

УДК 532.58:536.24

© 2006 г. В. В. ПУХНАЧЕВ, С. Б. ДУБИНКИНА

**МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРЫВА ПЛЕНКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ**

Исследуется модель деформации свободной невесомой пленки жидкости, закрепленной по плоскому контуру и подверженной действию термокапиллярных сил. Температура свободной поверхности пленки считается известной функцией координат и времени. Уравнение, описывающее эволюцию толщины пленки в длинноволновом приближении, имеет второй порядок по времени и четвертый – по продольным координатам. Выполнен модельный расчет плоской нестационарной задачи, позволяющий оценить время жизни пленки в зависимости от скорости изменения кривизны профиля температуры на свободной границе. Если характерное время изменения температуры велико по сравнению с периодом собственных колебаний пленки, задачу можно рассматривать в квазистационарном приближении. Такая задача подробно изучена в плоском и осесимметричном случае. Вычислены критические значения кривизны профиля температуры, при которых толщина пленки на оси симметрии обращается в нуль, что приводит к ее разрыву.

Ключевые слова: уравнение тонкого слоя, термокапиллярный эффект, квазистационарное приближение, условия разрыва пленки.

Закономерности движения свободных пленок жидкости важны для понимания процессов, происходящих в пенах. Уравнения движения пленок, содержащих растворимые поверхностно активные вещества, выведены в [1] и исследованы в [2]. В общем случае это двухскоростная гидродинамическая модель, но в предельной ситуации, когда профиль скорости почти однороден по сечению, модель становится односкоростной. Вследствие эффекта Марангони вязкие силы создают касательные напряжения, но диссипация энергии в длинноволновом пределе оказывается исчезающе малой. Если поверхностный градиент ПАВ достаточно велик, то возникающие касательные напряжения могут привести к разрыву пленки. Сходное явление наблюдалось в эксперименте [3], в котором капля ПАВ наносилась на свободную поверхность тонкого кругового слоя жидкости в ее центре, а сам слой покрывал поверхность другой жидкости, налитой в цилиндрический сосуд и несмешивающейся с первой.

В данной работе рассматривается случай, когда ПАВ отсутствуют, но температура в пленке заметно меняется вдоль свободной поверхности. С точки зрения математического моделирования такая ситуация проще, поскольку температура не разделяется на объемную и поверхностную (в отличие от концентрации ПАВ), и нет необходимости вводить в рассмотрение процессы переноса вдоль свободной поверхности, как это сделано в [1]. Однако провести экспериментальное исследование деформации и разрыва свободной пленки жидкости термокапиллярными силами в земных условиях весьма затруднительно. Это повышает роль теоретического анализа задачи.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет слой Ω , верхняя и нижняя границы которого Γ_1^+ и Γ_1^- свободны, а боковая поверхность примыкает к твердой цилиндрической поверхности Σ с образующими, параллельными оси x_3 . Далее x_1, x_2, x_3 обозначают декартовы координаты, t – время, u_1, u_2, u_3 – соответствующие ком-

поненты скорости, p – давление жидкости. Плотность жидкости ρ и кинематический коэффициент вязкости ν предполагаются постоянными, а коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейной функцией температуры T

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(T - T_0) \quad (1.1)$$

где σ_0 , κ и T_0 – положительные постоянные. Предположим, что движение жидкости возникает из состояния покоя и что внешние массовые силы отсутствуют. Кроме того, будем предполагать, что температура свободной поверхности T_Γ является заданной функцией координат x_1, x_2 и времени, одной и той же для обеих компонент свободной границы Γ_t^+ и Γ_t^- . Это предположение позволяет исключить из рассмотрения процессы переноса тепла в жидкости. Наконец, постулируем наличие в течении плоскости симметрии $x_3 = 0$.

Таким образом, в начальный момент невесомая пленка находится внутри цилиндра, касаясь только его боковых поверхностей. При $t > 0$ происходит нагрев пленки по заданному закону. Необходимо найти условия, при которых наступает разрыв пленки за конечное время. Под разрывом пленки подразумевается стремление ее толщины к нулю.

Математическая постановка задачи состоит в определении области Ω_t ($t > 0$) и решения $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений Навье – Стокса при следующих начальных и граничных условиях

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_3 \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla_3 p + \nu \Delta_3 \mathbf{v}, \quad \nabla_3 \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\Omega_0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (1.3)$$

$$-p\mathbf{n} + 2\rho\nu D\mathbf{n} = -2K\sigma\mathbf{n} + \nabla_\Gamma \sigma \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t^+, \quad t > 0 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

$$D = [\nabla_3 \mathbf{v} + (\nabla_3 \mathbf{v})^*] / 2, \quad \nabla_\Gamma = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla)$$

Здесь ∇_3 и Δ_3 означают трехмерные градиент и лапласиан, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_t^+ , D – тензор скоростей деформаций, K – среднюю кривизну поверхности Γ_t^+ , ∇_Γ – поверхностный градиент, V_n – скорость перемещения поверхности Γ_t^+ в направлении \mathbf{n} . Кроме условий (1.3)–(1.6) должны выполняться условия симметрии, т.е. поверхность Γ_t^- должна быть отражением Γ_t^+ относительно плоскости x_1, x_2 ; и v_1, v_2, p – четные, а v_3 – нечетная функции переменной x_3 . После подстановки выражения (1.1) для σ с $T = T_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ в условие (1.4) переходим к начально-краевой задаче с неизвестной границей для системы уравнений Навье–Стокса. Для замыкания постановки задачи следует сформулировать условие на линии пересечения поверхностей Γ_t^+ и Σ , которая, вообще говоря, не является неподвижной. Однако для решения задачи в длинноволновом приближении, как показано ниже, достаточно будет задать лишь величину контактного угла, которая предполагается постоянной.

В общем случае задача (1.1)–(1.6) может быть решена лишь численно. Однако в случае, когда Σ отсутствует, а функция T_Γ имеет вид $T^0 - m_1(t)x_1^2 - m_2(t)x_2^2$ с произвольными

гладкими функциями m_1, m_2 , задача допускает редукцию к задаче с двумя независимыми переменными x_3 и t [4]. При этом свободные поверхности оказываются плоскостями $x_3 = \pm s(t)$, вертикальная компонента скорости не зависит от переменных x_1, x_2 , а горизонтальные компоненты являются линейными функциями указанных координат. В [4] доказано, что при выполнении неравенства $m_1 + m_2 > 0$ для $t \geq \tau > 0$ решение редуцированной задачи со свободной границей существует лишь конечное время t^* . При этом $s(t) = O(t^* - t)^2$, если $t \rightarrow t^*$, т.е. смыкание границ жидкого слоя в момент t^* происходит плавно. В работе [4] также дана оценка времени жизни решения t^* в терминах данных задачи.

