МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 2006

УДК 532.529.2.013.4:551.466.81

© 2006 г. А. Ю. ВАСИЛЬЕВ, Ю. Д. ЧАШЕЧКИН

ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН И СОПУТСТВУЮЩИХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ В ВЯЗКОЙ НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Построено аналитическое решение линеаризованной задачи излучения периодических внутренних волн частью плоскости, совершающей малые колебания в произвольном направлении в вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости. Приведены решения дисперсионного уравнения при всех положениях излучающей поверхности (произвольном, вертикальном, горизонтальном и критическом, когда одно из направлений распространения пучка коллинеарно излучающей поверхностью). Проанализирована возможность перехода к практически важному случаю однородной жидкости.

Ключевые слова: вязкая стратифицированная жидкость, периодические внутренние волны, пограничные слои, точные решения.

Изучение внутренних волн, одного из элементов периодических движений в жидкости, представляет научный и практический интерес. Такие волны, существующие в толще стратифицированного океана, водоемах и озерах, звездных и планетных атмосферах, интенсивно изучаются в лабораторных и природных условиях [1]. Выделение волновых движений из совокупности возмущений различной природы в естественных условиях затруднено "загрязняющим" действием тонкой структуры среды. Качество априорных алгоритмов обработки данных зависит от степени полноты использованных приближенных моделей.

Теоретическое описание этого скрытого явления не завершено в силу недостаточно полной математической изученности свойств основного волнового уравнения со сложным характером дисперсии [2]. Кроме того, существенное различие симметрий уравнений и граничных условий удается согласовать в отдельных случаях преимущественно в приближении идеальной жидкости [3]. Выделены критические углы, при которых волновые лучи ложатся на излучающую или отражающую поверхность, что сопровождается нелинейной трансформацией волн [4].

Среди основных видов внутренних волн: нестационарных, порождаемых локализованными периодическими источниками, присоединенных (подветренных) и периодических, и в теории [2], и на практике [1] выделены последние. Традиционно расчеты волн проводятся в линейном приближении с использованием моделей источников и стоков [3], условия применимости которых при расчете стратифицированных течений обоснованы недостаточно полно.

В вязкой стратифицированной жидкости внутренние волны сосуществуют с периодическими пограничными слоями на твердых поверхностях или с пограничными течениями в толще жидкости, возмущения в которых экспоненциально затухают с удалением от границы или поверхности разрыва [5]. Точные решения задач генерации внутренних волн [6] и эксперимент [7] позволяют оценить погрешности распространенного метода силовых (или массовых) источников [3]. В общем случае периодические пограничные слои в непрерывно стратифицированной жидкости имеют более сложную природу, чем в однородной, и состоят из двух подслоев: изопикнического и специфического внутреннего слоя.

Толщина изопикнического пограничного слоя $\delta_\nu = \sqrt{2\nu/\omega}$ и его свойства совпадают с параметрами течения Стокса в однородной жидкости, о существовании которого известно с середины XIX в. [8], и определяются частотой волны ω и кинематической вязкостью ν. Параметры дополнительного внутреннего пограничного слоя, кроме того, зависят от угловых параметров задачи (относительной частоты волны и угла наклона поверхности к горизонту).

Внутренние волны и семейство пограничных слоев позволяют образовать полную систему собственных функций линейной задачи и построить модели, точно удовлетворяющие граничным условиям, не привлекая дополнительных предположений. Решения задач генерации волн имеют наиболее простой вид, когда источник – это подвижная часть цилиндрической [9] или плоской [10] излучающих поверхностей.

1. Определяющие уравнения и граничные условия. Изучаются установившиеся периодические движения в вязкой, несжимаемой, экспоненциально стратифицированной жидкости, плотность которой убывает с высотой: $\rho_0(z) = \rho_{00}\exp(-z/\Lambda)$, где Λ – масштаб, а $N = \sqrt{g/\Lambda}$ – частота плавучести (ось z направлена против ускорения свободного падения $\mathbf{g}$), кинематическая вязкость ν – постоянная. Источник движений – часть наклонной плоскости, осциллирующая с магнитудой скорости u_0. Зависимость всех величин от времени носит гармонический характер, общий множитель $(-i\omega t)$ далее везде опускается.

