

УДК 532.527

© 2006 г. Д. Г. АХМЕТОВ, В. В. НИКУЛИН, В. В. ОСТАПЕНКО

КУМУЛЯЦИЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ С НАКЛОННЫМ ДНОМ ПОСЛЕ РЕЗКОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ ЕГО ВРАЩЕНИЯ

Представлены результаты экспериментального, теоретического и численного моделирования эволюции однородной завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения. В линейном приближении получено аналитическое решение данной задачи, позволяющее качественно описывать вихревую структуру течения, наблюдаемую в эксперименте. Для учета нелинейных эффектов, в том числе реальной кривизны свободной поверхности, проведено численное моделирование этого процесса в рамках первого приближения теории мелкой воды с учетом физической вязкости. Показано, что первоначальная однородная завихренность существенно увеличивается в отдельных вихрях, на которые распадается начальный вихрь. Кроме этого в эксперименте отмечено, что вертикальные вторичные течения, индуцируемые наиболее сильным вихрем, проникают до дна сосуда.

Ключевые слова: спиндаун, вихри Россби, эксперимент, линейное приближение, мелкая вода, численный счет.

Актуальность исследования динамики вихревых структур во вращающихся вокруг вертикальной оси сосудах с наклонным дном вызвана недостаточной изученностью подобных процессов, а также важностью связанных с ними геофизических приложений [1, 2]. При исследовании течений в бассейнах, имеющих форму вертикального кругового цилиндра с наклонным дном, установлено, что при резком замедлении их вращения происходит поочередная генерация циклонических и антициклонических вихрей вблизи “восточного” края сосуда и последующее их распространение на “запад” (“север” – направление поднятия дна) [1, 3]. В настоящей работе, следуя терминологии, используемой в [3, 4], процесс эволюции течения после резкого увеличения или уменьшения угловой скорости вращения сосуда будем называть “спинап” или “спиндаун”. Линейная теория, основанная на представлении решений в виде суперпозиции волн Россби, качественно описывает динамику вихревых структур в процессах спинапа или спиндауна при небольших вариациях угловой скорости [1, 3]. При этом отличие реального процесса от решения, получаемого в рамках линейной теории, обусловлено влиянием вязкости, которая помимо затухания приводит к образованию новых вихрей за счет отрыва пограничного слоя от боковых стенок [3]. Если в эксперименте вариации угловой скорости более значительны, то линейная теория существенно менее точно воспроизводит результаты экспериментов [4].

Однако при исследовании вихревых структур недостаточное внимание уделялось изучению величины завихренности. Впервые в [5] было обращено внимание на то, что в процессе спиндауна в прямоугольном бассейне с наклонным дном первоначальная однородная вертикальная завихренность существенно увеличивается в отдельных вихрях, которые возникают в ходе эволюции. Эффект усиления вертикальной завихренности в отдельных вихрях представляет как самостоятельный интерес, поскольку гидродинамика данного явления не достаточно изучена, так и в связи с его возможными следствиями. В частности, одним из следствий может быть интенсификация вертикального массообмена, поскольку вихревые структуры с горизонтальным вращением индуцируют верти-

кальные вторичные течения. Такие структуры могут быть причиной глубоководной конвекции в крупных водоемах. Например, в оз. Байкал происходит постоянное обновление глубинных вод [6], и в нем обнаружено совпадение зон подъема глубинных вод с центрами циклонической циркуляции [7].

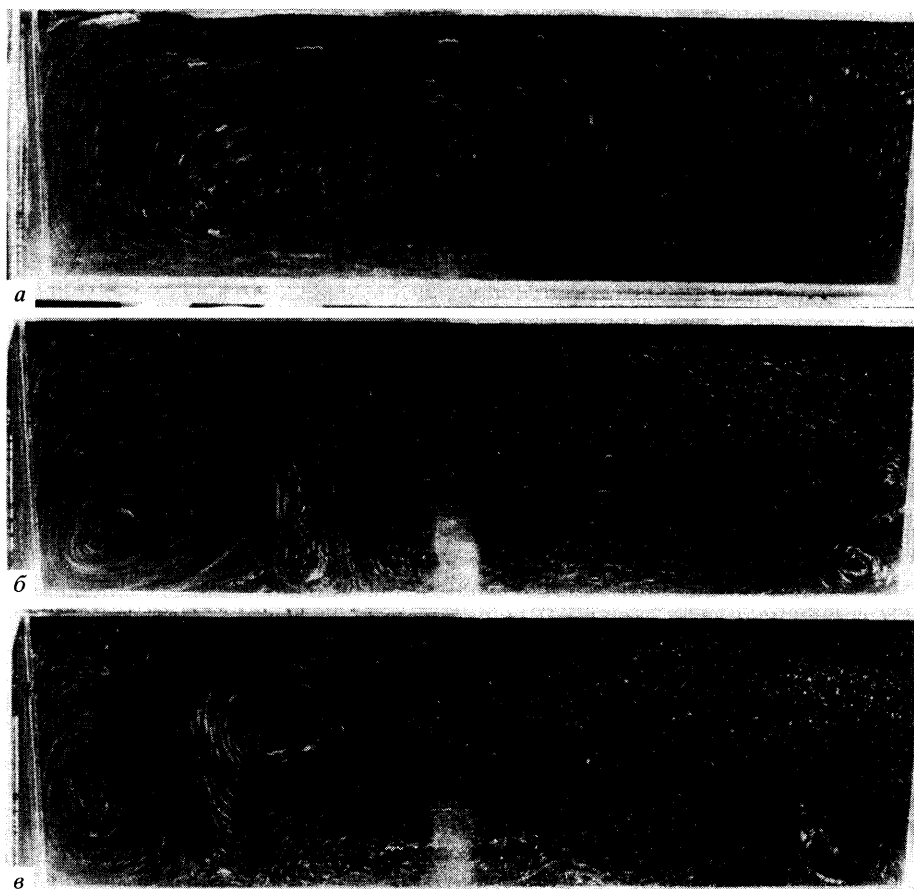
В настоящей работе представлены результаты экспериментального, теоретического и численного моделирования эволюции однородной завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения. В линейном приближении получено аналитическое решение данной задачи, позволяющее качественно описывать вихревую структуру течения, наблюдаемую в эксперименте. Для учета нелинейных эффектов, в том числе реальной кривизны свободной поверхности, проведено численное моделирование этого процесса в рамках первого приближения теории мелкой воды с учетом физической вязкости. Показано, что первоначальная однородная завихренность существенно увеличивается в отдельных вихрях, на которые распадается начальный вихрь. Теоретически вертикальные вторичные течения не изучаются, однако в эксперименте показано, что в ходе эволюции могут возникнуть достаточно интенсивные вихри, генерирующие вертикальные течения, проникающие до дна сосуда.

