

УДК 532.5 : 534.3 + 534.315

© 2007 г. С.В. ГУВЕРНЮК, Г.Я. ДЫННИКОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ ВЯЗКИХ ВИХРЕВЫХ ДОМЕНОВ

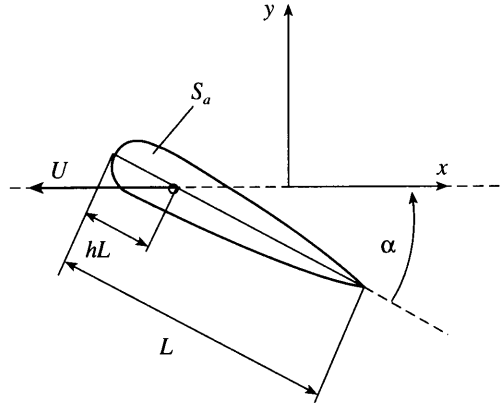
Лагранжев вихревой метод решения уравнений Навье – Стокса применен для численного моделирования нестационарного обтекания крылового профиля при его угловых колебаниях в потоке вязкой несжимаемой жидкости. Выведены формулы, связывающие нестационарные нагрузки на профиль с полем завихренности. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными для профиля NASA-0012, совершающего гармонические колебания в потоке воздуха при числе Рейнольдса $Re = 4.4 \cdot 10^4$.

Ключевые слова: вязкая жидкость, нестационарные течения, колеблющийся профиль, лагранжевы вихревые методы.

Явление резкого увеличения подъемной силы при нестационарном движении колеблющегося профиля представляет собой актуальную практическую и фундаментальную проблему. Оно может быть причиной дополнительных переменных нагрузок на несущих поверхностях маневренных самолетов, на вращающихся лопастях вертолетов и компрессоров, а также на машущих крыльях живых существ и механических устройств. При достаточно больших амплитудах и частотах колебаний стадия уменьшения угла атаки сопровождается возникновением мощного вихря с подветренной стороны профиля [1]. Этот вихрь временно приводит к значительному увеличению подъемной силы, а затем сносится в спутный след. Для правильного понимания данного процесса и получения возможности управления его ходом необходимо адекватное численное моделирование нестационарных отрывных течений. В настоящее время на роль такого метода, по-видимому, может претендовать прямое численное моделирование (решение трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса). Однако использование его требует очень больших вычислительных ресурсов.

Обычные инженерные методы численного анализа, основанные на решении уравнений Рейнольдса, хотя и могут при удачном выборе модели турбулентности давать соответствующие экспериментам результаты, но необходимость этого выбора снижает ценность метода в отношении его предсказательных возможностей. В частности, детали нестационарного процесса, необходимые для создания средств управления, могут оказаться затушеванными. То же самое можно сказать и в отношении широко распространенных вихревых методов, основанных на решении уравнений Эйлера (методов дискретных вихрей и т.п.), поскольку их применение связано с необходимостью априорного задания местоположения отрывов или с дополнительными предположениями о структуре пограничного слоя на теле.

В данной работе предпринята попытка моделирования нестационарного обтекания колеблющегося профиля методом “вязких вихревых доменов” [2, 3], представляющим собой численный метод решения двумерных уравнений Навье–Стокса в лагранжевых координатах с использованием идеи “диффузионной скорости” [4, 5]. Кроме того, даются уточнения и исполнения используемого метода, выводятся формулы для вычисления нестационарных напряжений на поверхности тела в вязкой жидкости через распределение завихренности в окружающем пространстве.



Фиг. 1. Схема движения крылового профиля

1. Постановка задачи. Рассматривается плоское нестационарное движение крылового профиля в неограниченном пространстве, заполненном первоначально покоящейся вязкой несжимаемой жидкостью. Течение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) + \nu \Delta \mathbf{V} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{V}$$

Закон движения профиля относительно абсолютной декартовой системы координат x, y задан соотношениями

$$\frac{dx_0}{dt} = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ -U, & t > 0; \end{cases} \quad \frac{dy_0}{dt} = 0$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1, & t \leq 0 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \cos(2\pi ft), & t > 0 \end{cases}$$

Здесь x_0, y_0 – декартовы координаты оси O , вокруг которой профиль S_a совершает угловые колебания; t – время, α – текущий угол между хордой и осью x , U – величина поступательной составляющей скорости крыла, α_0 – средний угол атаки, α_1 – амплитуда угловых колебаний около среднего значения α_0 , f – круговая частота колебаний, L – длина хорды профиля, h – относительное расстояние от передней кромки до оси качения; C – замкнутый контур – граница профиля S_a (фиг. 1). В рассматриваемом плоском движении вектор скорости \mathbf{V} параллелен, а вектор завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярен плоскости x, y . Давление p определено с точностью до произвольной постоянной (будем полагать $p = 0$ в бесконечности), плотность ρ и кинематический коэффициент вязкости ν всюду постоянны.