Достоинством обсуждаемого решения задачи (1.1)–(1.6) является однородность деформации жидкого слоя по переменным x_1, x_2 , что и обеспечивает независимость его толщины от названных переменных, а недостатком – неограниченность компонент скорости v_1 и v_2 при $x_1, x_2 \rightarrow \infty$. Чтобы обеспечить равномерное утоньшение слоя конечных размеров, его границы должны быть пористыми или движущимися. Режим утоньшения пленки, близкий к равномерному, экспериментально изучался в работе [5]. Пленка была закреплена по трем сторонам прямоугольного контура и растягивалась за счет движения ее четвертой стороны. В [5] также построена приближенная математическая модель изучаемого явления, учитывающая влияние ПАВ, и обсуждены его возможные технологические приложения.

2. Приближение тонкого слоя. Обозначим через ω поперечное сечение цилиндра Σ , через $\partial\omega$ – его границу, и пусть равенство $x_3 = h(x_1, x_2, t)$ задает свободную поверхность Γ_t^+ , так что $2h$ есть толщина пленки в точке $(x_1, x_2) \in \omega$ в момент времени t . Обозначим через $2l$ диаметр плоской области ω и предположим, что для $(x_1, x_2) \in \omega$ и $t > 0$ выполнены соотношения $\max h = \epsilon l$, $|\nabla h| = O(\epsilon)$, $l\Delta h = O(\epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$ (здесь и далее ∇ и Δ означают градиент и лапласиан по переменным x_1 и x_2). Обозначим через δT характерный перепад температур и предположим, что изменение коэффициента поверхностного натяжения, имеющее порядок $k\delta T$, много меньше его среднего значения σ_0 (это предположение для реальных термокапиллярных течений всегда выполнено). Примем, что $k\delta T/\sigma_0 = O(\epsilon^2)$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Задача имеет два характерных линейных масштаба – продольный и поперечный. Соответственно этому имеется два масштаба скорости, причем поперечный масштаб много меньше продольного, $v_3 (v_1^2 + v_2^2)^{-1/2} = O(\epsilon)$. Характерную продольную скорость V можно оценить из баланса касательных напряжений на свободной границе в силу равенств (1.4) и (1.1), что дает $V = \epsilon k\delta T/\rho\nu$. Баланс нормальных напряжений приводит к выражению для характерного давления $p_* = \epsilon\sigma_0/l$. Естественным масштабом длины является величина l , а в качестве масштаба времени возьмем величину $t_* = \rho\nu l/\epsilon k\delta T$.

Перейдем в соотношениях (1.2), (1.4), (1.5) к безразмерным (штрихованным) переменным по формулам

$$x'_i = \frac{x_i}{l}, \quad v'_i = \frac{v_i}{V} \quad (i = 1, 2), \quad x'_3 = \frac{x_3}{\epsilon l}, \quad v'_3 = \frac{v_3}{\epsilon l}, \quad t' = \frac{t}{t_*}, \quad p' = \frac{p}{p_*}, \quad h' = \frac{h}{\epsilon l}$$

Ниже штрихи над безразмерными переменными опускаются. Асимптотическое упрощение постановки задачи начнем с условия (1.4). Проекция векторного равенства (1.4) на нормаль и касательную плоскость к поверхности Γ_t^+ приводит к соотношениям

$$p = -\Delta h + O(\epsilon^2) \quad (x_3 = h) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_3} = -\kappa \frac{\partial T_\Gamma}{\partial x_i} + O(\varepsilon^2) \quad (x_3 = h; i = 1, 2) \quad (2.2)$$

Проектируя первое уравнение системы (1.2) на ось x_3 , получаем соотношение

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = O(\varepsilon^2), \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad 0 < x_3 < h$$

Отсюда следует, что с принятой точностью равенство (2.1) справедливо не только на свободной поверхности, но и во всей области течения.

Обозначим через $2q_i$ ($i = 1, 2$) локальный расход жидкости через поперечное сечение слоя в направлении x_i ,

$$q_i = \int_0^h v_i dx_3$$

через $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ – двумерный вектор расхода и через $\mathbf{u} = (v_1, v_2)$ – проекцию вектора скорости на плоскость x_1, x_2 . В силу несжимаемости жидкости (второе уравнение системы (1.2)) из условия симметрии течения относительно плоскости x_1, x_2 , кинематического условия на свободной границе (1.5) и определения вектора \mathbf{q} будем иметь:

$$h_t + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.3)$$

Это уравнение неразрывности для течения, осредненного по координате x_3 .

Чтобы получить уравнение импульса для осредненного течения, спроектируем первое уравнение (1.2) на плоскость x_1, x_2 и выделим в результирующем равенстве главные члены при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\varepsilon^3 \text{Ma}(\mathbf{u}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_3 \mathbf{u}) = \frac{\varepsilon^2}{\text{C}_\Gamma} \nabla \Delta h + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2} + O(\varepsilon^2) \quad (2.4)$$

$$\text{Ma} = \frac{\kappa \delta T}{\rho v^2}, \quad \text{C}_\Gamma = \frac{\kappa \delta T}{\sigma_0}$$

Здесь Ma – число Марангони (аналог числа Рейнольдса для термокапиллярных движений), C_Γ характеризует степень деформируемости свободной поверхности термокапиллярными силами. Для жидкостей, подобных чистой воде, типичные значения Ma могут быть очень большими, а значения C_Γ , наоборот, весьма малыми. Так, для воды при $T_0 = 293 \text{ K}$ и $\delta T = 1 \text{ K}$ будет $\text{C}_\Gamma = 2.67 \cdot 10^{-3}$. Выбирая 5 см в качестве l , получим $\text{Ma} = 10^4$. Тем самым для значений ε порядка 10^{-1} выражение в левой части (2.4) и первое слагаемое в правой части этого уравнения будут сравнимы с членом $\partial^2 \mathbf{u} / \partial x_3^2$. Далее предполагается, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ величина $\varepsilon^{-2} \text{C}_\Gamma$ стремится к ненулевому пределу; обозначим его через γ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\delta(\mathbf{u}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_3 \mathbf{u}) = \nabla \Delta h + \gamma \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2}, \quad \delta = \varepsilon \text{Ma} \text{C}_\Gamma \quad (2.5)$$

Предельные при $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношения (2.2) эквивалентны векторному равенству

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = -\nabla T_\Gamma, \quad x_3 = h(x_1, x_2, t) \quad (2.6)$$

Рассмотрим жидкий контур, совпадающий в момент t с отрезком $(0, h(x_1, x_2, t))$ оси x_3 , и проинтегрируем равенство (2.5) по этому отрезку. Интеграл от правой части (2.5) вычисляется явно ввиду условия (2.6) и независимости h от x_3 . Для преобразования интеграла от левой части воспользуемся теоремой переноса с учетом уравнения неразрывности $\nabla_3 v = 0$ и определением вектора \mathbf{q} . В результате приходим к уравнению импульса для осредненного течения:

$$\delta \mathbf{q}_t = h \nabla \Delta h - \gamma \nabla T_\Gamma \quad (2.7)$$

Уравнения (2.3), (2.7) образуют замкнутую систему, которую следует решать в области $Q_\tau = \{(x_1, x_2) \in \omega, 0 < t < \tau\}$ при соответствующих начальных и краевых условиях.