Линеаризованная система уравнений движения в приближении Буссинеска имеет вид [10]

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_0\nu\Delta\mathbf{v} - \rho g\mathbf{e}_z, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} - v_z\frac{\rho_0}{\Lambda} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \qquad (1.1)$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, ρ, P, – возмущения скорости, плотности и давления соответственно, $\mathbf{e}_z$ – единичный орт оси z. В естественных и лабораторных условиях стратификация обычно слабая ($\Lambda \gg H$, H – максимальный линейный масштаб задачи), а вязкость малой ($N\lambda_c^2 \gg \nu$, λ_c – характерная длина волны). Эти условия обычно используются в теории внутренних волн [1, 4–6].

Для упрощения вычислений движений несжимаемых сред используется тороидально-полоидальное представление, в котором три компоненты скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ определяются двумя скалярными функциями Φ, Ψ с помощью соотношения $\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{e}_z\Psi + \nabla\times \times(\nabla\times\mathbf{e}_z\Phi)$ [11]. При этом система (1.1) преобразуется к виду

$$(\omega^2\Delta - N^2\Delta_\perp - i\omega\nu\Delta^2)\Phi = 0, \quad (\omega - i\nu\Delta)\Psi = 0 \qquad (1.2)$$

где $\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ – оператор Лапласа, $\Delta_\perp = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$. Одно из независимых уравнений (1.2) типично для теории внутренних волн [1], другое используется для описания пограничных слоев в вязкой жидкости [9]. Дополнительные решения, являющиеся следствием введения тороидально-полоидального представления, и соответствующие им операторы в (1.2) отброшены из физических соображений, следуя [9].

Излучающая поверхность находится на непроницаемой плоскости, расположенной под углом φ к горизонту. Начало координат во всех случаях располагается в центре осциллирующей области. В силу различия геометрии задачи и структуры волновых пучков для сокращения записи используются четыре системы координат.

Линия действия силы тяжести определяет лабораторную систему координат (x, y, z), связанную с неподвижной жидкостью. На излучающей поверхности вводится локальная система координат (ξ, η, ζ), полученная путем поворота системы (x, y, z) на угол φ вокруг оси y. При таком выборе оси ξ и η находятся на излучающей поверхности, а ось ζ нормальна к ней. С волновым конусом связаны две системы координат: 1) сопутствующая (q, p, α), в которой ось q, наклоненная под углом $\theta = \arcsin(\omega/N)$ к горизонту, ориентирована в направлении распространения волн, а ось p – поперек, α – угловая переменная, и 2) цилиндрическая (r, α, z)

$$\xi = x\cos\varphi + z\sin\varphi, \quad \eta = y, \quad \zeta = -x\sin\varphi + z\cos\varphi$$
$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha \; z = z \tag{1.3}$$
$$p = r\sin\theta - z\cos\theta, \quad q = r\cos\theta + z\sin\theta$$

Граничные условия прилипания на всей разделяющей плоскости $O\xi\eta$, включая ее подвижную и неподвижную части, для скалярных функций Φ, Ψ, входящих в систему (1.2), принимают вид

$$\begin{gathered}\cos\varphi\partial_\eta\Psi(\xi,\eta,0) + [-\sin\varphi(\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2) + \cos\varphi\partial_{\xi\zeta}^2]\Phi(\xi,\eta,0) = u_\xi(\xi,\eta)\\ -(\cos\varphi\partial_\xi - \sin\varphi\partial_\eta)\Psi(\xi,\eta,0) + \partial_\eta(\sin\varphi\partial_\xi + \cos\varphi\partial_\zeta)\Phi(\xi,\eta,0) = u_\eta(\xi,\eta)\\ -\sin\varphi\partial_\eta\Psi(\xi,\eta,0) + [-\cos\varphi(\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2) + \sin\varphi\partial_{\xi\zeta}^2]\Phi(\xi,\eta,0) = u_\zeta(\xi,\eta)\end{gathered} \tag{1.4}$$

На бесконечности все возмущения затухают. Невозмущенная жидкость покоится.