1. Экспериментальная установка и результаты экспериментов. Экспериментальная установка представляет собой горизонтальную платформу с установленным на ней бассейном, горизонтальное сечение которого прямоугольник размерами 800×250 мм. Платформа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр прямоугольника. Бассейн имеет наклонное вдоль ширины дно, так что его отметка линейно возрастает относительно уровня свободной поверхности без вращения от -120 до -40 мм. Таким образом, тангенс угла наклона дна к горизонту α равен 0.32.

Течение на поверхности жидкости анализируется в системе отсчета, связанной с платформой, и визуализируется плавающими на ней мелкими частицами диаметром $0.4-0.8$ мм. Треки частиц регистрируются фотоаппаратом, установленным на платформе над бассейном. Длительность экспозиции изменяется от 0.1 до 0.4 с. По длине треков и времени экспозиции вычисляется скорость движения жидкости относительно платформы. Для визуализации вертикальных вторичных течений и установления факта, что конвективные потоки доходят до дна, на дно бака насыпаются частицы диаметром $0.4-0.8$ мм, плотность которых немного превышает плотность воды (скорость оседания частиц в спокойной воде составляет $0.05-0.5$ см/с). При возникновении достаточно интенсивных вторичных течений частицы увлекаются конвективными потоками и поднимаются со дна. Для регистрации этого явления производятся съемки частиц сбоку вдоль горизонтали.

Начальная завихренность создается резким уменьшением частоты вращения платформы от $1/3$ до $1/4$ Гц, при этом время торможения составляет десятые доли секунды, что мало по сравнению с периодом вращения T после торможения ($T = 4$ с). Таким образом, в системе отсчета, связанной с платформой, начальную завихренность после торможения можно считать однородной и циклонической, т.е. совпадающей по направлению с угловой скоростью вращения системы отсчета. Ее величина равна $2\delta\Omega = 2(\Omega_0 - \Omega)$, где Ω_0 и Ω – угловые скорости вращения платформы до и после торможения.

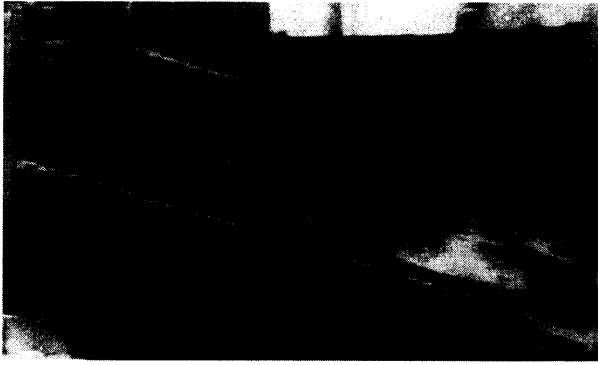
Примерно через два оборота после торможения вблизи “западного” края сосуда образуется система из трех вихрей: циклон-антициклон-циклон, интенсивность которых убывает с “запада” на “восток”. Особенно отчетливо эта система видна через три оборота, когда интенсивность вихрей максимальна. После этого интенсивность вихрей под действием вязкости постепенно затухает и приблизительно через пять оборотов вся жидкость начинает вращаться вместе с баком как единое твердое тело. На фиг. 1 представлены фотографии треков частиц, сделанные через различные времена t после торможения вращения бака: $t = 0.5T$, длительность экспозиции 0.16 с (а); $t = 3T$, экспозиция 0.37 с (б) и $t = 4T$, экспозиция 0.27 с (в). На фиг. 1, а виден один большой вихрь, который



Фиг. 1. Фотографии треков частиц на поверхности жидкости с экспозициями t во вращающейся вместе с бассейном системе координат через время t после замедления вращения: $(t_c, \tau_c) = (2, 0.16); (12, 0.37); (16, 0.27)$ (а–в)

начал смещаться к “западу”. На фиг. 1, б отчетливо видна система из трех вихрей, а на фиг. 1, в четко видны два более интенсивных вихря, а третий, более слабый, уже практически незаметен.