Обозначим через N единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\omega$ и предположим, что угол трехфазного контакта равен $\pi/2$. Это влечет условие

$$\frac{\partial h}{\partial N} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega, \quad 0 < t < \tau \quad (2.8)$$

Из условия непроницаемости поверхности Σ , $\mathbf{q} \cdot \mathbf{N} = 0$ для $(x_1, x_2) \in \partial\omega$, $0 < t < \tau$, и равенства (2.7) вытекает, что

$$h \frac{\partial \Delta h}{\partial N} = \gamma \frac{\partial T_\Gamma}{\partial N}, \quad (x_1, x_2) \in \partial\omega, \quad 0 < t < \tau \quad (2.9)$$

В соответствии с (1.3) начальное состояние жидкого слоя есть состояние равновесия. Тогда из (2.3) и (2.8) получается следующие начальные условия для h :

$$h = 1, \quad h_t = 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega, \quad t = 0 \quad (2.10)$$

Вообще говоря, $h = \text{const}$ при $t = 0$, но выбор 1 в качестве начального значения h не снижает общности, поскольку этого можно добиться перенормировкой ϵ . Исключая из уравнений (2.3), (2.7) функцию \mathbf{q} , получаем уравнение для толщины пленки h :

$$\delta h_{tt} + \nabla \cdot (h \nabla \Delta h) = \gamma \Delta T_\Gamma, \quad (x_1, x_2, t) \in Q_\tau \quad (2.11)$$

Условия (2.8)–(2.10) формируют начально-краевую задачу для этого уравнения. Если эта задача решена, то вектор-функция \mathbf{q} восстанавливается равенством

$$\mathbf{q}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\delta} \int_0^t (h \nabla \Delta h - \gamma \nabla T_\Gamma) dt'$$

вытекающим из (2.7) и условия $\mathbf{q}(x_1, x_2, 0) = 0$.

Таким образом, в приближении тонкого слоя задача о движении свободной невесомой пленки по действием термокапиллярных сил свелась к двум задачам, решаемым последовательно. Сначала определяется форма свободной поверхности из решения задачи (2.8)–(2.11), а вместе с ней средние по сечению слоя значения компонент скорости v_1 и v_2 . Для определения функции h не требуется знать детальную зависимость v_1 и v_2 от вертикальной компоненты x_3 . Этим рассматриваемая задача отличается от задачи о движении тонкого слоя вязкой жидкости, граничащего с твердой поверхностью (см. монографию [6] и имеющиеся в ней ссылки). В последнем случае продольная скорость обычно аппроксимируется квадратичной функцией переменной x_3 , что оправдано лишь для малых чисел Рейнольдса. В рассматриваемой ситуации предположение о малости чисел Марангони не требуется. Если эти числа умеренные, то квадратичная по x_3 аппроксимация вектора $\mathbf{u} = (v_1, v_2)$,

$$\mathbf{u} = \frac{\gamma}{6h} (h^2 - 3x_3^2) \nabla T_\Gamma + \frac{\mathbf{q}}{h}$$

дает достаточную точность. Для согласования этой зависимости с условием $\mathbf{u} = 0$ при $t = 0$ необходимо, чтобы $T_\Gamma = \text{const}$ в начальный момент.

Предлагаемый переход позволяет найти распределение скоростей в основной части пленки без априорных предположений о его зависимости от переменной x_3 . Для этого следует решить систему уравнений (2.5) и $\nabla_3 v = 0$ в известной области при подходящих начальных и краевых условиях. Условия прилипания на поверхности Σ при этом не выполняются, что является органическим дефектом приближения тонкого слоя.

Вернемся к задаче (2.8)–(2.11). Перепишем уравнение (2.11) в размерных переменных (с сохранением за ними прежних обозначений)

$$h_{tt} + \frac{\sigma_0}{\rho} \nabla(h \nabla \Delta h) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T_\Gamma \quad (2.12)$$

Примечательно, что в последнее уравнение не входит коэффициент вязкости. Линеаризация уравнения (2.12) на решении $h = h_0 = \text{const}$, допускаемом при ΔT_Γ , дает выражение для частоты собственных длинноволновых колебаний свободного невесомого слоя вязкой жидкости

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{l^2} \left(\frac{h_0 \sigma_0}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

где $l \gg h_0$ – длина волны возмущений. Это выражение совпадает с главной частью комплексной частоты собственных колебаний слоя, вычисленной на основе полных уравнений Навье – Стокса в пределе $h_0/l \rightarrow 0$. Влияние вязкости проявляется в появлении декремента затухания колебаний, однако его величина имеет более высокий порядок малости при $h_0/l \rightarrow 0$, чем вещественная часть частоты.

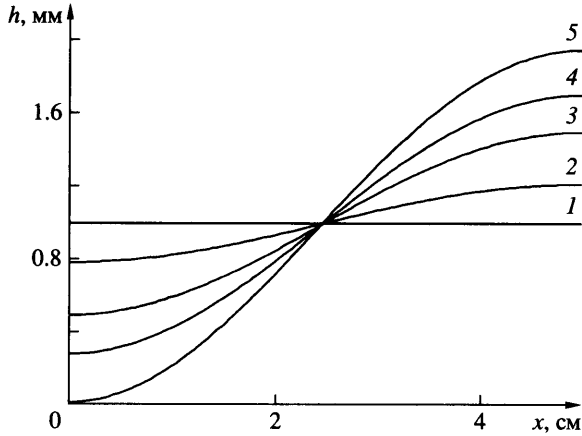
По самому смыслу задачи (2.8)–(2.11) ее решение должно быть положительной функцией. Обращение h в нуль в некоторый момент τ хотя бы в одной точке области ω означает разрыв пленки. Расчеты плоского аналога задачи показывают, что при выполнении неравенства $\Delta T_\Gamma < 0$ найдется такое конечное τ , что решение задачи (2.8)–(2.11) непродолжимо для значений $t > \tau$ в классе положительных функций.