Начальные условия – покой во всем пространстве x, y . На контуре C задается граничное условие прилипания $\mathbf{V} = \mathbf{V}_C$, в бесконечности – стремление возмущений всех величин к нулю. В задаче имеется пять безразмерных параметров

$$\alpha_0, \alpha_1, h, k = \pi L f / U, \quad \text{Re} = LU / \nu$$

Далее используются безразмерные переменные, в качестве характерных масштабов длины и скорости взяты L и U , время отнесено к L/U , давление и другие напряжения – к ρU^2 .

Из (1.1) вытекает уравнение переноса завихренности [6]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \text{rot} \left(\mathbf{V} \times \Omega + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{V} \right)$$

которое с помощью определения “диффузионной скорости” \mathbf{V}_d для плоских течений, согласно [4, 5], может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \text{rot}((\mathbf{V} + \mathbf{V}_d) \times \Omega), \quad \mathbf{V}_d = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\nabla \Omega}{\Omega} \quad (1.2)$$

где Ω – единственная ненулевая компонента вектора Ω .

В идеальной жидкости циркуляция скорости остается постоянной на “жидких” контурах, движущихся со скоростью среды \mathbf{V} (теорема Гельмгольца), однако в вязкой жидкости это, как правило, не так. Тем не менее из (1.2) следует, что если движение вязкой жидкости остается плоскопараллельным, то и в этом случае существуют контуры с аналогичным свойством сохранения постоянной циркуляции в процессе движения, а именно циркуляция скорости остается постоянной на контурах, все точки которых движутся со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$.

Из (1.1)–(1.2) также имеем выражение для давления в виде

$$\nabla p = \mathbf{V}_d \times \Omega - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad (1.3)$$

Основная проблема состоит в отыскании нестационарного поля завихренности в окружающем профиль S_a двумерном пространстве S . Поле скоростей восстанавливается по полю завихренности с помощью известных интегральных представлений [6, 7], а соответствующие выражения для нахождения сил давления и напряжений трения на теле получены ниже, в разд. 4.

В сопутствующей системе координат x_a, y_a ($x_a = x + Ut, y_a = y$), связанной с осью качения O (фиг. 1), имеем обращенное движение, в котором жидкость движется, а крыло совершает чисто угловые колебания в потоке жидкости. С некоторого момента времени после начала колебаний обтекание профиля будет приближаться к квазипериодическому, подобно аналогичному обтеканию в аэродинамической трубе, что позволяет проводить соответствующее сравнение с экспериментальными данными.

2. Метод численного решения. Общая схема вычислительного алгоритма в методе вязких вихревых доменов состоит в следующем. Область S_a внутри профиля моделируется жидкостью, движущейся вместе с профилем как твердое тело, т.е. с завихренностью, равной 2ω , где ω – угловая скорость движения профиля. Для моделирования генерации завихренности поверхностью тела в вязкой жидкости, на каждом шаге по времени вблизи контура обтекаемой поверхности вводится дискретный набор вихревых областей с циркуляциями, обеспечивающими выполнение условия непротекания на контуре тела. Далее эти вновь рожденные вихревые области перемещаются как лагранжеры частицы со скоростью $\mathbf{V} + \mathbf{V}_d$, а присоединенная завихренность на контуре остается равной нулю, благодаря чему скачок скорости на поверхности тела отсутствует и автоматически поддерживается граничное условие прилипания. Аналогичный подход применяется в методе диффузионной скорости [4]. Однако в методе вязких вихревых доменов преодолен ряд существенных недостатков, имевших место в [4]. В частности, найден способ вычисления диффузионной скорости \mathbf{V}_d , обеспечивающий в отличие от [4] ее корректное определение вблизи обтекаемой поверхности. Также преодолены

проблемы, связанные с принятой в [4] аппроксимацией поля Ω суммой Гауссовых распределений с фиксированным радиусом.

