с отличными от нуля сдвиговыми возмущениями от областей, в которых сдвиговые возмущения отсутствуют. Так как пограничный слой, в определенном смысле, представляет “развертку” во времени процесса распространения нестационарных сдвиговых возмущений, то в дилатантных жидкостях пограничный слой непременно должен быть пространственно локализован. Впервые на этот факт было указано в [2], где, однако, ошибочно утверждалось, что пространственная локализация пограничного слоя происходит не во всех дилатантных жидкостях: она отсутствует в частном случае так называемых “упрочняющихся” дилатантных жидкостях.

В [3] проведено качественное исследование решений уравнений теории ламинарного пограничного слоя псевдопластических и “упрочняющихся” дилатантных жидкостей. Обычно возникновение фронтовых поверхностей в потоках дилатантных жидкостей при математическом описании оказывается связанным с фактом существования особых решений соответствующих дифференциальных уравнений [4]. Однако вследствие неточного анализа, выполненного в [3], особые решения там не были обнаружены, на основании чего был сделан неправильный вывод об отсутствии пространственной локализации пограничного слоя в “упрочняющихся” дилатантных жидкостях.

Исследование, проведенное в [5], показало, что в действительности в случае упрочняющихся дилатантных жидкостей пространственная локализация пограничного слоя имеет место, так как существуют особые решения соответствующих дифференциальных уравнений. Впоследствии этот результат был воспроизведен в работе [6], где была также предпринята попытка качественного исследования решений уравнений ламинарного слоя в случае остальных типов дилатантных жидкостей. Не обнаружив в этом случае особых решений, автор сделал ошибочный вывод об отсутствии в таких жидкостях пространственной локализации пограничного слоя. Это недоразумение связано с тем, что в [6] не было принято во внимание, что математическое описание возникновения фронтовых поверхностей при течениях дилатантных жидкостей связано не только с существованием особых решений.

*Ключевые слова:* дилатантные, псевдопластические, неньютоновские жидкости, фронт, особое решение, фазовая плоскость.

**1.** Рассмотрим движение жидкости со степенным реологическим законом:

$$\sigma_{ij} = k(S_{\alpha\beta}S_{\beta\alpha})^{(n-1)/2}S_{ij} \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – девиатор тензора напряжений,  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформаций,  $k$  и  $n$  – реологические постоянные среды.

По принятой терминологии неньютоновские жидкости с  $n < 1$  называются псевдопластическими, с  $n > 1$  – дилатантными (дилатантные жидкости с  $1 < n < 2$  называются “упрочняющимися”). Случай  $n = 1$  соответствует ньютоновской вязкой жидкости.

Система уравнений, описывающая движение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом (1.1) в приближении теории пограничного слоя, записывается в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вводя функцию тока  $\psi(x, y)$  и переходя к автомодельной переменной  $\eta$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= U_\infty x \left[ \frac{n(n+1)}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x} \left[ \frac{\text{Re}_x}{n(n+1)} \right]^{1/(n+1)} \\ u(x, y) &= U_\infty f'(\eta), \quad v(x, y) = \frac{U_\infty}{n+1} \left[ \frac{n+1}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \\ \text{Re}_x &= \frac{\rho x^n U_\infty^{2-n}}{k} \end{aligned}$$

систему уравнений (1.2) запишем в виде одного уравнения

$$L f \equiv |f''|^{n-1} (f'''' + |f''|^{2-n} \text{sign}(f'')) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь штрихом обозначается производная по автомодельной переменной  $\eta$ . Ниже ограничимся рассмотрением только дилатантных жидкостей, т.е.  $n > 1$ .

При обтекании плоской полубесконечной пластины (задача Блазиуса) граничные условия имеют следующий вид:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (1.4)$$

При любых  $n > 1$  дифференциальный оператор  $L$  (1.3) по-существу представлен в форме произведения двух операторов:  $L = L_1 L_2$ , где

$$L_1 f \equiv f'''' + |f''|^{2-n} \text{sign}(f'') = 0 \quad (1.5)$$

$$L_2 f \equiv |f''|^{n-1} = 0 \quad (1.6)$$

Поэтому при  $n > 1$  решением уравнения (1.3) может быть либо решение  $f = f_1$  уравнения (1.5) или решение  $f = f_2$  уравнения (1.6), либо “склеенная” комбинация этих решений.