2. Общее решение задачи генерации периодических движений осциллирующей частью наклонной плоскости. Решение системы (1.2) отыскивается в виде представлений скалярных функций Φ, Ψ интегралами Фурье

$$\begin{gathered}\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty}[A(k_\xi,k_\eta)\exp(ik_1(k_\xi,k_\eta)\zeta) + B(k_\xi,k_\eta)\exp(ik_2(k_\xi,k_\eta)\zeta)]\times\\ \times\exp(ik_\xi\xi + ik_\eta\eta)dk_\xi dk_\eta\\ \Psi = \int_{-\infty}^{+\infty}C(k_\xi,k_\eta)\exp(ik_3(k_\xi,k_\eta)\zeta + ik_\xi\xi + ik_\eta\eta)dk_\xi dk_\eta\end{gathered} \tag{2.1}$$

Компоненты (k_1, k_2, k_3) волнового вектора $\mathbf{k}$, входящие в (2.1), определяются решениями дисперсионного уравнения, отражающего условие совместности системы (1.2). В локальной системе координат дисперсионное уравнение представляется в форме

$$\begin{gathered}\{\omega^2(k_j^2 + k_\perp^2) - N^2[(k_\xi\cos\varphi - k_j\sin\varphi)^2 + k_\eta^2] + i\omega\nu(k_j^2 - k_\perp^2)^2\}\left(k_j^2 + \frac{\omega}{i\nu} + k_\perp^2\right) = 0\\ \sin\theta = \omega/N, \quad k_\perp^2 = k_\xi^2 + k_\eta^2, \quad j = 1,\ldots,3\end{gathered} \tag{2.2}$$

Физическая интерпретация движений основывается на анализе структуры решений (2.1) системы (1.2) и дисперсионного уравнения (2.2).

Уравнение (2.2) имеет три пары комплексных корней, одна из которых регулярна по вязкости ($\mathrm{Im}k \sim \nu^\alpha$), а две других – сингулярны ($\mathrm{Im}k \sim \nu^{-\alpha}$, показатель α больше нуля). Регулярные корни описывают пучок конических внутренних волн, существующий и в идеальной жидкости.

Сингулярные корни имеют различную природу. Решение, в которое входит диссипативная часть первого сомножителя, определяет и затухание волн, и специфический внутренний пограничный слой [6]. Второй сомножитель в (2.2) описывает вязкий периодический пограничный слой – аналог слоя Стокса [8]. Хотя толщины этих пограничных слоев могут различаться, поперечный масштаб у них одинаковый – универсальный микромасштаб $\delta_N = \sqrt{\nu/N}$. Полная классификация регулярных и сингулярных компонент трехмерных периодических движений в вязкой жидкости с учетом эффектов сжимаемости, вращения и стратификации приведена в [12].

В слабо стратифицированных средах с малой вязкостью корни дисперсионного уравнения (2.2) находятся методами теории возмущений [13]. В полупространстве $\zeta > 0$ значения корней выбираются из условия затухания возмущений на бесконечности: $\mathrm{Im}k_1 > 0$, $\mathrm{Im}k_2 > 0$, $\mathrm{Im}k_3 > 0$.

Коэффициенты A, B, C определяются из решений системы линейных уравнений, которая образуется при подстановке решения (2.1) в граничные условия (1.4)

$$\begin{cases} A(k_\eta^2\sin\varphi + k_1\beta_1) + B(k_\eta^2\sin\varphi + k_2\beta_2) + iCk_\eta\cos\varphi = U_\xi \\ -Ak_\eta\gamma_1 - Bk_\eta\gamma_2 + iC\gamma_3 = U_\eta \\ A(k_\eta^2\cos\varphi - k_\xi\beta_1) + B(k_\eta^2\cos\varphi - k_\xi\beta_2) - iCk_\eta\sin\varphi = U_\zeta \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\beta_i = k_i\sin\varphi - k_\xi\cos\varphi, \quad \gamma_i = k_i\cos\varphi + k_\xi\sin\varphi$$