Вычисление градиента поля завихренности, входящего в формулу (1.2) для диффузионной скорости \mathbf{V}_d – весьма сложная процедура для лагранжевых методов. Здесь используется интегральное представление [3], основанное на том, что любую гладкую скалярную функцию $\Omega(\mathbf{r})$, заданную на плоскости, можно выразить в виде

$$\Omega(\mathbf{R}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{I} \int_S \Omega(\mathbf{r}) e^{-\xi} d\mathbf{r}', \quad I = \int_S e^{-\xi} d\mathbf{r}' \quad (2.1)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad d\mathbf{r}' = dx' dy', \quad \xi = \frac{r'}{\varepsilon}$$

В самом деле, при подстановке разложения функции

$$\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{R}) + \mathbf{r}' \nabla \Omega(\mathbf{R}) + O(r'^2)$$

под знак интеграла в (2.1), получим

$$\frac{1}{I} \int_S \Omega(\mathbf{R}) e^{-\xi} d\mathbf{r}' = \Omega(\mathbf{R}) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{I} \int_S (\mathbf{r}' \nabla \Omega(\mathbf{R})) e^{-\xi} d\mathbf{r}' = \varepsilon \nabla \Omega(\mathbf{R}) \frac{1}{I} \int_S \xi e^{-\xi} d\mathbf{r}'$$

Отношение интегралов в правой части (2.2) ограничено (более того, можно показать, что в точках \mathbf{R} , не лежащих на контуре, оно стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$), откуда следует (2.1).

На основании (2.1) можно записать

$$\frac{\nabla \Omega(\mathbf{R})}{\Omega} \approx \int_S \Omega(\mathbf{r}) \frac{\xi}{r'} e^{-\xi} d\mathbf{r}' \left[\int_S \Omega(\mathbf{r}) e^{-\xi} d\mathbf{r}' \right]^{-1} - \frac{1}{I} \int_S \frac{\xi}{r'} e^{-\xi} d\mathbf{r}' \quad (2.3)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (2.3) не зависит от распределения завихренности, а только от геометрии области течения S и положения точки \mathbf{R} . Обозначим его как $-\mathbf{W}(\mathbf{R})$. Интеграл, стоящий в числителе \mathbf{W} , можно преобразовать к контурному интегралу (\mathbf{n} – внешняя по отношению к S нормаль на контуре обтекаемой поверхности, l – расстояние вдоль контура)

$$\int_S \frac{\mathbf{r}'}{\varepsilon r'} e^{-\xi} d\mathbf{r}' = - \int_S \nabla e^{-\xi} d\mathbf{r}' = - \oint_C \mathbf{n} e^{-\xi} dl \quad (2.4)$$

Интеграл I в знаменателе выражения \mathbf{W} , вычисленный для внутренней точки течения, в случае, когда расстояние до границы области S много больше ε , равен $2\pi\varepsilon^2$, а для точки, лежащей на отрезке границы, длина которого много больше ε , равен $\pi\varepsilon^2$. В этом нетрудно убедиться, так как соответствующая квадратура вычисляется аналитически в полярных координатах. Для произвольной точки области S этот интеграл может быть преобразован к контурному. Для этого воспользуемся соотношением

$$e^{-\xi} = -\varepsilon \nabla \left(\frac{\mathbf{r}'(r' + \varepsilon)}{r'^2} e^{-\xi} \right)$$

которое можно проверить путем дифференцирования правой части. Далее, используя теорему Стокса, получим

$$\int_S e^{-\xi} d\mathbf{r}' = -\int_S \varepsilon \nabla \left(\frac{\mathbf{r}'(r' + \varepsilon)}{r'^2} e^{-\xi} \right) d\mathbf{r}' =$$

$$= -\oint_C \varepsilon \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{r}'(r' + \varepsilon)}{r'^2} e^{-\xi} \right) dl - \oint_{C_\delta} \varepsilon \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{r}'(r' + \varepsilon)}{r'^2} e^{-\xi} \right) dl$$

где контур C_δ представляет собой окружность бесконечно малого радиуса вокруг точки $\mathbf{r}' = 0$. Интеграл по этому контуру равен $-2\pi\varepsilon^2$, следовательно

$$\int_S e^{-\xi} d\mathbf{r}' = 2\pi\varepsilon^2 - \oint_C \varepsilon \mathbf{n} \left(\frac{\mathbf{r}'(r' + \varepsilon)}{r'^2} e^{-\xi} \right) dl \tag{2.5}$$

В результате, используя (2.3)–(2.5) и заменяя интегралы суммами по дискретным областям S_i с известной циркуляцией Γ_i , которые будем называть доменами, можно написать дискретное приближение для диффузионной скорости \mathbf{V}_d в (1.2)

$$\mathbf{V}_{d_i} \approx \frac{1}{\text{Re}} \sum_j \frac{\Gamma_j \mathbf{r}_{ij}}{\varepsilon r_{ij}} \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\varepsilon}\right) \left(\sum_j \Gamma_j \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\varepsilon}\right) \right)^{-1} + \mathbf{W}_i$$

$$\mathbf{W}_i = \sum_k \mathbf{w}_{ik}, \quad \mathbf{w}_{ik} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\mathbf{n}_k d_k}{s_i} \exp\left(-\frac{r_{ik}}{\varepsilon}\right)$$

$$s_i = 2\pi\varepsilon_i^2 + \sum_k \varepsilon (\mathbf{n}_k \mathbf{r}_{ik}) \frac{(r_{ik} + \varepsilon)}{r_{ik}^2} \exp\left(-\frac{r_{ik}}{\varepsilon}\right)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j; \quad \mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \frac{\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{k+1}}{2}; \quad d_k = |\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k|$$