Решение  $f = f_1(\eta, c_1, c_2, c_3)$  содержит три константы, решение  $f = f_2(\eta; c_4, c_5)$  – две

$$f_2(\eta, c_4, c_5) \equiv c_4 \eta + c_5 \quad (1.7)$$

В частности, решение задачи Блазиуса при  $n > 1$  “склеено” из функций  $f_1$  и  $f_2$  в точке  $\eta = \eta_* - \text{const}$

$$\begin{aligned} f(\eta) &= f_1(\eta) \quad 0 \leq \eta \leq \eta_*; \quad f_2(\eta) \quad \eta_* \leq \eta < \infty \\ \eta &= \eta_*: f_1(\eta_*) = f_2(\eta_*), \quad f_1'(\eta_*) = f_2'(\eta_*), \quad f_1''(\eta_*) = f_2''(\eta_*) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из условий (1.4) и (1.8) определяются константы  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \eta_*$ . Положение фронтальной поверхности  $y_* = y(x_*)$ , ограничивающей области локализации сдвиговых возмущений в пограничном слое, определяется выражением

$$y_* = \eta_* \left[ \frac{n(n+1)}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} x$$

Существенно, что (1.7) является решением уравнения (1.3) при любых  $n > 1$ .

2. С помощью последовательного применения методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений удастся показать, что пространственная локализация пограничного слоя может иметь место для всех без исключения типов дилатантных жидкостей. При этом представляется возможным классифицировать все решения уравнения (1.3), в частности, решение задачи Блазиуса ( для случая ньютоновских жидкостей это было показано в работе [7].)

Так как уравнение (2.3) допускает двухпараметрическую группу растяжения и сдвига  $L: (\eta, f(\eta)) \rightarrow (a\eta + b, a^{(2n-1)/(n-2)} f(a\eta + b))$ , то исходная краевая задача может быть сведена к начальной, и при этом преобразовано уравнение (1.3). Инфинитезимальный оператор дважды расширенной группы инвариантных преобразований  $L''$  уравнения (1.3) имеет вид [3]

$$X = \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left( \frac{2n-1}{n-2} \right) f \frac{\partial}{\partial f} + \left( \frac{n+1}{n-2} \right) f' \frac{\partial}{\partial f'} + \left( \frac{3}{n-2} \right) f'' \frac{\partial}{\partial f''}$$

причем инварианты этой группы  $p$  и  $q$

$$p = \frac{f''}{|f|^{3/(2n-1)}}, \quad q = \frac{f'}{|f|^{(n+1)/(2n-1)}} \tag{2.1}$$

Используя инварианты (2.1), уравнение (1.3) при  $n > 1$  можно преобразовать к уравнению

$$|p|^{n-1} \left[ \frac{dp}{dq} - \frac{p[(2n-1)|p|^{1-n} + 3q]}{(n+1)q^2 \text{sign}(f) - (2n-1)p} \right] = 0 \tag{2.2}$$

Решением уравнения (2.2) является алгебраический корень, а также частные решения дифференциального уравнения

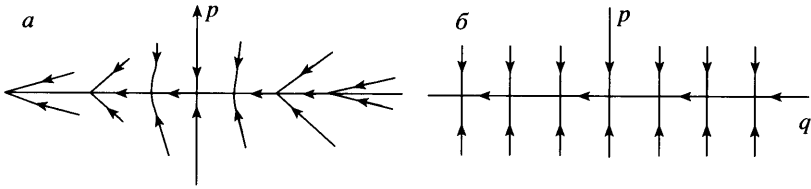
$$p = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p[(2n-1)|p|^{1-n} + 3q]}{(n+1)q^2 \text{sign}(f) - (2n-1)p} \tag{2.4}$$

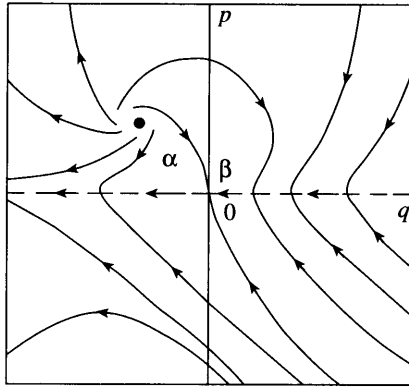
Каждому решению уравнения (2.4) соответствует класс связанных с группой  $L$  решений уравнения (1.3), которые получаются двумя квадратурами:

$$\eta = \int \frac{df}{q|f|^{(n+1)/(2n-1)}}, \quad f = \exp \left( \int \frac{q dq}{(2n-1)p \text{sign}(f) - (n+1)q^2} \right)$$