где $\mathbf{U}(k_\xi, k_\eta)$ – Фурье-образ скорости источника $\mathbf{u}(\xi, \eta)$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{u}(\xi,\eta)\exp(-ik_\xi\xi - ik_\eta\eta)d\xi d\eta$$

Решение системы (2.3) может быть представлено в виде

$$A = -\frac{ik_\eta^2[k_\xi + (k_2-k_3)\sin\varphi\cos\varphi] + ik_\xi\beta_2\beta_3}{D}U_\xi - \frac{ik_\eta(k_\eta^2+\beta_2^2)}{D}U_\eta -$$
$$-\frac{ik_\eta^2[(k_2-k_3)\cos^2\varphi + k_3] + ik_2\beta_2\beta_3}{D}U_\zeta$$

$$B = \frac{ik_\eta^2[k_\xi + (k_1-k_3)\sin\varphi\cos\varphi] + ik_\xi\beta_1\beta_3}{D}U_\xi + \frac{ik_\eta(k_\eta^2+\beta_1^2)}{D}U_\eta +$$
$$+\frac{ik_\eta^2[(k_1-k_3)\cos^2\varphi + k_3] + ik_1\beta_1\beta_3}{D}U_\zeta \tag{2.4}$$
$$C = \frac{k_\eta(k_1-k_2)(k_\eta^2\cos^2\varphi + k_\xi^2)}{D}U_\xi + (k_1-k_2)\frac{k_\eta^2(\gamma_1\sin\varphi + \beta_1\cos\varphi) - k_\xi\beta_1\beta_2}{D}U_\eta +$$
$$+\frac{k_\eta(k_1-k_2)\sin\varphi(k_1\gamma_2 + k_\xi\beta_2 - k_\eta^2\cos\varphi)}{D}U_\zeta$$

$$D = (k_1-k_2)\{-ik_\xi\beta_1\beta_2\beta_3 + ik_\eta^4\cos\varphi + ik_\eta^2[\beta_3(\gamma_1\sin\varphi + \gamma_2\cos\varphi)]\} +$$
$$+ik_\eta^2(\gamma_1\beta_2^2 - \gamma_2\beta_1^2)$$

Интегральные представления (2.1), в которых коэффициенты $A(k_\xi, k_\eta)$, $B(k_\xi, k_\eta)$ и $C(k_\xi, k_\eta)$ определяются формулами (2.4), являются общим решением задачи (1.1), удовлетворяющим граничным условиям (1.4). Как видно, семейство решений (2.1) включает волны и сопутствующие пограничные слои. Оба типа решений описываются функциями одного класса, в которых существенно различаются соотношения между действительными и мнимыми частями.

3. Решения дисперсионного уравнения, их поведение в предельных случаях. Первые члены асимптотических разложений для корней уравнения (2.2) при малом значении вязкости находятся стандартными методами [13] при $\zeta > 0$

$$k_1 \approx k_1^{(0)} + i\nu k_1^{(1)}, \quad k_1^{(0)} = \frac{k_\xi \sin 2\varphi + 2\kappa\cos\theta}{2\mu}, \quad k_1^{(1)} = \frac{\sin\theta(k_\xi \sin\varphi\cos\theta + \kappa\cos\varphi)^4}{2N\kappa\mu^4\cos\theta}$$

$$k_2 \approx \frac{i + \operatorname{sign}\mu}{\delta_\varphi} - \frac{k_\xi \sin 2\varphi}{2\mu}, \quad k_3 = \sqrt{-\frac{\omega}{i\nu} - k_\perp^2} \approx \frac{i+1}{\delta_\nu} + \frac{i+1}{4}\delta_\nu k_\perp^2 \tag{3.1}$$

$$\kappa = \sqrt{k_\xi^2 \sin^2\theta - \mu k_\eta^2}, \quad \mu = \sin^2\varphi - \sin^2\theta, \quad \theta = \arcsin\left(\frac{\omega}{N}\right)$$

$$\delta_\varphi = \sqrt{\frac{2\nu\sin\theta}{N|\mu|}}, \quad \delta_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$

где θ – угол, который волновой конус составляет с горизонтом, δ_φ – толщина внутреннего пограничного слоя, впервые рассчитанная в [9] для задач в двумерной постановке, δ_ν – толщина периодического (стоксова) пограничного слоя, существующего и в однородной вязкой жидкости [8].