Здесь суммирование по индексу k – это суммирование по отрезкам контура, \mathbf{r}_k – координаты узлов. При необходимости повышения точности вычисления интегралов (2.4) и (2.5), записанных в виде конечных сумм, отрезки контура должны быть разбиты на более мелкие части.

Как видно из выражения (2.6), вклад j -го домена в диффузионную скорость i -й точки представляет собой вектор, направленный по линии, соединяющей точки i и j , и носит характер отталкивания для одноименных циркуляций и притяжения для разноименных. По мере увеличения расстояния между точками этот вклад экспоненциально убывает.

Вектор \mathbf{W}_i представляет собой сумму \mathbf{w}_{ik} вкладов отрезков контура в диффузионную скорость i -й точки.

При этом вклад каждого отрезка направлен по нормали к нему и носит характер отталкивания независимо от знака циркуляции. Если расстояние до стенки много больше ε , вклад отрезка стремится к нулю.

При переходе от интеграла к конечной сумме возникает погрешность, связанная с непостоянством подынтегрального выражения внутри домена. Чтобы функция $\exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|/\varepsilon)$, входящая в подынтегральное выражение, слабо менялась в области домена, величина ε должна быть много больше линейного размера домена. С другой стороны, с увеличением ε возрастает погрешность представления (2.3). Кроме того, сама функция Ω должна слабо изменяться внутри домена. В пределе бесконечного раздроб-

ления доменов при существовании гладкого решения погрешность можно сделать сколь угодно малой.

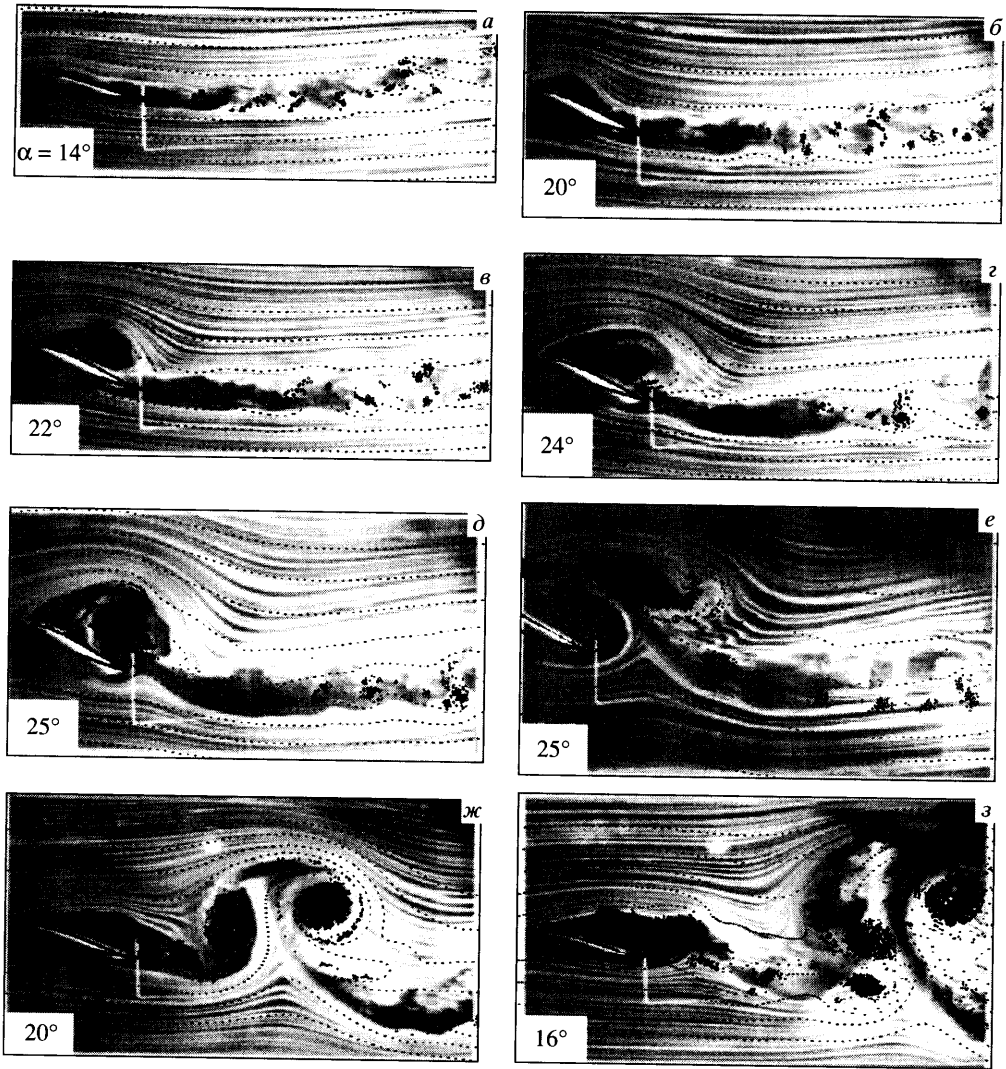
В ходе численного моделирования следим за конечным числом лагранжевых точек, полагая, что каждая точка находится внутри домена с постоянной во времени циркуляцией. Границы контура в процессе движения могут деформироваться, в результате чего область может значительно вытягиваться. В этом случае мысленно можно провести перезамыкание контуров таким образом, чтобы циркуляция домена, окружающего каждую точку, осталась неизменной, а форма стала более компактной. Это можно сделать, например, перебирая пары доменов, граничащих друг с другом, и заменяя удлинившуюся границу между ними более короткой так, чтобы циркуляция каждого домена осталась прежней. Данное рассуждение не является строгим, однако наблюдения за характером распределения выделенных точек позволяют предполагать, что это возможно. Поскольку положение границ домена не входит в формулы, конкретный их выбор не имеет значения. Важно лишь, что вся завихренность распределена внутри конечного числа доменов, информацию о каждом из которых несет соответствующая лагранжева точка.