Для качественного представления решений уравнения (2.4) воспользуемся двухлистной фазовой плоскостью  $(p, q)$ , один из листов которой соответствует положительным значениям функции тока  $f$ , другой – отрицательным. В силу инвариантности уравнения (1.3) относительно преобразования  $(\eta, f) \rightarrow (-\eta, -f)$  интегральным кривым на двухлистной фазовой плоскости  $(p, q)$  соответствуют такие же кривые на плоскости



Фиг. 1. Поведение траекторий вблизи  $p = 0$ ;  $a - n = 2$ ,  $b - n > 2$



Фиг. 2. Поведение траекторий вблизи особых точек с конечными координатами ( $n > 2$ )

$(-p, q)$  с изменением направления движения вдоль кривой. На фазовой плоскости  $(p, q)$  уравнение (2.4) при  $n \geq 2$  имеет пару особых точек  $\alpha(f > 0)$  и  $\alpha'(f < 0)$  с координатами

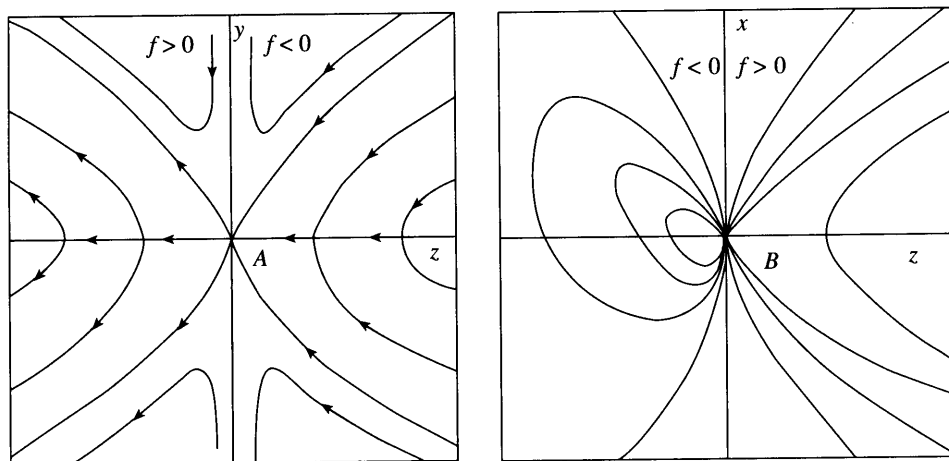
$$p_\alpha = [1/9(2n^2 + n - 1)]^{1/(2n-1)}, \quad q_\alpha = 1/3(1 - 2n)p_\alpha^{1-n}$$

$$p_{\alpha'} = -p_\alpha, \quad q_{\alpha'} = q_\alpha$$

классифицируемые как неустойчивый и устойчивый фокус соответственно [5]. Других особых точек с конечным значением координат в случае дилатантных жидкостей  $n \geq 2$  на фазовой плоскости  $(p, q)$  не существует.

Между тем в [6] ошибочно указывается на существование в случае  $n \geq 2$  еще одной пары особых точек  $\beta(f > 0)$  и  $\beta'(f < 0)$  с координатами  $p = 0, q = 0$ . Это недоразумение – следствие ошибок, допущенное в [6] при построении траекторий на фазовой плоскости  $(p, q)$  вблизи  $p = 0$  для  $n \geq 2$ . Действительное расположение траекторий, соответствующих решениям уравнения (2.4), на плоскости  $(p, q)$  на листах с  $f > 0$  при  $p \rightarrow \pm 0$  представлено на фиг. 1; все указанные траектории при  $p > 0$  и при  $p < 0$  заканчиваются в точках прямой  $p = 0$ .