Количественный анализ экспериментальных данных осложняется тем, что линии тока и скорости частиц не являются вращательно симметричными относительно центра вихря (фиг. 1). Поэтому для получения количественной информации рассчитывается средняя завихренность $\langle \omega \rangle = \Gamma / (\pi r_0^2)$ внутри окружностей различного радиуса (r_0), концентрических с центром вихря, где Γ – циркуляция скорости по этой окружности. Для расчета Γ используется следующая процедура. Выбираются частицы, лежащие внутри кольца $|r - r_0| < \Delta r$, $\Delta r = 6$ и 10 мм. Кольцо разбивается на 20 равных сегментов. В каждом сегменте по длине треков и длительности экспозиции вычисляется средняя скорость и ее проекция на касательную к окружности. После умножения проекции на длину дуги и суммирования получается Γ . Погрешность определения длительности экспозиции составляет 10%, длины треков – 20%. Тогда общая погрешность будет 30%. Величина $\langle \omega \rangle$ вычислялась через три оборота после торможения для $r_0 = 20$ мм и соста-



Фиг. 2. Фотография частиц, сделанная в горизонтальном направлении со стороны “западного” торца бассейна через 12 с после торможения, $\tau = 1/250$ с

вила 7.3 1/с и через четыре оборота для $r_0 = 20, 30, 43, 55, 67$ мм, где равнялась 3.5; 3.3; 2.8; 2.5; 1.9 1/с. Так как начальная завихренность $2\delta\Omega \approx 1.07$, то максимальная завихренность основного вихря, расположенного в “юго-западной” части бассейна, через три оборота превышает начальную примерно в 7.3 раза, а через четыре – в 3.5 раза.

Визуальные наблюдения показали, что интенсивность вторичных течений становится достаточной для поднятия частиц со дна примерно через 3 оборота. Через два и четыре оборота частицы остаются на дне. На фиг. 2 – фотография частиц, сделанная со стороны “западного” торца сосуда через три оборота после торможения. Из-за вращения изображение немного размыто, время экспозиции 1/250 с. Из этого фото следует, что частицы собираются в центральной области вихря, и часть из них поднимается вверх, что свидетельствует о наличии вертикальных вторичных течений.

2. Линейная задача. Начало системы координат, вращающейся вместе с бассейном, возьмем в его “юго-западном” углу, ось x направим на “восток”, ось y – на “север”, ось z – вдоль оси вращения. Решение линейной задачи будем искать в безразмерных переменных

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad t' = \Omega t$$

где l – ширина бассейна, а Ω – угловая скорость вращения бассейна после торможения платформы. Далее в этом пункте штрихи при безразмерных переменных опускаются.

Пренебрегая кривизной свободной поверхности, вязкостью, нелинейностью, считая угол наклона дна малым, получим следующее двумерное уравнение на функцию тока, описывающее волны Россби [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \beta = \frac{2l \operatorname{tg}(\alpha)}{H_0}$$

где $H_0 = 12$ см – максимальная глубина воды в бассейне. Уравнение (2.1) решается в безразмерной прямоугольной области со следующими начальными и граничными условиями

$$\Pi' = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 1\} \quad (2.2)$$

$$\Psi(0, x, y) = \Psi_0(x, y), \quad \Psi|_{x=0, a} = \Psi|_{y=0, 1} = 0$$

где a – безразмерная длина бассейна. Начальный момент времени $t = 0$ будем отсчитывать с момента окончания торможения вращения платформы.

Считая, что сразу после торможения жидкость продолжает вращаться с прежней угловой скоростью, получим, что начальное значение функции тока $\Psi_0(x, y)$ определяется как решение следующей краевой задачи

$$\Delta\Psi_0 = 2l^2\delta\Omega, \quad \Psi_0|_{x=0, a} = \Psi_0|_{y=0, 1} = 0 \quad (2.3)$$

$$\delta\Omega = \Omega_0 - \Omega$$

Решение задачи (2.1), (2.2) ищется в виде ряда по собственным функциям Ψ_{nm} уравнения (2.1), равным нулю на границах. Можно показать, что

$$\Psi_{nm} = \Phi_{nm} \exp(i\omega_{nm}t), \quad \Phi_{nm} = \Omega l^2 \sin(n\pi x/a) \sin(m\pi y) \exp(i\gamma_{nm}x) \quad (2.4)$$

$$\gamma_{nm} = (n^2\pi^2/a^2 + m^2\pi^2)^{1/2}, \quad \omega_{nm} = \beta/(2\gamma_{nm})$$