Для вычисления диффузионной скорости по формуле (2.6) значение параметра ε выбирается для каждой точки по следующему правилу. Для i -й точки путем перебора всех точек определяется расстояние до ближайшей к ней j -й точки (или до ближайших нескольких точек), после чего величина ε_i полагается равной этому расстоянию, умноженному на некоторый коэффициент запаса c ($c > 1$). В формуле (2.6) при суммировании по j используется не зависящее от j значение $\varepsilon = \varepsilon_i$. Таким образом, значение ε выбирается по локальным характеристикам распределения контрольных точек. При этом может случиться так, что при суммировании по всем доменам в формуле (2.6) величина ε окажется недостаточно большой по сравнению с размерами удаленных доменов. Но поскольку вклады от доменов экспоненциально убывают с увеличением расстояния до точки наблюдения, то и сам вклад дальнего домена, и ошибка в его вычислении оказываются незначительными.

Метод вязких вихревых доменов тестировался на ряде модельных задач нестационарного отрывного обтекания тел при различных числах Рейнольдса [8], проводилось сравнение с известными экспериментальными данными и численными результатами других авторов, полученными конечно-разностными методами.

3. Результаты расчетов поля течения. Расчеты обтекания колеблющегося крыла выполнены для профиля NACA-0012 при $\alpha_0 = 15^\circ$, $\alpha_1 = 10^\circ$, $h = 0.25$, $k = 0.2$, $Re = 4.4 \cdot 10^4$. Такие значения параметров были выбраны для сравнения с результатами эксперимента [1], где с помощью дымовой визуализации были получены картины течения в разных фазах колебания крыла. В расчетах число точек разбиения на контуре равнялось 247, шаг по времени составлял 0.004. Уже после двух первых периодов колебаний наблюдался выход на квазипериодический режим обтекания профиля. Сравнение с экспериментом осуществлялось на третьем периоде колебаний, к этому времени число вихревых доменов достигало 6–8 тыс.

Экспериментальные картины дымовой визуализации [1] совмещены на фиг. 2 с расчетными положениями вихревых доменов, светлые точки соответствуют доменам положительной циркуляции, темные – отрицательной. Здесь же пунктирными кривыми изображены рассчитанные положения пассивной примеси, “выпускаемой” из точек, перед профилем. На фиг. 2, *a–d* (стадия увеличения угла атаки) виден процесс формирования крупного вихря на подветренной стороне профиля. Он образован, главным образом, доменами отрицательной циркуляции (по часовой стрелке), родившимися на передней кромке. Циркуляция этих доменов при их смещении вниз по потоку оказывается избыточной для обеспечения условия прилипания на нижележащих частях контура, вследствие чего там образуется завихренность положительного знака, и возникает течение между двумя вихревыми образованиями, направленное от задней кромки к перед-



Фиг. 2. Сравнение расчетных и экспериментальных картин обтекания колеблющегося профиля NACA-0012 при $\alpha_0 = 15^\circ$, $\alpha_1 = 10^\circ$, $h = 0.25$, $k = 0.2$, $Re = 4.4 \cdot 10^4$ в стадии увеличения (а–д) и уменьшения (е–ж) угла атаки α

ней. Это течение тормозит смещение вихря отрицательной циркуляции, и последняя накапливается, так как генерация вихрей на передней кромке продолжается. С другой стороны, встречное течение наполняет отрывную область жидкостью (воздухом), который постепенно выталкивает вихрь вниз по потоку.