Регулярная часть решения k_1 имеет стандартный вид затухающих волн, сингулярная – пограничных слоев, т.е. решения (3.1) описывают два типа движений: крупномасштабные с характерным размером $\lambda_c = 2\pi/k$ ($\mathrm{Re}\,k_1 \gg \mathrm{Im}\,k_1$) и мелкомасштабные с характерной толщиной $O(\sqrt{\nu/\omega})$ ($\mathrm{Re}\,k_i \sim \mathrm{Im}\,k_i$, $i = 2, 3$).

При $\varphi = \pm\theta$ решения (3.1) имеют особенность и неприменимы для расчета полей (в идеальной жидкости этому случаю соответствует бесконечное сжатие пучка). Дисперсионное уравнение для критических углов должно анализироваться отдельно.

Внутренние волны характеризуются спектральной плотностью $A(k_\xi, k_\eta)$. Выражение с коэффициентом $B(k_\xi, k_\eta)$ определяет внутренний волновой пограничный слой толщиной δ_φ. Коэффициент $C(k_\xi, k_\eta)$ задает вязкий периодический пограничный слой толщиной δ_ν, существующий как в стратифицированной, так и в однородной жидкостях (периодическое движение Стокса [8]).

При переходе к двухмерному случаю дисперсионное уравнение (2.2) сохраняет общую структуру

$$[\omega^2(k^2 + k_\xi^2) - N^2(k_\xi\cos\varphi - k\sin\varphi)^2 + i\omega\nu(k^2 + k_\xi^2)^2]\left(k^2 + \frac{\omega}{i\nu} + k_\xi^2\right) = 0$$

а его решения описывают как волны, так и оба типа пограничных слоев и в приближении малой вязкости определяются выражениями

$$k_1 = \frac{k_\xi}{\tan(\varphi+\theta)} + \frac{ik_\xi^3\delta_N}{2\cos\theta\sin^4(\varphi-\theta)}$$

$$k_2 = \frac{i + \operatorname{sign}\mu}{\delta_N}\sqrt{\frac{|\mu|}{2\sin\theta}} - \frac{k_\xi \sin\varphi\cos\varphi}{\mu}$$

$$k_3 = \frac{1+i}{\delta_N}\sqrt{\frac{\sin\theta}{2}}$$

При этом корни k_1, k_2 совпадают с непосредственно рассчитанными в [6] для задач в двумерной постановке. Двумерный характер образующихся волн обусловлен, как показывает анализ выражений (3.1), тождественным обращением одной из компонент скорости, а именно v_η, в нуль. Сохранение порядка приведенного дисперсионного уравнения в предельном двумерном случае, при $k_\eta \to 0$, обусловлено особенностями математического метода построения решения (введения тороидально–полоидального представления), при котором повышается порядок исходной системы уравнений. При непосредственном решении задачи генерации волн в двумерной постановке второй множитель в дисперсионном соотношении не появляется.

Вычисления интегралов (2.1), промежуточные выкладки которых не приведены здесь для краткости, показывают, что в двумерном случае

$$v_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{k_2U_\zeta + kU_\xi}{k(k_1-k_2)}k_1e^{ik_1\zeta} - \frac{k_1U_\zeta + kU_\xi}{k(k_1-k_2)}k_2e^{ik_2\zeta}\right]e^{ik_\xi\xi}dk_\xi$$

$$v_\eta = 0$$

$$v_\zeta = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{k_2U_\zeta + kU_\xi}{k_2-k_1}e^{ik_1\zeta} + \frac{k_1U_\zeta + kU_\xi}{k_2-k_1}e^{ik_2\zeta}\right]e^{ik_\xi\xi}dk_\xi$$

При переходе к однородной жидкости $N \to 0$, ν – конечное, теряется различие в выражениях для корней k_2 и k_3. Дисперсионное уравнение (2.2) в этом случае переходит в дисперсионное уравнение для вязкой жидкости

$$(k^2 + k_\perp^2)[\omega + i\nu(k^2 + k_\perp^2)]^2 = 0$$

а его корни $k_1 = ik_\perp$, $k_2 = \sqrt{i\omega/\nu - k_\perp^2}$, $k_3 = -\sqrt{i\omega/\nu - k_\perp^2}$ характеризуют экспоненциально затухающее внутри жидкости периодическое движение (k_1) и два пограничных слоя, характеристики которых определяются спектральными коэффициентами B и C (2.4) для решения (2.1).