Чтобы очертить границы применимости уравнения (2.12), оценим влияние тяжести и сил плавучести на процессы, происходящие в пленке. Пусть g – ускорение силы тяжести, а $d = (2\sigma_0/\rho g)^{1/2}$ – капиллярная постоянная. Влияние тяжести будет несущественным, если l имеет порядок d и $h \ll d$. Это дает верхнюю оценку для h . Нижняя оценка применимости рассматриваемого приближения есть $h \gg \eta$, где η – толщина двойного электрического слоя. В этом случае можем пренебречь действием расклинивающего давления.

Введем безразмерный параметр $q = \rho g \beta h^2 / \kappa$, где β – объемный коэффициент теплового расширения жидкости. Если $q \ll 1$, можно пренебречь вкладом сил плавучести в формирование поля скоростей и, следовательно, исключить уравнение теплопроводности из числа определяющих уравнений модели. В качестве примера рассмотрим пленку чистой воды при пониженной гравитации ($g = 1 \text{ см/с}^2$) вблизи температуры 298 К. В этом случае $d = 12 \text{ см}$. Если взять $h = 0.1 \text{ см}$, $l = 5 \text{ см}$, $\eta = 10^{-6} \text{ см}$, то неравенства $\eta \ll h \ll l$ будут выполнены, так же как и неравенство $q \ll 1$ (в действительности будет $q = 1.6 \cdot 10^{-5}$).

3. Численное решение модельной нестационарной задачи. Рассмотрим плоский аналог задачи (2.8)–(2.11). В этом случае h зависит лишь от t и $x_1 = x$, а интервал изменения x есть $(-1, 1)$, что не снижает общности. В качестве $T_\Gamma(x, t)$ выберем функцию $kt \cos \pi x$, где $k = \text{const} > 0$. Функция $h(x, t)$ является решением задачи

$$\delta h_{tt} + (h h_{xxx})_x = -\pi^2 k \gamma t \cos \pi x, \quad |x| < 1, \quad 0 < t < \tau \quad (3.1)$$



Фиг. 1. Изменение толщины пленки в нестационарном случае в четырехмодовом приближении для $t = 0, 0.68, 0.91, 1.02, 1.13$ с (линии 1–5)

$$h_x = 0, \quad h_{xxx} = 0, \quad x = \pm 1, \quad 0 < t < \tau \tag{3.2}$$

$$h = 1, \quad h_t = 0, \quad |x| < 1, \quad t = 0 \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1)–(3.3) представимо в виде ряда Фурье по $\cos \pi n x$ с коэффициентами c_n , зависящими от t . Приближенное решение ищется в виде

$$h_m = 1 + \sum_{n=1}^m c_n(t) \cos \pi n x$$

В расчетах выбирались значения $m = 1, 2, 3$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции c_1, c_2 и c_3 , имеет вид

$$\begin{aligned} \delta c_1'' + \pi^4 (c_1 + 3.5c_1c_2 - 9.5c_2c_3) &= -\pi^2 k \gamma t \\ \delta c_2'' + \pi^4 (16c_2 + c_1^2 + 26c_1c_3) &= 0, \quad \delta c_3'' + \pi^4 (81c_3 + 27c_1c_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

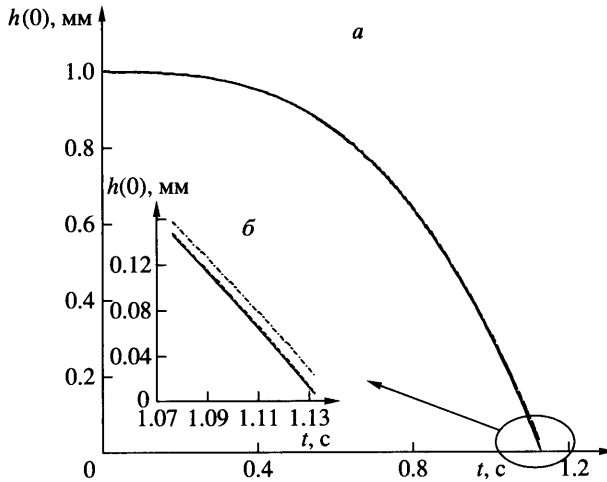
Здесь штрих означает дифференцирование по t . Функции c_n удовлетворяют однородным начальным условиям,

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad c_1' = c_2' = c_3' = 0, \quad t = 0 \tag{3.5}$$

Решение задачи Коши (3.4), (3.5) позволяет построить приближенное решение $h_3(x, t)$ исходной задачи (3.1)–(3.3), в котором учитывается взаимодействие четырех мод, включая нулевую (ей соответствует функция $h_0 = 1$). Положив в уравнениях (3.4) $c_3 = 0$, приходим к приближенному решению $h_2(x, t)$, учитывающему взаимодействие трех мод. Если еще и $c_2 = 0$, мы получаем двухмодовое приближение.

Задача (3.4), (3.5) решалась численно при следующих значениях параметров: $\delta = 1$, $k\gamma = 8 \cdot 10^{-3}$, что соответствует 25% раствору этанола в воде при и $T_0 = 293$ К.

Функция $h_3(x, t)$ монотонно возрастает по переменной x и имеет единственную точку перегиба, положение которой слабо зависит от t (фиг. 1). Функция $h_3(0, t)$ монотонно убывает с ростом t и при некотором $t = \tau$ обращается в нуль (фиг. 2). В этот момент происходит разрыв пленки в ее середине.



Фиг. 2. Различие между двух- (1), трех- (2) и четырехмодовым (3) приближениями для толщины пленки в нестационарном случае: *a* – общий вид, *б* – в окрестности $h = 0$

В расчетах полагалось $l = 5$ см, $h_0 = 0.1$ см, темп нагрева (коэффициент \bar{k} в выражении размерной температуры свободной границы $T_\Gamma = \bar{k} t \cos(\pi x/l)$) $\bar{k} = 6.2$ К/с.

Даже двухмодовое приближение дает удовлетворительную оценку времени жизни пленки, а четырехмодовое – хорошую точность (фиг. 2). Вычисление момента разрыва τ по четырехмодовому приближению приводит к значению $\tau = 1.13$ с.

4. Плоская стационарная задача. В примере, рассмотренном в предыдущем разделе, время жизни пленки τ определяется быстрым темпом нагрева и оказывается много меньше, чем два других характерных временных масштаба: “термокапиллярное” время $\bar{t} = \rho v l / \epsilon k \delta T$ и время собственных колебаний пленки t_0 . Последнее естественно определить как $t_0 = 2\pi/\lambda$, где λ дается формулой (2.13) (основанием к этому служит тот факт, что средняя толщина пленки не зависит от времени). Тогда $t_0 = 22.05$ с. Выбирая в качестве δT максимальную разность температур между серединой и краем пленки (она достигается в момент разрыва и равна 4.7 К), получили оценку снизу термокапиллярного времени $\bar{t} > 28.5$ с, в то время как $\tau = 1.13$ с.