Используя эти формулы, можно получить следующее выражение для функции Ψ :

$$\Psi = \operatorname{Re}[\sum c_{nm} \Psi_{nm}], \quad c_{nm} = \frac{\int \nabla \Phi_{nm}^* \nabla \Psi_0 ds}{\int \nabla \Phi_{nm}^* \nabla \Phi_{nm} ds} \quad (2.5)$$

где интегралы берутся по площади прямоугольника Π' . Такой вид коэффициентов c_{nm} вызван тем, что функции Φ_{nm} не ортогональны, а ортогональны их градиенты. При вычислении интегралов, входящих в числитель выражения для c_{nm} , используется следующая цепочка равенств:

$$\int \nabla \Phi_{nm}^* \nabla \Psi_0 ds = \int \nabla (\Phi_{nm}^* \nabla \Psi_0) ds - \int \Phi_{nm}^* \Delta \Psi_0 ds = 2l^2 \delta\Omega \int \Phi_{nm}^* ds \quad (2.6)$$

получаемая с учетом соотношений (2.3) и (2.4). Вычисляя с учетом равенств (2.6) интегралы, входящие в формулу (2.5), окончательно получим явный вид функции Ψ :

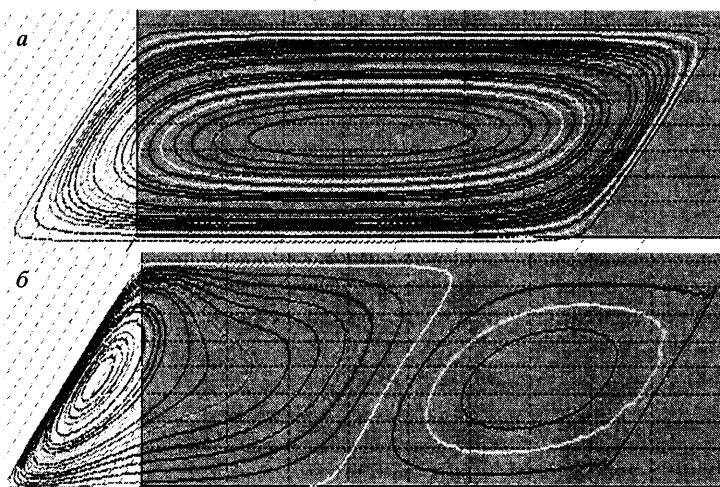
$$\Psi(t, x, y) = \sum_{n, k=1}^{\infty} \frac{16nl^2\delta\Omega \sin\theta_{n, k} \sin(\pi nx/a) \sin[\pi(2k-1)y] \sin\varphi_{n, k}(x, t)}{\pi^2(2k-1)^3 a^2 \gamma_{n, 2k-1}^2}$$

$$\varphi_{n, k}(x, t) = \theta_{n, k} + \gamma_{n, 2k-1}x + \omega_{n, 2k-1}t, \quad \theta_{n, k} = (\pi n - a\gamma_{n, 2k-1})/2$$

Расчет Ψ показал, что в данном случае так же, как в круглом бассейне [1, 3], происходит поочередная генерация вихрей Россби у “восточного” края бассейна и последующее их распространение на “запад”. Кроме того, установлено, что завихренность возрастает вблизи “западного” берега. На фиг. 3 показаны изолинии Ψ для $a = 3$ при $t = 0$ (фиг. 3, а) и $t = 3T$ (фиг. 3, б). На фигуре 3, б видны два вихря, причем “западный” – циклон, рядом – антициклон. Максимальная завихренность в циклоне превышает начальную примерно в 20 раз. Далее циклонический вихрь все больше прижимается к краю, его размер вдоль оси x убывает и в конечном итоге вихрь исчезает.

Таким образом, линейная теория качественно согласуется с экспериментом. В “западной” части бассейна образуется циклонический вихрь, завихренность в котором существенно превышает начальную, и ее зависимость от времени также проходит через максимум. В то же время положение центра вихря, его форма и количественные значения отличаются от экспериментальных. С целью лучшего количественного согласования далее исследована возможность численного расчета рассматриваемого течения в рамках первого приближения теории мелкой воды.

3. Постановка задачи в рамках теории мелкой воды. Плановые уравнения первого приближения теории мелкой воды [8] в системе координат xu , вращающейся с постоян-



Фиг. 3. Изолинии функции тока, в линейном приближении для спиндауна в прямоугольном бассейне с наклонным дном в системе координат, связанной с бассейном: *a* – в начальный момент времени, *б* – через три периода

ной угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, проходящей через точку с координатами $x = x_*, y = y_*$, имеют вид

$$H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0 \tag{3.1}$$

$$u_t + uu_x + vv_y + gz_x = f_1 + \varphi_1 + \psi_1 + \omega_1 \tag{3.2}$$

$$v_t + uv_x + vv_y + gz_y = f_2 + \varphi_2 + \psi_2 + \omega_2 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = -r^2 \mathbf{v}|\mathbf{v}|/H^{4/3} \tag{3.4}$$

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = 2\Omega(v, -u) \tag{3.5}$$

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) = \Omega^2(x - x_*, y - y_*) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2) = \nu(\mathbf{v}_{xx} + \mathbf{v}_{yy}) \tag{3.7}$$