Таким образом, учет стратификации в уравнениях движения и последующее обращение частоты плавучести в нуль позволяют находить решения даже трехмерных задач генерации периодических движений в однородной жидкости, где при непосредственном рассмотрении происходит слияние сингулярных решений и вырождение пограничных течений.

Практический интерес представляет горизонтальное расположение излучающей поверхности ($\varphi = 0$), когда полное дисперсионное уравнение (2.2) и его корни принимают вид

$$[\omega^2(k_{1,2}^2 + k_\perp^2) - N^2k_\perp^2 + i\omega\nu(k_{1,2}^2 + k_\perp^2)^2]\left(k_3^2 + \frac{\omega}{i\nu} + k_\perp^2\right) = 0$$

$$k_{1,2}^2 = -k^2 + \frac{i\sin\theta}{2\delta_N^2}\left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4ik^2\delta_N^2}{\sin^3\theta}}\right], \quad k_3 = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu} - k_\perp^2}$$

В этом случае решение уравнения (2.3) упрощается

$$A = -\frac{k_\xi k_\perp^2U_\xi}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)} - \frac{k_\eta k_\perp^2U_\eta}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)} - \frac{k_2k_\perp^2U_\zeta}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)},$$

$$B = \frac{k_\xi k_\perp^2U_\xi}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)} + \frac{k_\eta k_\perp^2U_\eta}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)} + \frac{k_1k_\perp^2U_\zeta}{(k_1-k_2)(k_\xi^4 + k_\eta^4)}$$

$$C = \frac{k_\xi k_\perp^2 U_\xi}{i(k_\xi^4 + k_\eta^4)} - \frac{k_\eta k_\perp^2 U_\eta}{i(k_\xi^4 + k_\eta^4)}$$

Если излучающая поверхность расположена вертикально ($\varphi = \pi/2$) дисперсионное уравнение и его корни представляются как

$$[\omega^2(k^2 + k_\perp^2) - N^2(k^2 + k_\eta^2) + i\omega\nu(k^2 + k_\perp^2)^2]\left(k^2 + \frac{\omega}{i\nu} + k_\perp^2\right) = 0$$

$$k_{1,2}^2 = -\frac{2i\omega\nu k_\perp^2 + (\omega^2 - N^2)}{2i\omega\nu} \pm \frac{\sqrt{(\omega^2 - N^2) - 4i\omega\nu N^2 k_\xi^2}}{2i\omega\nu}$$

$$k_3 = \frac{1+i}{\delta_N}\sqrt{\frac{\sin\theta}{2}}$$

Значения коэффициентов A, B, C задаются формулами (2.4) с подстановкой $\varphi = \pi/2$.

В критическом случае, когда излучающая поверхность расположена под углом распространения одной из частей пучка волн к горизонту ($\varphi = \lambda\theta$, $\lambda = \pm 1$), решения уравнения Эйлера обращаются в бесконечность. В приближении малой, но конечной вязкости выражения для корней дисперсионного уравнения в связанной с излучающей поверхностью локальной системе координат (ξ, η, ζ) принимают форму