Другой предельный случай соответствует ситуации, когда характерное время изменения температуры свободной поверхности T_Γ много больше, чем t_0 и \bar{t} . В этом случае оправдано квазистационарное приближение: в уравнении (2.11) отбрасывается производная h_{tt} , а время входит в его правую часть как параметр. При медленном изменении T_Γ пленка проходит ряд состояний, близких к стационарным. Эти состояния определяются как решения уравнения (2.11) с $h_{tt} = 0$, удовлетворяющие краевым условиям (2.8), (2.9) и дополнительному условию, задающему объем пленки

$$\int_{\omega} h dx_1 dx_2 = 1$$

Разрешимость полученной нелинейной краевой задачи для функции $h(x_1, x_2)$ удастся доказать, если параметр γ достаточно мал.

Далее рассматриваются решения уравнения (2.11), зависящие лишь от $x_1 = x$. В этом случае уравнение для толщины пленки имеет вид

$$(hh_{xxx})_x = \gamma T_{\Gamma, xx}$$

Как и в предыдущем разделе, будем считать, что область изменения x есть интервал $(-1, 1)$ и что заданная функция T_{Γ} и искомая функция h являются четными.

Наибольшие изменения толщины пленки под действием термокапиллярных сил следует ожидать вблизи невырожденных критических точек функции T_{Γ} [4]. Поэтому естественно выбрать зависимость T_{Γ} от x в виде

$$T_{\Gamma} = -Ax^2 + B$$

где A и B – положительные постоянные. Положительность A означает, что T_{Γ} имеет максимум при $x = 0$ (т.е. пленка нагревается в середине). Тогда, как будет показано ниже, функция h имеет в этой точке минимум.

Обозначим $2A\gamma = a$ и перепишем уравнение для h в виде $(hh''')' = -a$. (Всюду в этом разделе штрих обозначает дифференцирование по x). Последнее уравнение допускает двукратное интегрирование:

$$hh'' - 1/2h'^2 = -a/2x^2 + b \quad (4.1)$$

Требуется найти положительное решение уравнения (4.1) на интервале $(0, 1)$, удовлетворяющее условиям

$$h'(0) = h'(1) = 0 \quad (4.2)$$

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 \quad (4.3)$$

Первое условие (4.2) есть следствие четности функции h , а второе означает, что угол трехфазного контакта равен $\pi/2$. Параметр $a > 0$, пропорциональный кривизне профиля температуры в точке $x = 0$, считается заданным, а постоянная интегрирования b заранее неизвестна. Для ее определения используется дополнительное условие (4.3), задающее площадь поперечного сечения пленки (то, что в правой части (4.3) стоит 1, не снижает общности).

Сведем задачу (4.1)–(4.3) к интегральному уравнению. После деления равенства (1) на $h^{3/2}$ оно преобразуется к виду

$$\left(\frac{h'}{h^{1/2}}\right)' = \frac{1}{h^{3/2}}\left(-\frac{a}{2}x^2 + b\right)$$

Интегрируя это соотношение от 0 до x с использованием первого условия (4.2), получим

$$\frac{h'}{h^{1/2}} = \int_0^x \frac{1}{h^{3/2}}\left(-\frac{a}{2}y^2 + b\right) dy$$

Полагая здесь $x = 1$ и используя второе условие (4.2), будем иметь

$$\int_0^1 \frac{1}{h^{3/2}}\left(-\frac{a}{2}y^2 + b\right) dy = 0$$

Это позволяет выразить неизвестное число b через a и интегралы, содержащие функцию h

$$b = \frac{aJ_2}{J_0}, \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{h^{3/2}} \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) уравнение (4.1) принимает теперь форму

$$hh'' - \frac{1}{2}h'^2 = -\frac{a}{2}\left(x^2 - \frac{J_2}{J_0}\right), \quad 0 < x < 1 \quad (4.5)$$

а его следствие в силу первого условия (4.2) имеет вид

$$\frac{h'}{h^{1/2}} = -\frac{a}{2} \int_0^x \frac{1}{h^{3/2}} \left(y^2 - \frac{J_2}{J_0}\right) dy \quad (4.6)$$

Следствием (4.6) является соотношение

$$h(x) = h(1) + \frac{a}{2} \int_x^1 h^{1/2}(y) \left[\int_0^y \left(z^2 - \frac{J_2}{J_0}\right) \frac{dz}{h^{3/2}(z)} \right] dy$$

содержащее неизвестную величину $h(1)$. Она исключается с помощью третьего условия. В итоге получается требуемое интегральное уравнение

$$h(x) = 1 + \frac{a}{2} \int_x^1 h^{1/2}(y) \left[\int_0^y \left(z^2 - \frac{J_2}{J_0}\right) \frac{dz}{h^{3/2}(z)} \right] dy - \frac{a}{2} \int_0^1 \left\{ \int_x^1 h^{1/2}(y) \left[\int_0^y \left(z^2 - \frac{J_2}{J_0}\right) \frac{dz}{h^{3/2}(z)} \right] dy \right\} dx \quad (4.7)$$

Покажем разрешимость задачи при малых a . Если $a = 0$, то уравнение (4.7) имеет единственное решение $h = 1$. Интегральный оператор в правой части (4.7) при малых a является сжимающим в некотором шаре $|h(x) - 1| \leq \delta$ пространства $C[0, 1]$. Это гарантирует существование решения уравнения (4.7) при малых a , причем $h(1) > h(0) > 0$, и функция $h(x)$ строго монотонно возрастает на интервале $(0, 1)$. Асимптотика h при $a \rightarrow 0$ такова:

$$h = 1 + a \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{12} - \frac{7}{360} \right) + O(a^2) \quad (4.8)$$

Несложно вычислить и следующий член асимптотики (это будет полином 8-й степени, содержащий лишь четные степени x).

5. Качественные свойства решения. Ниже устанавливаются свойства монотонности, которыми обладает любое положительное на интервале $[0, 1]$ решение $h(x)$ задачи (4.1)–(4.3) при $a > 0$. Поскольку

$$hh''' = -ax, \quad 0 < x < 1 \quad (5.1)$$

то функция h''' строго отрицательна на промежутке $(0, 1]$, если $a > 0$. Это означает, что функция h'' имеет самое большое один нуль на отрезке $[0, 1]$. Вследствие (4.5), (4.2) $h''(0) > 0$. Интегрируя равенство (4.5) на интервале $(0, 1)$ и используя условия (4.2), получаем

$$\int_0^1 h'^2 dx = \frac{a}{9} \left(1 - \frac{3J_2}{J_0} \right) \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что $J_0 \leq J_2/3$ и, следовательно, $h''(1) < 0$. Поэтому точка x_* , в которой $h''(x_*) = 0$, лежит строго внутри интервала $[0, 1]$.