Здесь $H(t, x, y)$ – глубина, $\mathbf{v}(t, x, y) = (u, v)$ – осредненная по глубине скорость, $z = b + H$ – уровень воды, $b(x, y)$ – отметка дна, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ – сила донного трения, вычисляемая по формуле Маннинга [9], где r – коэффициент шероховатости дна, φ – сила Кориолиса, ψ – центробежная сила, \mathbf{w} – сила вязкого трения, ν – коэффициент вязкости. Система уравнений (3.1)–(3.7) выводится в длинноволновом приближении из уравнений непрерывности и Навье-Стокса при помощи кинематического условия на свободной поверхности жидкости. Уравнение (3.1) представляет собой закон сохранения массы, а уравнения (3.2) и (3.3) – описывают изменение локального импульса каждой отдельной частицы жидкости. Обычно при выводе уравнений мелкой воды пренебрегают влиянием вязкости, полагая, что $\mathbf{v} = 0$. Однако далее будет показано, что правильное описание вихревой структуры течения, полученной в эксперименте, возможно лишь с учетом силы вязкого трения (3.7), коэффициент которой $\nu = \nu_1 + \nu_2$ представляет собой сумму коэффициентов ν_1 – кинематической и ν_2 – турбулентной вязкостей, где $\nu_2 \gg \nu_1 = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$.

Система уравнений (3.1)–(3.7) решается в прямоугольной области с наклонной отметкой дна и следующими начальными условиями

$$\Pi = \{(x, y): 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\} \quad (3.8)$$

$$b(x, y) = b_1 + (b_2 - b_1)y/Y \quad (3.9)$$

$$X = 2x_* = 80 \text{ см}, \quad Y = 2y_* = 25 \text{ см}, \quad b_1 = -12 \text{ см}, \quad b_2 = -4 \text{ см}$$

$$z(0, x, y) = z_0(x, y), \quad v(0, x, y) = v_0(x, y) \quad (3.10)$$

В формуле (3.10) так же, как и в случае линейной задачи, начальный момент времени $t = 0$ соответствует моменту окончания торможения вращения платформы. Предполагая, что за время торможения, которое много меньше периода вращения, форма свободной поверхности и вертикальная завихренность практически не меняются, получим, что начальные функции z_0 и v_0 вычисляются следующим образом. Из уравнений

$$g(z_0)_x = \Omega_0^2(x - x_*), \quad g(z_0)_y = \Omega_0^2(y - y_*)$$

с учетом сохранения начального объема жидкости

$$\int_0^X \int_0^Y z_0(x, y) dx dy = 0$$

находится функция

$$z_0(x, y) = \frac{\Omega_0^2}{2g} [(x - x_*)^2 + (y - y_*)^2 - (x_*^2 + y_*^2)/3]$$

задающая начальную форму свободной поверхности жидкости. Начальная скорость течения внутри области (3.8) определяется по формуле

$$v_0(x, y) = \delta\Omega(y_* - y, x - x_*) \quad (3.11)$$

получаемой из условия вращения с угловой скоростью $\delta\Omega = \Omega_0 - \Omega$ относительно точки с координатами (x_*, y_*) .

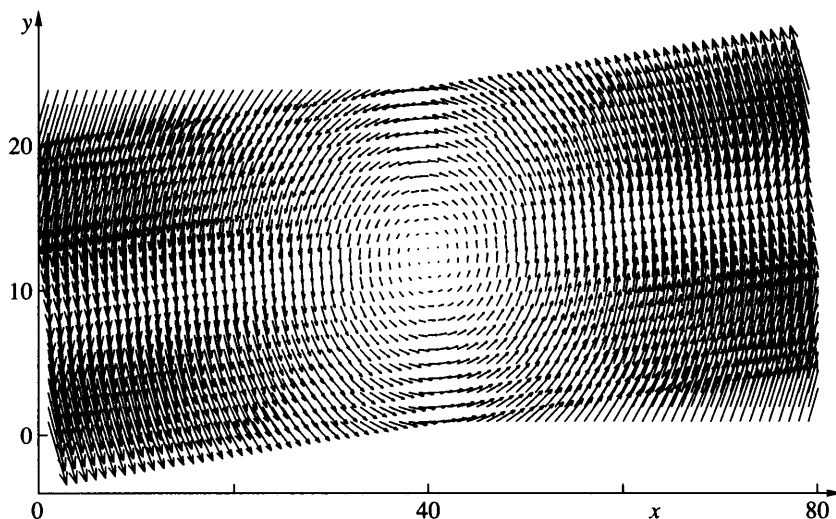
В настоящей работе рассмотрим решения задачи (3.1)–(3.10) в двух случаях: без учета силы вязкого трения (3.7), т.е. в предположении, что $v = 0 \Rightarrow w = 0$, и с учетом влияния силы вязкого трения (3.7), т.е. предполагая, что $v > 0 \Rightarrow w \neq 0$. В первом случае при $w = 0$ система (3.1)–(3.7) становится гиперболической (с распределенными источниковыми членами в правой части) и содержит пространственные производные только первого порядка. Поэтому для замыкания задачи (3.1)–(3.10) достаточно на границе прямоугольника (3.8) поставить условия непротекания