После достижения максимального угла атаки и в начальной стадии его уменьшения (фиг. 2, д, е) “избыточность” отрицательной циркуляции увеличивается, что ускоряет процесс перемещения вихря в спутный поток. После уноса вихря отрицательной циркуляции образовавшаяся под ним положительная циркуляция также оказывается избыточной. С ней происходит аналогичный процесс, но менее длительный, так как положительный вихрь пополняется с задней кромки. В результате, вслед за крупным отрица-

тельным вихрем с профиля сходит крупный положительный вихрь (фиг. 2, е). Два вихря разного знака индуцируют в окрестности друг друга скорость, направленную перпендикулярно соединяющей их линии (в данном случае, вверх). Всплывая, эти вихри образуют грибовидную структуру (фиг. 2, ж), которая затем сносится вниз по потоку. После этого с профиля аналогичным образом сходит последовательность более мелких вихрей (фиг. 2, з). Из рисунков видно хорошее качественное согласование расчетных и экспериментальных данных.

4. Расчет нестационарных гидродинамических нагрузок. Выведем общие выражения для силы $\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau$, действующей на обтекаемое тело в вязкой жидкости, через характеристики вихревого поля (p – давление, τ – касательное напряжение на контуре S_a профиля S_a)

$$\mathbf{F}_p = \oint_C \mathbf{n} p dl, \quad \mathbf{F}_\tau = \oint_C \boldsymbol{\tau} dl$$

Сила давления \mathbf{F}_p преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p &= \oint_C \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) p dl = \mathbf{e}_z \times \oint_C p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} dl = \\ &= \mathbf{e}_z \times \left(\oint_C \frac{\partial(\mathbf{r} p)}{\partial l} dl - \oint_C p \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} dl \right) = -\mathbf{e}_z \times \oint_C \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \nabla p \right) dl \end{aligned}$$

Подстановка сюда выражения для градиента ∇p из уравнения Навье – Стокса в форме (1.3) дает

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{e}_z \times \oint_C \mathbf{r} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) - \mathbf{e}_z \times \oint_C \mathbf{r} ((\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

Модифицируем первое слагаемое в (4.1)

$$\mathbf{e}_z \times \oint_C \mathbf{r} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) dl = -\oint_C \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) \right) dl = -\oint_C \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \mathbf{n} \right) dl \quad (4.2)$$

Скорость жидкости на контуре вследствие условия прилипания равна скорости движения контура

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.3)$$

следовательно, ее полная производная по времени совпадает с ускорением точек контура

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \dot{\mathbf{V}}_0 - \boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.4)$$

Здесь \mathbf{V}_0 , \mathbf{r}_0 – скорость и радиус-вектор точки, вокруг которой вращается профиль, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения.

Подставляя (4.4) в (4.2) и вычислив интегралы, получим

$$\mathbf{e}_z \times \oint_C \mathbf{r} \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) dl = -\oint_C \mathbf{r} \times \left((\dot{\mathbf{V}}_0 - \boldsymbol{\omega}^2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \times \mathbf{n} \right) dl =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{S_a} \mathbf{r} \times (\nabla \times (\dot{\mathbf{V}}_0 - \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))) ds - \\
 &- \int_{S_a} (((\dot{\mathbf{V}}_0 - \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \times \nabla) \times \mathbf{r}) ds = \\
 &= -\mathbf{r}_m \times 2\dot{\boldsymbol{\omega}} S_a + \dot{\mathbf{V}}_0 S_a - \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) S_a + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) S_a
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

где \mathbf{r}_m – радиус-вектор центра площади области S_a .