$$\begin{aligned} k_1 &= k_\xi\lambda\,\mathrm{ctg}\,2\theta + \frac{k_\eta^2\,\mathrm{ctg}\,2\theta}{2k_\xi\lambda} + \frac{i\nu\sin\theta}{Nk_\xi\lambda\sin2\theta}\left(k_\xi\lambda\,\mathrm{ctg}\,2\theta + \frac{k_\eta^2\,\mathrm{ctg}\,2\theta}{2k_\xi\lambda}\right)^4, \quad k_\xi\lambda > 0 \\ k_2 &= iK^{1/3}, \quad k_\xi\lambda > 0 \\ k_{1,2} &= \frac{\pm(\sqrt{3}+i)}{2}(-K)^{1/3}, \quad \lambda k_\xi < 0, \quad K = \frac{2N\lambda k_\xi\cos\theta}{\nu}, \quad k_3 = \frac{i+1}{\delta_\nu} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Здесь, как в случае произвольного наклонного положения излучающей поверхности, совокупность трехмерных периодических возмущений также разделяется на две компоненты – волновую (регулярное по вязкости решение k_1, удовлетворяющее условию $\mathrm{Re}k_1 \gg \mathrm{Im}k_i$, $i = 1, 2$) и сингулярную по вязкости, характеризующую внутренний пограничный слой – решения для k_i ($\mathrm{Re}k_1 \gg \mathrm{Im}k_i$, $i = 1, 2$), и периодический (стоксов) пограничный слой – решение k_3. Хотя вид решений (3.2) существенно отличается от (3.1), все выражения остаются конечными. Решения двумерной задачи излучения волн, полученные как предельный случай решения трехмерной задачи, в целом согласуются с [14].

Заключение. Развитый метод позволяет проводить в линейном приближении расчеты генерации внутренних волн плоскими компактными осциллирующими источниками заданной формы во всем диапазоне углов наклона излучающей поверхности ($0 < \varphi < \theta$), в том числе в критическом случае, когда излучающая поверхность расположена под углом распространения одной из частей пучка волн к горизонту ($\varphi = \pm\theta$).

Приведенные выражения для скалярных функций полностью решают задачу генерации трехмерных пучков периодических внутренних волн и двух типов сопутствующих пограничных течений, и позволяют рассчитать все параметры поля возмущений, излучаемых компактной областью произвольной формы. Они согласуются с ранее полученными решениями задачи в двумерной постановке, при этом один из пограничных слоев (периодическое течение Стокса) не возникает.

Построенное решение задачи формирования трехмерных периодических движений допускает переход к приближению однородной жидкости, когда при прямом вычислении происходит слияние сингулярных корней, свидетельствующее о неразрешимости задачи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российской академии наук (Программа ОЭММПУ РАН ОЭ-14 "Динамика и акустика неоднородных жидкостей, газожидкостных смесей и суспензий") и РФФИ (№ 05-05-64090).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с. = *Lighthill J.* Waves in fluids. Cambridge: CUP. 1978.
2. *Voisin B.* Limit states of internal waves beams // J. Fluid Mech. 2003. V. 496. P. 243–293.
3. *Аксенов А.В., Городцов В.А., Стурова И.В.* Моделирование обтекания цилиндра стратифицированной идеальной несжимаемой жидкостью. Препринт ИПМ РАН № 282. М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1986. 59 с.
4. *Hurley D.G., Keady G.* The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 2. Approximate viscous solution // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 119–138.
5. *Hurley D.G., Hood M.J.* The generation of internal waves by vibrating elliptic cylinders. Pt 3. Angular oscillations and comparison of theory with recent experimental observations // J. Fluid Mech. 2001. V. 433. P. 61–75.
6. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Генерация монохроматических внутренних волн в вязкой жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 6. С. 31–40.
7. *Ильиных Ю.С., Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Сравнение точного решения одной задачи возбуждения периодических внутренних волн с экспериментом // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 5. С. 649–655.
8. *Stokes G.G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1851. V. 9. Pt. 2. P. 8–106.
9. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Некоторые точно решаемые задачи излучения трехмерных периодических внутренних волн // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 2. С. 52–61.
10. *Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д.* Генерация пучков трехмерных периодических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 442–452.
11. *Holm D.D., Kimura Y.* Zero-helicity Lagrangian kinematics of three-dimensional advection // Phys. Fluids. A. 1991. V. A3. № 5. P. 1033–1038.
12. *Чашечкин Ю.Д., Кистович А.В.* Классификация трехмерных периодических движений в жидкости // Докл. АН. 2004. Т. 395. № 1. С. 55–58.
13. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Отражение пучков внутренних гравитационных волн от плоской жесткой поверхности // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 607–613.

Москва

Поступила в редакцию
20.X.2005