Учитывая это, а также характер особых точек  $\alpha$  и  $\alpha'$  на фиг. 2 показаны траектории с конечным значением координат на фазовой плоскости  $(p, q)$  для дилатантных жидкостей с  $n \geq 2$ . Здесь представлены траектории, соответствующие всей совокупности решений уравнения (2.2); они состоят из траекторий, изображающих решение уравнения (2.4), на которые наложена прямая  $p = 0$  (2.3), соответствующая алгебраическому корню уравнения (2.2). Именно это обстоятельство позволяет при необходимости рассматривать “склеенные” решения, содержащие прямую  $p = 0$  (3.3). При этом в точке “склеивания” имеет место слабый разрыв функции  $f$ , т.е. в потоке дилатантной жидкости образуется фронтальная поверхность.



Фиг. 3. Топологическая структура особых точек на бесконечности

Таким образом, феномен пространственной локализации пограничного слоя имеет место во всех без исключения дилатантных жидкостях ( $n > 1$ ).

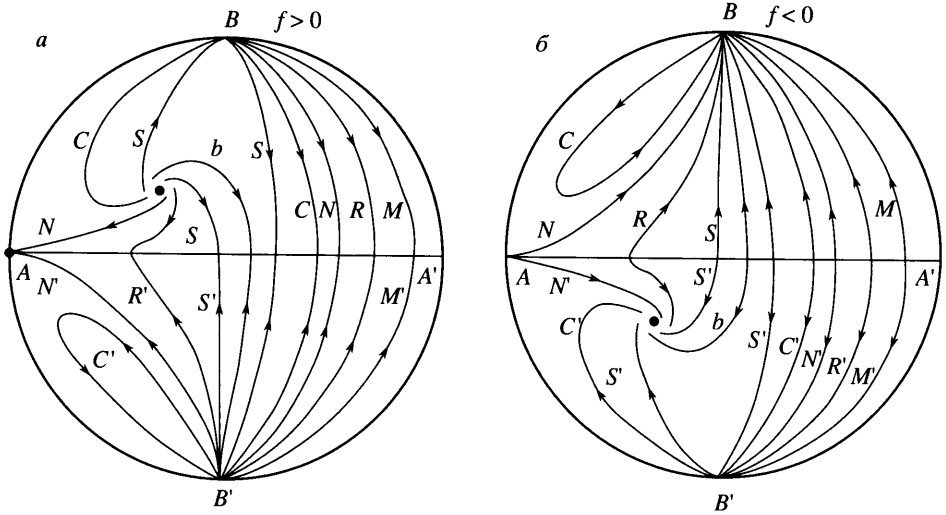
3. Для полной классификации всей совокупности решений задач теории ламинарного пограничного слоя в неньютоновской дилатантной жидкости рассмотрение, проведенное в п. 2, необходимо дополнить исследованием поведения интегральных кривых уравнения (2.4) на большом расстоянии от начала координат. Результаты такого исследования для  $1 < n < 2$  были получены в [5] с использованием методики, изложенной в [8]; аналогичные результаты могут быть получены и для  $n \geq 2$ . Не повторяя детали соответствующего рассмотрения, содержащиеся в [5], отметим, что уравнение (2.4) на бесконечности имеет две особые точки  $A$  и  $B$ . На проективной плоскости  $RP^2$ , отнесенной к однородным координатам  $X, Y, Z$ , положение этих точек:  $A(1, 0, 0)$  и  $B(0, 1, 0)$ . Точки проективной плоскости, не лежащие на прямой  $Z = 0$ , снабдим декартовыми координатами  $x = X/Z, y = Y/Z$  [8].

Результаты численных расчетов при  $n \geq 2$  показывают, что особая точка  $A$  является седлом (фиг. 3, а); особая точка  $B$  – сложное состояние равновесия и классифицируется как седло-узел (фиг. 3, б).

При  $n > 1$  топологическая структура особых точек  $A$  и  $B$  практически не зависит от конкретных значений параметра  $n$ , тем более не изменяется их тип. Аналогичное рассмотрение, выполненное в [6], не выявило этот факт, что и привело в результате к неправильному изображению траекторий при  $n = 2$  и  $n > 2$ ; как следствие этого при  $n \geq 2$  в [6] отсутствуют траектории, соответствующие задаче Блазиуса.