Второе слагаемое в (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{e}_z \times \oint_C \mathbf{r} ((\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) d\mathbf{r}) &= \oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{e}_z \left((\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) dl = \\
 &= \oint_C \mathbf{r} \times \left((\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) \times \left(\mathbf{e}_z \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial l} \right) \right) dl = \oint_C \mathbf{r} \times ((\mathbf{V}_d \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{n}) dl = \oint_C \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{V}_d \mathbf{n}) dl
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Величина $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{V}_d \mathbf{n}) dl$ представляет собой взятый с обратным знаком поток завихренности $\mathbf{J} dl$ с поверхности тела в жидкость. Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.1), получим окончательное выражение для силы давления

$$\mathbf{F}_p = \dot{\mathbf{V}}_0 S_a - \omega^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) S_a + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (3\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_0) S_a - \oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{J} dl$$

При численном моделировании поток $\mathbf{J} dl$ берется как отношение к Δt циркуляции вихрей $\Gamma^{(g)}$, образовавшихся вблизи элемента контура dl за время Δt (циркуляции вихрей, удаленных из-за проникновения внутрь контура, включаются в \mathbf{J} с противоположным знаком). Соответственно контурный интеграл в дискретном представлении определяется суммой

$$\oint_C \mathbf{r} \times \mathbf{J} dl \approx \sum_k \mathbf{r}_k \times \frac{\Gamma_k^{(g)}}{\Delta t}$$

Тензор напряжения в вязкой несжимаемой жидкости имеет вид [7]

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -p + 2 \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & -p + 2 \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Действующее на тело вязкое напряжение $\boldsymbol{\tau}$ на площадке $\Delta s = \mathbf{n} \Delta s$ выражается формулой

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial V_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2(\nabla\mathbf{V})}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} + \frac{2}{\text{Re}} \begin{pmatrix} \frac{\partial V_y}{\partial y} & -\frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} - \\
&-\frac{1}{\text{Re}} \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\text{Re}} (2\mathbf{n}(\nabla\mathbf{V}) - 2(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V}))
\end{aligned}$$

Поскольку в несжимаемой жидкости $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, получаем

$$\boldsymbol{\tau} = -2\frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V} + \frac{1}{\text{Re}}\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (4.7)$$

Оператор $\mathbf{n} \times \nabla$ не содержит производных по направлению нормали к контуру профиля C , а скорость жидкости при условии прилипания равна скорости контура, определяемой формулой (4.3). Поэтому в (4.7)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{V} &= (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{V} + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{V}) - \mathbf{n}(\nabla\mathbf{V}) = \\
&= (\mathbf{n}\nabla)(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \times 2\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{r}) + \mathbf{n} \times 2\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times 2\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (4.7), получим для касательного напряжения на жестком контуре

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\text{Re}}(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega} - 2\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega})$$

Сила трения \mathbf{F}_τ , действующая на контур в целом

$$\mathbf{F}_\tau = \oint_C \boldsymbol{\tau} dl = \frac{1}{\text{Re}} \oint_C \mathbf{n} \times \boldsymbol{\Omega} dl \approx \frac{1}{\text{Re}} \sum_k \mathbf{n}_k \times \boldsymbol{\Omega}_k d_k$$

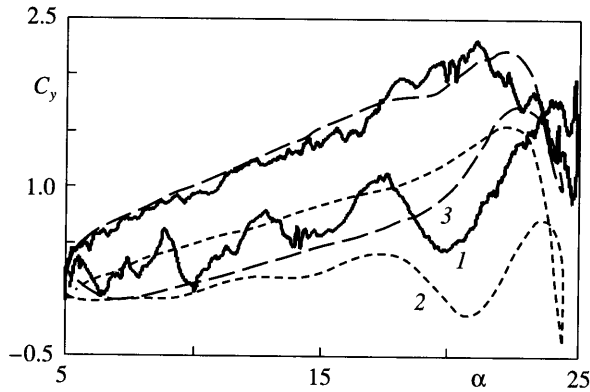
Поскольку, согласно (2.2)

$$\boldsymbol{\Omega}_k \approx \frac{1}{s_k} \sum_i \Gamma_i \exp\left(-\frac{r_{ik}}{\epsilon_k}\right)$$

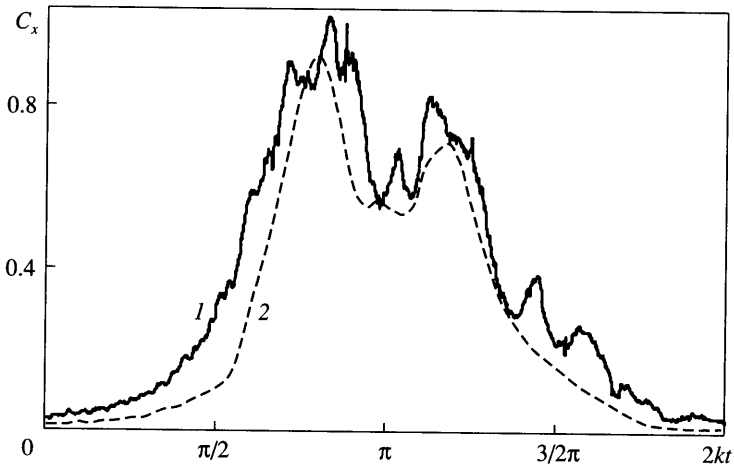
то, используя (2.6), при условии равенства ϵ_i и ϵ_k можно записать \mathbf{F}_τ в виде

$$\mathbf{F}_\tau \approx -\sum_k \sum_i \frac{1}{s_k} \mathbf{w}_{ik} \times \Gamma_i s_i$$