$$u|_{x=0, X} = v|_{y=0, Y} = 0 \quad (3.12)$$

В общей ситуации гиперболическая при $w = 0$ система (3.1)–(3.7) допускает разрывные решения с прерывными волнами, для корректного моделирования которых при помощи разностных схем сквозного счета необходимо использовать консервативные аппроксимации [10, 11] дивергентной формы записи законов сохранения массы (3.1) и полного импульса [8]. Однако в рассматриваемом эксперименте уровень свободной поверхности жидкости изменяется достаточно мало и прерывные волны в процессе течения не образуются. Поэтому для численного моделирования этого эксперимента в рамках гиперболической модели будем использовать недивергентную аппроксимацию простейшей системы (3.1)–(3.7).

Во втором случае, когда $v > 0$, система (3.1)–(3.7) имеет составной тип и содержит пространственные производные как первого, так и второго порядка. Поэтому для замыкания задачи (3.1)–(3.10) на границе прямоугольника (3.8) необходимо поставить условия прилипания

$$v|_{x=0, X} = v|_{y=0, Y} = 0 \quad (3.13)$$



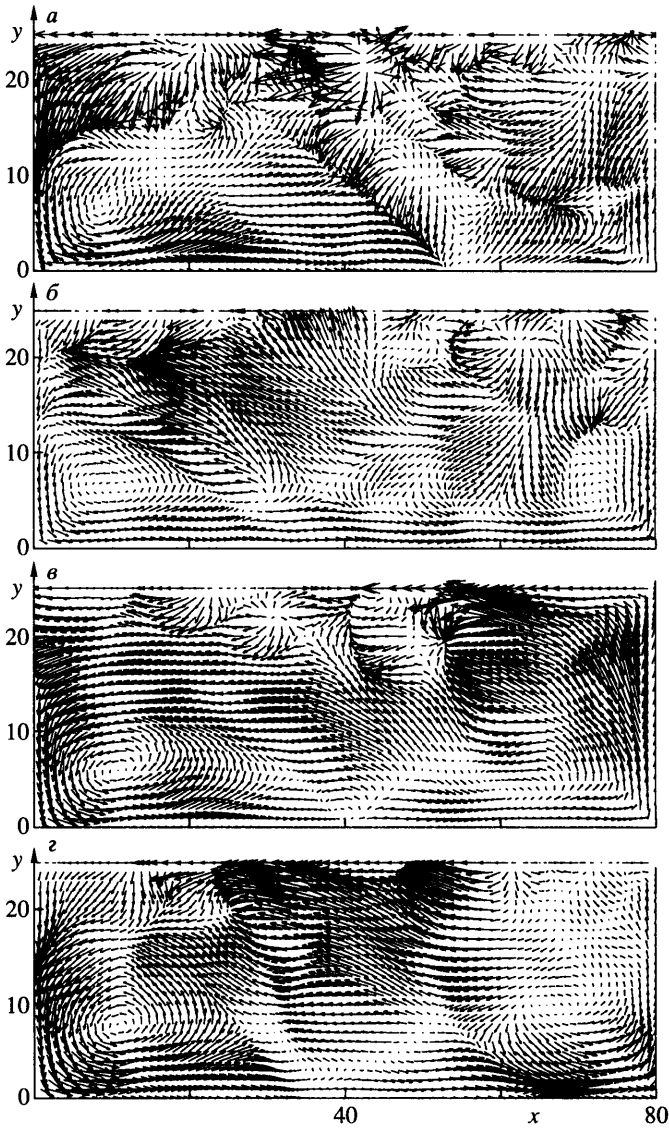
Фиг. 4. Начальное поле скоростей во вращающейся вместе с бассейном системе координат сразу после замедления вращения

Из начальных (3.11) и граничных (3.12), (3.13) условий следует, что в обоих случаях в начальный момент времени на границе расчетной области (3.8) имеет место разрыв скорости. Это накладывает повышенные требования на устойчивость разностной схемы, предназначенной для численного моделирования рассматриваемого процесса.

4. Результаты численных расчетов. Поскольку рассматриваемый процесс – быстропротекающий, то для его численного моделирования (в том числе и в случае $w \neq 0$, когда учитывается влияние физической вязкости) удобно использовать условно устойчивую разностную схему, при реализации которой отсутствуют прогонки и итерации по нелинейности. В то же время на структуру описываемого течения определяющим образом влияют источниковые члены (3.4)–(3.6). Поэтому для устойчивости численного алгоритма [12] необходимо применять неявные аппроксимации силы трения (3.4) и силы Кориолиса (3.5). С учетом этого, по аналогии с [13], разностную схему построим методом расщепления по физическим процессам [14] на разнесенной по пространству равномерной разностной сетке. Такая схема обладает существенно более высокой разрешимостью [12] по сравнению с различными монотонными TVD схемами [15, 16] при расчете сложных течений, в которых источниковые члены играют определяющую роль.