Так как $h'(0) = 0$, $h''(0) > 0$, то функция h строго возрастает при достаточно малых $x > 0$. В действительности это ее свойство сохраняется на всем интервале $(0, 1)$. В самом деле, в противном случае нашлось бы значение $\bar{x} \in (0, 1)$ такое, что $h'(\bar{x}) = 0$. Но это противоречит наличию у функции h'' единственного нуля на интервале $[0, 1]$.

Приведем априорные оценки. Первая из них есть простое следствие (5.2):

$$\int_0^1 h'^2 dx \leq \frac{a}{9} \quad (5.3)$$

Далее, поскольку максимальное значение h' достигает в точке x_* , где $h'' = 0$, то из уравнения (4.5) немедленно следует, что

$$h'(x) \leq \sqrt{ax}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Вследствие условия (4.3) найдется такое значение $x_1 \in (0, 1)$, при котором $h(x_1) = 1$. Это позволяет получить представление

$$h(x) = 1 + \int_{x_1}^x h'(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Отсюда и из (4.1) следуют оценки

$$1 - 1/3 \sqrt{a(x_1 - x)} \leq h(x) \leq 1 + 1/3 \sqrt{a(x_1 - x)}$$

Нижняя оценка справедлива при $0 \leq x \leq x_1$, а верхняя – при $x_1 \leq x \leq 1$. Усиливая верхнюю оценку и учитывая монотонность функции h , находим, что

$$h(x) \leq 1 + 1/3 \sqrt{ax}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.4)$$

Нижнюю оценку тоже можно усилить,

$$h(x) \geq 1 - 1/3 \sqrt{ax}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.5)$$

однако в отличие от (5.4) эта оценка содержательна лишь при $a \leq 9$.

Покажем разрешимость уравнения (4.7) при $a < 9$. Интегральный оператор в уравнении (4.7) не является положительным, т.е. не переводит всякую положительную на интервале $[0, 1]$ функцию снова в положительную. Однако это свойство имеет место, если a не очень велико. Кроме того, этот оператор компактен в пространстве $C[0, 1]$.

Обозначим $v = h - 1$. Если переписать уравнение (4.7) в терминах v , то вследствие оценок (5.4), (5.5) при $a < 9$ все решения этого уравнения не выходят за пределы шара $|v| \leq \sqrt{a}/3$. При $a = 0$ отображение $v - aN(v)$ (где N – соответствующий нелинейный компактный оператор) тождественно. Разрешимость уравнения (4.7) при $a < 9$ следует из теоремы Лерэ – Шаудера [7]. При этом положительность функции h на интервале $[0, 1]$ гарантирована неравенствами (5.5) и $v \leq \sqrt{a}/3$.

Найдем достаточное условие единственности. Пусть h_1 и h_2 – два решения задачи (4.1)–(4.3). Каждая из этих функций удовлетворяет уравнению $h_k''' = -axh_k^{-1}$, $k = 1, 2$. Их разность $w = h_1 - h_2$ представляет решение следующей линейной задачи:

$$w''' = \frac{axw}{h_1 h_2}, \quad 0 < x < 1$$

$$w'(0) = w'(1) = 0, \quad \int_0^1 w(x) dx = 0 \quad (5.6)$$

Отсюда следуют очевидные равенство и неравенство

$$\int_0^1 (w''')^2 dx = a^2 \int_0^1 \frac{x^2 w^2}{h_1^2 h_2^2} dx \leq a^2 \int_0^1 \frac{w^2}{h_1^2 h_2^2} dx$$

Если предположить, что

$$h_1 h_2 \geq q^2 > 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.7)$$

то упомянутое неравенство можно усилить:

$$\int_0^1 (w''')^2 dx \leq \frac{a^2}{q^4} \int_0^1 w^2 dx$$

Вследствие условий (5.6) имеет место цепочка неравенств

$$\int_0^1 (w''')^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 (w'')^2 dx \geq \pi^4 \int_0^1 (w')^2 dx \geq \pi^6 \int_0^1 w^2 dx$$

Отсюда и из (5.2) следует, что $w = 0$, если $q > \pi^{-3/2} \sqrt{a}$. Вместе с (5.7) это приводит к следующей условной теореме единственности: если два решения h_1, h_2 задачи (4.1)–(4.3) удовлетворяют неравенству

$$h_1 h_2 > \pi^{-3} a, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.8)$$

то они совпадают.

При $a < 9$ все решения задачи (4.1)–(4.3) допускают оценку (5.5). Используя ее и достаточное условие (5.8), получим, что при $a < 9(1 - \pi^{-3/2})^2$, задача (4.1)–(4.3) имеет единственное решение.

Покажем несуществование решения при больших a . Анализ решения задачи (4.1)–(4.3) показывает, что величина $h(0)$ монотонно убывает с ростом a по крайней мере при малых $a > 0$. Можно ожидать, что с дальнейшим ростом a величина $h(0)$ обратится в нуль, что будет установлено ниже. Доказательство проводится рассуждением от противного, в котором удобнее иметь дело с функцией $u = \sqrt{h}$. Эта функция является решением следующей задачи:

$$u^3 u'' = -\frac{a}{4} \left(x^2 - \frac{J_2}{J_0} \right), \quad 0 < x < 1 \quad (5.9)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad \int_0^1 u^2(x) dx = 1 \quad (5.10)$$

Воспользуемся представлением

$$u'(x) = -\int_x^1 u'' dy = \frac{a}{4} \int_x^1 \left(y^2 - \frac{J_2}{J_0} \right) \frac{dy}{u_3}$$

вытекающем из (5.9), (5.10), и оценим снизу входящий в него интеграл с помощью неравенств (5.4) и $J_0 \leq J_2/3$. В итоге получим, что при $1/\sqrt{3} \leq x \leq 1$ справедлива оценка

$$u'(x) \geq \frac{a}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{3} \right)^{-3/2} \int_x^1 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) dy = \varphi(a)x(1-x^2) \quad (5.11)$$

$$\varphi(a) = \frac{a}{12} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{3} \right)^{-3/2}$$

Неравенство (5.11) позволяет получить достаточно грубую оценку снизу функции $u(x)$ на интервале $[1/\sqrt{3}, 1]$:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(1/\sqrt{3}) + \int_{1/\sqrt{3}}^x u'(y) dy \geq \varphi(a) \int_{1/\sqrt{3}}^x (y - y^3) dy = \\ &= \varphi(a) \frac{1}{4} \left(2x^2 - x^4 - \frac{5}{9} \right) \equiv \varphi(a)\eta(x) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 u^2(x) dx \geq \varphi^2(a) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \eta^2(x) dx \quad (5.13)$$

где $\eta(x)$ – полином 4-й степени, определенный последним равенством в (5.12).