Для изображения полной фазовой картины всех решений уравнения (2.2) (т.е. траекторий, соответствующих решениям уравнения (3.4) и алгебраическому  $p = 0$  (3.3)) отождествим проективную плоскость  $RP^2$  с замкнутым кругом  $\Omega$  со склеенными диаметрально противоположными точками границы  $A(A')$  и  $B(B')$ . На фиг. 4 представлены все решения уравнения (2.2), откуда следует, что существует четыре типа траекторий.

К первому типу относятся траектории, находящиеся между сепаратрисами  $s, s_0 (s', s'_0)$ , соединяющие особую точку  $\alpha(\alpha')$  с алгебраическим корнем уравнения (2.2)  $p = 0$ , целиком располагающиеся на листе  $f > 0 (f < 0)$  (фиг. 4); второй тип – траектории, находящиеся между сепаратрисами  $s, N (s', N')$ , соединяющие особую точку  $\alpha(\alpha')$  с прямой  $p = 0$  на листе  $f > 0 (f < 0)$ , проходящие через особую точку  $B(B')$  на лист  $f < 0 (f > 0)$  и возвращающиеся через  $B(B')$  на лист  $f > 0 (f < 0)$ ; третий тип – траектории, располагающиеся между



Фиг. 4. Отображения обоих листов фазовых плоскостей на круг, полученные с предварительным отображением плоскостей на нижнюю полусферу Пуанкаре ( $n > 2$ ): а -  $f > 0$ , б -  $f < 0$

сепаратрисами  $N, s_0 (N', s'_0)$ , находящимися в пределах одного листа  $f > 0 (f < 0)$ , соединяющие особую точку  $\alpha (\alpha')$  с прямой  $p = 0$ ; четвертый тип траекторий – траектории, начинающиеся на прямой  $p = 0$  лист  $f < 0 (f > 0)$ , проходящие через точку  $B(B')$  и заканчивающиеся на прямой  $p = 0$  лист  $f > 0 (f < 0)$ .

Траектории первого и второго типа описывают обтекание полубесконечной пластины потоком дилатантной жидкости с различными условиями на поверхности пластины (пористая пластина). В частности, траектория  $s(s')$  соответствует решению задачи Блазиуса. Третий и четвертый тип интегральных кривых описывает слой смешения. В частности, траектории типа  $R(R')$  соответствуют задаче о слое смешения встречных потоков (отметим, что в случае ньютоновской жидкости  $n = 1$  траекторий, соответствующих такой задаче, не существует [7].)

Отметим, что при  $1 < n < 2$  (упрочняющиеся дилатантные жидкости) алгебраический корень уравнения (2.2)  $p = 0$  совпадает с особым решением дифференциального уравнения (2.2). Именно поэтому для установления факта пространственной локализации пограничного слоя дилатантных жидкостей с  $1 < n < 2$  достаточно ограничиться проведением исследования решений дифференциального уравнения (2.4) [5.6]. Между тем  $n > 2$  дифференциальное уравнение (2.4) не имеет особого решения, и для полного рассмотрения соответствующей проблемы необходимо исследование всех решений уравнения (2.2), включая его алгебраический корень. Таким образом, проведенное рассмотрение подтвердило факт конечности скорости распространения сдвиговых возмущений в любых дилатантных жидкостях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов К.Б. К теории пограничного слоя неньютоновских нелинейно-вязких сред // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 26–33.
2. Acrivos, Shah M.J., Petersen E.E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-Newtonian fluids past external surface // A. I. ch. E. Journal. 1960. V. 6. № 2. P. 312–317.

3. Жижин Г.В., Уфимцев А.А. О течениях в плоском ламинарном пограничном слое дилатантных жидкостей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 164–167.
4. Павлов К.Б. Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла // ПМТФ. 1973. № 5. С. 96–101.
5. Павлов К.Б., Федотов И.А., Шахорин А.П. О структуре ламинарного пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 142–145.
6. Жижин Г.В. Ламинарный пограничный слой неньютоновских жидкостей (качественное исследование) // ПМТФ. 1987. № 3. С. 71–81.
7. Casal P. Sur l'ensemble des solution de l'equation de la couche limite // J. Mec. 1972. V. 11. № 3. P. 459–469. (Казаль П. О совокупности решений уравнения пограничного слоя // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1974. № 4. С. 71–79.)
8. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.

Москва

Поступила в редакцию  
30.III.2006