Поскольку дно лотка, в котором выполнялся эксперимент, было выполнено из оргстекла, то расчеты проводились с коэффициентом шероховатости $r = 0.003$, что в системе СГС соответствует донному трению (3.4) при течении по достаточно гладкому руслу. Коэффициенты искусственной схемной вязкости в случае $w = 0$ и физической вязкости в случае $w \neq 0$ выбирались достаточными для подавления физической неустойчивости, связанной с переходом ламинарного течения к турбулентному в результате резкой перестройки течения вблизи границы расчетной области. При таких коэффициентах вязкости порядок сходимости разностного решения в сеточной норме L_1 (определяемый при помощи метода Рунге, использующего результаты численных расчетов на трех сжимающихся сетках [17]) оказался приблизительно равным единице, что согласуется с порядком схемной аппроксимации.

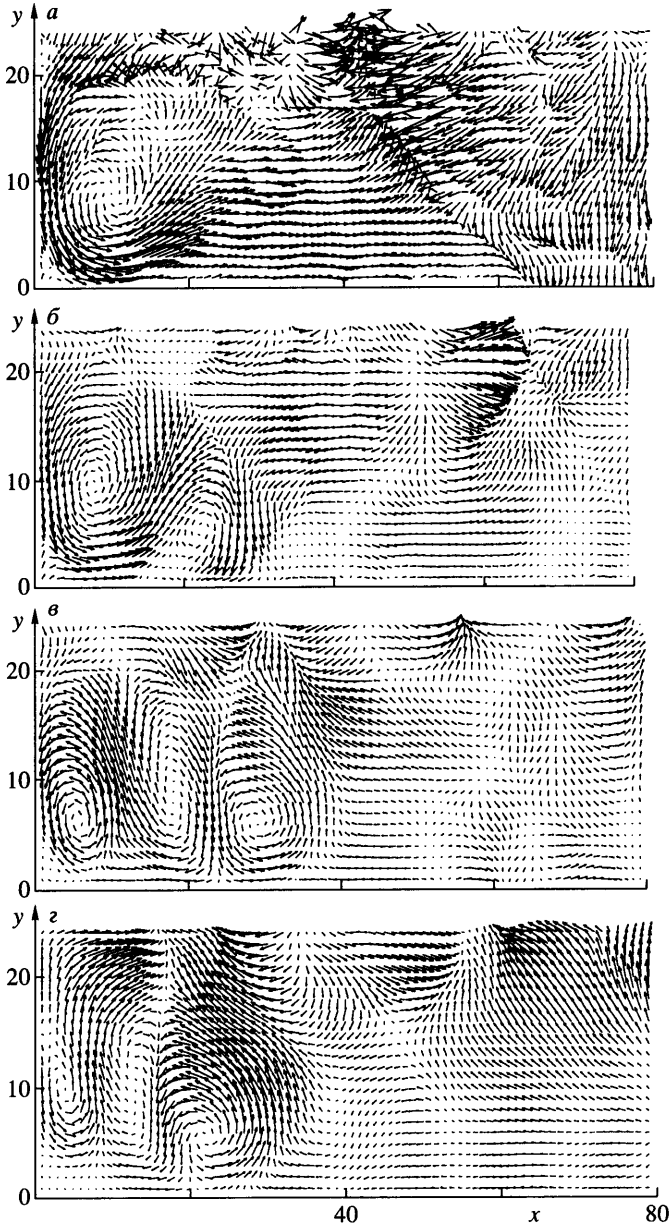
На фиг. 4 для внутренних узлов расчетной области приведено начальное поле скоростей, определяемое по формуле (3.11). На фиг. 5 для случая $w = 0$ и на фиг. 6 для случая $w \neq 0$ на четыре последовательных момента времени $t = T = 4$ с (6, а), $t = 2T = 8$ с (6, б),



Фиг. 5. Поля скоростей при $w = 0$ во вращающейся вместе с бассейном системе координат через время t после замедления вращения: $t = 2, 8, 12$ и 16 с (а–г)

$t = 3T = 12$ с (б, в) и $t = 4T = 16$ с (б, г) показаны поля скоростей, получаемые в результате численного расчета. На всех этих фигурах изображены сжатые вектора скоростей ϵv , где масштабный коэффициент $\epsilon = 0.1$ для фиг. 4, 5, а, 5, б, 6, а и б, $\epsilon = 0.15$ для фиг. 5, в и 6, в и $\epsilon = 0.2$ для фиг. 5, г и 6, г.

В случае $w = 0$ на юго-западной границе лотка формируется и существует в течение всего расчетного времени только один вихрь – циклон, в котором жидкость вращается против движения часовой стрелки (фиг. 5). Это противоречит результатам лабораторных экспериментов, в которых в этой области в момент времени $t = 12$ с четко видна система из трех вихрей типа циклон-антициклон-циклон. Такая система вихрей фор-

Фиг. 6. То же, что на фиг. 5 при $w \neq 0$

мируется в случае $w \neq 0$ (фиг. 6). Причем по интенсивности и взаимному расположению эти вихри качественно подобны тем, которые наблюдаются в эксперименте.