Полученная в данной работе зависимость коэффициента подъемной силы крыла от угла атаки α в процессе нестационарного движения сопоставлена на фиг. 3 с экспериментальными данными [1] и [9]. В [1] подъемная сила вычислялась косвенным путем по приближенным формулам на основе измерений осредненного за ряд периодов распреде-



Фиг. 3. Коэффициент подъемной силы: 1 и 2 – расчет и эксперимент [1] при $k = 0.16$, $Re = 4.4 \cdot 10^4$; 3 – эксперимент [9] при $k = 0.153$, $Re = 4.8 \cdot 10^4$



Фиг. 4. Коэффициент сопротивления: 1 – расчет; 2 – эксперимент [9]

ления скорости в перпендикулярном к набегающему потоку сечении на расстоянии $0.3 L$ от профиля (фиг. 1). По этим измерениям авторы [1] вычисляли поток завихренности с профиля, а по нему изменение подъемной силы по формуле Жуковского. Полученный результат имеет невысокую точность, что признается авторами [1].

В [9] непосредственно измерялось давление в ряде точек на профиле, после чего интегрированием вычислялся коэффициент подъемной силы. Видно, что расчетные данные удовлетворительно согласуются с экспериментом [9]. Результаты, полученные в [1], имеют качественно аналогичный характер, но проходят ниже.

Во всех трех случаях имеет место гистерезис. Вблизи точки максимального значения угла атаки в момент схода вихря отрицательной циркуляции имеет место резкое уменьшение подъемной силы, после чего наблюдается ее быстрый подъем, связанный со сходом положительного вихря. Далее результаты данной работы и [1] показывают колебательный характер изменения подъемной силы вокруг значения более низкого, чем при увеличении α . Периоды и амплитуды колебаний в обоих случаях согласуются между собой.

Расчетные зависимости коэффициента сопротивления от времени, полученные в данной работе и в [9], сравниваются на фиг. 4 при тех же значениях параметров, что и на фиг. 3. Видно хорошее качественное и удовлетворительное количественное согласие результатов (следует иметь в виду, что экспериментальные данные получены осреднением по многим периодам).

Заключение. Использование метода вязких вихревых доменов для моделирования двумерного обтекания колеблющегося профиля позволяет адекватно воспроизводить нестационарные процессы возникновения и схода крупных вихрей, приводящие к гистерезису подъемной силы. Численные расчеты треков от пассивной примеси дают картины течения, практически совпадающие с экспериментальными картинами дымовой визуализации. Выведены формулы для вычисления нестационарных напряжений на поверхности тела в вязкой жидкости через распределение завихренности в окружающем пространстве. Значения коэффициента подъемной силы, полученные в расчете, также согласуются с экспериментальными данными. Развита расчетная методика позволяет анализировать гидродинамические механизмы возникновения нестационарных нагрузок на колеблющемся крыле.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№№ 04-01-00554, 06-08-01217), а также программы НШ-8597.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Panda J., Zaman K.B.M.Q. Experimental investigation of the flow field of an oscillating airfoil and estimation of lift from wake surveys // J. Fluid Mech. 1994. V. 265. P. 65–95.
2. Гувернюк С.В. Новые возможности вычислительных вихревых методов при моделировании нестационарных двумерных течений вязкой жидкости // Материалы Междунар. конф. “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность”. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 97–102.
3. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 42–46.
4. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model. The diffusion velocity method // Computers and Fluids, 1991. V. 19. № 3/4. P. 433–441.
5. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 11–19.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М: Мир, 1973. 758 с.
7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
8. Андронов П.Р., Гирча А.И., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Некоторые результаты тестирования метода вязких вихревых доменов при решении задач динамики несжимаемой жидкости // Материалы 5-й Междунар. школы-семинара “Модели и методы аэродинамики”. М.: МЦНМО, 2005. С. 12, 13.
9. McAlister K.W., Pucci S.L., Mc Croskey W.L., Carr L.W. An experimental study of dynamic stall in advanced airfoil sections. V. 2. Pressure and force data// NASA TM 84245. 1982. 656 p.