Поскольку $\varphi(a) = \sqrt{3} a^{1/4} [1 + O(a^{-1/2})]/4$ при $a \rightarrow \infty$, то при достаточно больших a неравенство (5.13) придет в противоречие с условием (5.10). Значение a^* , при котором это произойдет, согласно рассуждению может быть оценено сверху как решение уравнения

$$\varphi^2(a^*) \int_{1/\sqrt{3}}^1 \eta^2(x) dx = 1 \quad (5.14)$$

Решая уравнение (5.17), получаем $a^* < 5966251$. Найденное верхнее значение a^* на несколько порядков больше реального, полученного в результате численного решения задачи. Однако результат о несуществовании решения задачи (4.1)–(4.3) при больших a имеет принципиальное значение.

6. Особое решение плоской стационарной задачи. Уравнение (4.1) эквивалентно (5.1). Поскольку последнее уравнение инвариантно относительно преобразования растяжения $x \rightarrow cx$, $h \rightarrow c^2 h$, то в нем можно понизить порядок и другим способом, попутно освободившись в результирующем уравнении от параметра a .

Перейдем в уравнении (5.1) к новой независимой переменной t и новой искомой функции w по формулам

$$x = e^{-t}, \quad h = a^{1/2} e^{-2t} w(t) \quad (6.1)$$

Функция w , вследствие (5.1), (4.2), (4.3) представляет решение следующей задачи:

$$w(\ddot{w} - 3\dot{w} + 2w) = 1, \quad t > 0 \quad (6.2)$$

$$\dot{w} = 2w \quad t = 0, \quad e^{-t}(\dot{w} - 2w) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} w(t) dt = a^{-1/2} \quad (6.4)$$

Здесь и далее точка обозначает дифференцирование по t .

Рассмотрим асимптотику решения уравнения (6.2) при $t \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что это уравнение имеет два семейства решений с экспоненциальным поведением при $t \rightarrow \infty$, а именно

$$w = C_1 e^t - \frac{1}{6C_1} e^{-t} + O(e^{-3t}), \quad w = C_2 e^{2t} - \frac{1}{24C_2} e^{-2t} + O(e^{-6t})$$

где C_1 и C_2 – произвольные ненулевые постоянные. Этим решениям соответствуют решения уравнения (5.1), регулярные (и даже аналитические) в точке $x = 0$. Оказывается, что уравнение (6.2) имеет еще одно семейство решений, уже со степенной асимптотикой

$$w = t^{1/2} + C_0 + O(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty \quad (6.5)$$

Соответствующее (6.5) семейство решений уравнения (5.1) имеет особенность при $x = 0$

$$h = a^{1/2} x^2 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{1/2} + C_0 a^{1/2} x^2 + O \left[x^2 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1/2} \right] \quad (6.6)$$

Как видно из (6.6), функция $h \in C^1[0, 1]$, более того, $h'(0) = 0$ (при этом предполагается, что асимптотику (6.6) можно дифференцировать, хотя это нуждается в доказательстве). Тем самым одно из условий (4.2) оказывается выполненным, а выполнение условия $h'(1) = 0$ позволит найти постоянную C_0 при данном a . Наконец, из условия (4.3) найдем то значение $a = a_*$, при котором уравнение (5.1) имеет решение с асимптотикой (6.6) – особое решение, где $h(0) = 0$, но $h''(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$.

Подставляя асимптотическое разложение (6.6) в уравнение (4.1), убедимся, что $b = 0$, и это уравнение принимает форму

$$hh'' - 1/2h'^2 = -1/2ax^2$$

Последнее уравнение допускает преобразование растяжения и, как следствие, понижение порядка с помощью подстановки (6.1)

$$w\ddot{w} - w\dot{w} - 1/2\dot{w}^2 = -1/2, \quad t > 0$$

При этом условие (6.3), эквивалентное равенству $h'(1) = 0$, остается; условие же (6.4) выполнено автоматически в силу (6.5). Уравнение для $w(t)$ упрощается после введения новой искомой функции $p = \sqrt{w}$

$$p^3(\ddot{p} - \dot{p}) = -1/4, \quad t > 0 \quad (6.7)$$

Условия (6.3), (6.4) в терминах функции p принимают вид

$$\dot{p} = p \quad (t = 0), \quad \int_0^{\infty} e^{-3t} p^2(t) dt = a^{-1/2} \quad (6.8)$$

Теперь остается понизить порядок в уравнении (6.7) и исследовать возникающую задачу для уравнения 1-го порядка. Положим $\dot{p} = q(p)$, тогда

$$p^3 q \left(\frac{dq}{dp} - 1 \right) = -\frac{1}{4}, \quad p > p_0 \quad (6.9)$$

$$q = p \quad (p = p_0) \quad (6.10)$$

Величина p_0 определяется как абсцисса (и ордината) точки пересечения биссектрисы 1-го квадранта плоскости p, q с интегральной кривой уравнения (6.9), выходящей из бесконечности с асимптотикой

$$q = 1/4 p^{-3} + O(p^{-7}), \quad p \rightarrow \infty \quad (6.11)$$

допускающей дифференцирование.

Согласно (6.11), функция q монотонно убывает при достаточно больших p . Покажем, что это свойство сохраняется при всех $p > 0$. Продифференцировав уравнение (6.9) и сократив результирующее равенство на p^2 , получим

$$qp \frac{d^2 q}{dp^2} + p \frac{dq}{dp} \left(\frac{dq}{dp} - 1 \right) + 3q \left(\frac{dq}{dp} - 1 \right) = 0 \quad (6.12)$$

Из (6.12) следует, что интегральная кривая с асимптотикой (6.11) не может пересечь полуось $p \geq 0$. Действительно, если бы такое произошло при некотором p_0 , то нашлось бы такое $p_1 > p_0$, что $dq/dp = 0$ при $p = p_1$. Но это невозможно, поскольку тогда $d^2 q/dp^2 \leq 0$ в точке p_1 , где функция q имеет максимум $q_1 > 0$, а это противоречит равенству (6.12).

Отсутствие максимумов функции $q(p)$, принимающей положительные значения при всех $p > 0$, означает, что интегральная кривая пересечет прямую $q = p$. Тем самым определено значение p_0 в условии (6.10). Это значение единственно, так как функция $q(p)$ монотонно убывает при всех $p > 0$ (последнее опять-таки следует из отсутствия максимумов положительной при $p > 0$ функции $q(p)$, имеющей асимптотику (6.11) при $p \rightarrow \infty$).