Таким образом, правильное воспроизведение волновой картины течения, получаемой в эксперименте, возможно на основе модели, в которой на границе расчетной области ставится условие прилипания (3.12) и в которой достаточно большим (по сравнению с кинематическим $\nu_1 = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$) коэффициентом физической вязкости $\nu = 0.5 \text{ см}^2/\text{с}$ моделируется турбулентная вязкость. Численные расчеты показали, что мак-

симальная завихренность в “западном” циклоническом вихре через $t = 12$ и 16 с в случае $w \neq 0$ превосходит начальную приблизительно в 5.2 и 2.8 раза соответственно. Таким образом, эффект усиления завихренности в основном вихре воспроизводится в численном эксперименте. Для более точного количественного описания результатов лабораторного эксперимента необходимо использовать соответствующие трехмерные алгоритмы с учетом более точного моделирования процесса турбулентности.

Заключение. В результате экспериментальных исследований спиндауна в прямоугольном бассейне с наклонным дном установлено, что вблизи его “юго-западного” края постепенно формируется система из трех вихрей типа циклон–антициклон–циклон, интенсивность которых убывает с “запада” на “восток”. Причем завихренность в самом мощном “западном” циклоническом вихре в отдельные моменты времени может в несколько раз превышать начальную. Таким образом, происходит своеобразная кумуляция завихренности: первоначальная, примерно одинаковая во всем бассейне в процессе эволюции усиливается в одном вихре меньшего размера. При этом, как показали эксперименты, возникающее в нем вращательное движение оказывается достаточно интенсивным, чтобы индуцировать вторичные вертикальные течения, начинающиеся с самого дна. Подобный механизм может приводить к возникновению глубинного массопереноса.

Линейная теория, основанная на представлении решения в виде суперпозиции волн Россби, в качественном плане согласуется с экспериментами. Она описывает образование вихревых структур и усиление вертикальной завихренности вблизи “западного” края бассейна. Из последнего, в частности, следует, что линейные механизмы играют существенную роль в процессе усиления завихренности. Однако количественные значения завихренности, положения центров вихрей и динамика их изменения, получаемые в рамках линейной теории, отличаются от экспериментальных.

Более точно процесс формирования экспериментальной системы вихрей удастся воспроизвести путем численного моделирования в рамках первого приближения теории мелкой воды с учетом физической вязкости и условия прилипания на боковых стенках. При этом экспериментальные значения максимальной завихренности в самом мощном “западном” циклоническом вихре отличаются от расчетных примерно на 30%.

Работа выполнена при финансовой поддержке междисциплинарного проекта СО РАН № 131 и гранта РФФИ (№ 05-01-01081).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pedlosky J., Greenspan H.P. A simple laboratory model for oceanic circulation // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 2. С. 291–304.
2. Должанский Ф.В., Курганский М.В., Черноусько Ю.Л. Лабораторное и теоретическое исследование баротропных волн Россби во вращающемся кольцевом канале // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 6. С. 597–608.
3. Van de Konijnenberg J.A., Naulin V., Rasmussen J.J., Stenum B., Heijst G.J.F.van Linear spin-up in a sliced cylinder // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 2000. V. 92. № 1/2. P. 85–114.
4. Heijst G.J.F.van, Maas L.R.M., Williams C.W.M. The spin-up of fluid in a rectangular container with sloping bottom // J. Fluid Mech. 1994. V. 265. С. 125–159.
5. Kotelnikova M.S., Nikulin V.V. Vorticity dynamics during the linear spin-down process in a rectangular tank with a sloping bottom. // Geophys. Res. Abstracts. V. 6. SRef-ID: EGU04-A-00690. Europ. Geosci. Union 2004.
6. Weiss R.F., Karmack E.C., Koropalov V.M. Deep-water renewal and biological production in Lake Baikal // Nature. 1991. V. 349. № 6311. P. 665–669.
7. Троицкая Е.С., Жданов А.А., Блинов В.В., Гнатовский Р.Ю., Иванов В.Г., Хохлов В.В., Шимараев М.Н. Структура вод Байкала по гидрофизическим показателям // Тез. докл. 6-го Всерос. гидрологич. съезда. Секц. 5. Гидрофизические явления и процессы. Формирование и изменчивость речного стока, гидрологические и водохозяйственные расчеты. СПб.: Гидрометеиздат, 2004. С. 61–63.

8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
9. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
10. Остапенко В.В. Об эквивалентных определениях понятия консервативности для конечно-разностных схем // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 8. С. 1114–1128.
11. Остапенко В.В. Об аппроксимации законов сохранения разностными схемами сквозного счета // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 9. С. 1405–1417.
12. Schacht W., Vorozhtsov E.V., Voevodin A.F., Ostapenko V.V. Numerical modelling of hydraulic jumps in a spiral channel with rectangular cross section // Fluid Dynamics Research. 2002. V. 31. № 3. P. 185–213.
13. Остапенко В.В. Численное моделирование волновых течений, вызванных сходом берегового оползня // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 109–117.
14. Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 263 с.
15. Le Veque R.J., Yee H.C. A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms // J. Comput. Phys. 1990. V. 86. № 1. P. 187–210.
16. Zhou J.G., Causon D.M., Mingham C.G., Ingram D.M. The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations // J. Comput. Phys. 2001. V. 168. № 1. P. 1–25.
17. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.

Новосибирск

Поступила в редакцию
31.X.2005