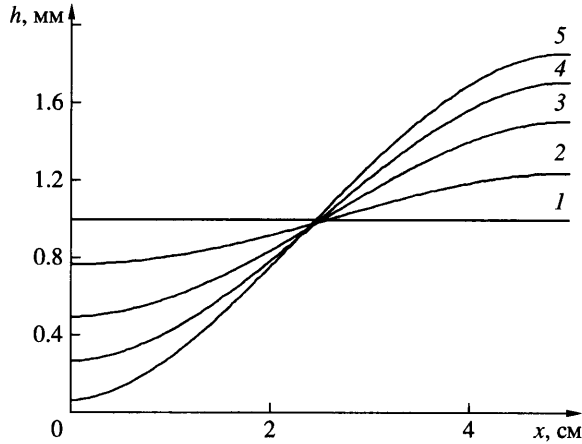
Итак, задача (6.9)–(6.11) имеет и притом единственное решение, причем $q(p)$ строго монотонно убывает при $p \geq p_0$. Это свойство гарантирует обратимость сделанной замены переменных. Из равенств $\dot{p} = q(p)$, (6.8) и (6.10) вытекает, что

$$t = \int_{p_0}^p \frac{dr}{q(r)}, \quad p > p_0$$

Теперь условие (6.8) может быть переписано в виде

$$\int_{p_0}^{\infty} \frac{p^2}{q(p)} \exp \left[-3 \int_{p_0}^p \frac{dr}{q(r)} \right] dp = a^{-1/2} \quad (6.13)$$

Подставляя в (6.13) решение задачи (6.9)–(6.11) и вычисляя соответствующие интегралы, находим критическое значение a_* .



Фиг. 3. Изменение толщины пленки по координате в квазистационарном плоском случае в зависимости от кривизны профиля температуры: $a = 0, 0.0634, 0.145, 0.204, 0.224 \text{ К/см}^2$ (линии 1–5)

Приведем расчет стационарного профиля пленки. Функция $h(x)$ определялась из интегрального уравнения (4.7), которое решалось численно методом итераций. Если $a = 0$, то $h = 1$. При малых a в качестве начального приближения выбирался главный член асимптотики h в виде полинома 4-й степени (4.8). Далее устраивалось продолжение решения по параметру a . При приближении a к критическому значению a_* , при котором $h(0) = 0$, итерации сходятся медленно. Поэтому само критическое значение вычислялось по формуле (6.13) после решения задачи (6.9)–(6.11). Оказалось, что $a_* = 39.2$.

Графики функции $h(x)$ (в размерных переменных) при различных значениях параметра a приведены на фиг. 3. Связь критического значения параметра a_* с физическими данными задачи дается формулой

$$a_* = \frac{2A_* \kappa l^4}{\sigma_0 h_0^2} \quad (6.14)$$

где $2A_*$ – предельно допустимая кривизна профиля температуры свободной границы, h_0 – средняя толщина пленки. При $a_* = 39.2$, $l = 5 \text{ см}$, $h_0 = 0.1 \text{ см}$, находим, что для 25%-ного раствора этанола в воде вблизи 293 К критическое значение кривизны T_Γ равно 0.226 К/см^2 , а для чистой воды – 0.284 К/см^2 .

7. Осесимметричная стационарная задача. В осесимметричном случае функция h зависит лишь от $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Предполагая, что $T_\Gamma = -Cr^2 + D$, и обозначая $4C\gamma = a > 0$, получаем аналогичную (4.1)–(4.3) задачу

$$h \left[\frac{1}{r} (rh_r)_r \right]_r = -ar, \quad 0 < r < 1 \quad (7.1)$$

$$h'(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0), \quad h'(1) = 0 \quad (7.2)$$

$$\int_0^1 rh(r) dr = \frac{1}{2} \quad (7.3)$$

Последнее условие означает, что безразмерный объем жидкости в пленке задан и равен π .

Задача (7.1)–(7.3) сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 h(r) = & 1 - a \int_0^r \frac{1}{s} \left\{ \int_0^s \left[\int_0^t \frac{udu}{h(u)} \right] dt \right\} ds + \\
 & + \frac{ar^2}{2} \int_0^1 s \left[\int_0^s \frac{tdt}{h(t)} \right] ds - \frac{a}{3} \int_0^1 s \left[\int_0^s \frac{tdt}{h(t)} \right] ds + \\
 & + 2a \int_0^1 \left(\int_0^r \frac{1}{s} \left\{ \int_0^s \left[\int_0^t \frac{udu}{h(u)} \right] dt \right\} ds \right) dr
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Основная информация о решениях уравнения (7.4) может быть получена численными методами. Однако кое-что можно сделать и аналитически. Прежде всего это разрешимость уравнения (7.4) при малых a и асимптотика решения при $a \rightarrow 0$

$$h = 1 + a \left(-\frac{r^4}{32} + \frac{r^2}{16} - \frac{1}{48} \right) + O(a^2) \tag{7.5}$$

Кроме того, удастся доказать, что функция h монотонно возрастает на интервале $(0, 1)$. Действительно, функция $g = rh_r$ удовлетворяет уравнению

$$g_{rr} - \frac{g_r}{r} = -\frac{ar^2}{h}$$

кроме того, $g(1) = 0$ в силу (7.3) и $g = kr^2 + O(r^4)$ при $r \rightarrow 0$, поскольку h – четная функция r . Функция g не может достигать отрицательного минимума ни внутри интервала $(0, 1)$ (поскольку это вступает в противоречие с уравнением для g), ни в его конечных точках, где $g = 0$. Значит $g = rh_r > 0$ при $0 < r < 1$.

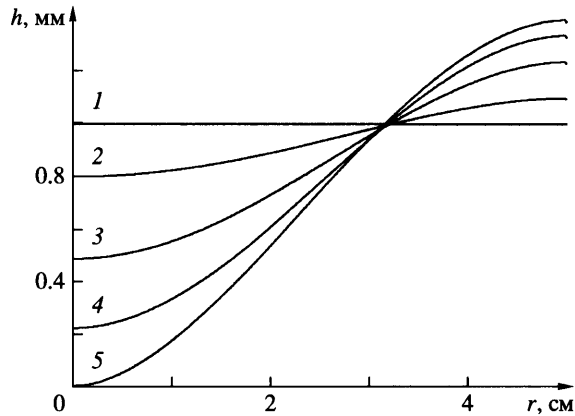
Из этих же соображений следует, что функция rh , имеет единственный положительный максимум на интервале $(0, 1)$, причем $(rh_r)_r > 0$ при $0 < r < r_*$ и $(rh_r)_r < 0$ при $r_* < r < 1$, где r_* – точка максимума. Далее, используя свойство монотонности h , можно получить из (7.4) оценку сверху функции h на интервале $[0, 1]$ в терминах $h(0) = h_0 > 0$. Наконец, удастся найти главный член асимптотики особого решения задачи (7.1)–(7.3) (т.е. решения, в котором $h(0) = 0$) при $r \rightarrow 0$, а именно

$$h = \left(\frac{a}{2} \right)^{1/2} r^2 \left(\ln \frac{1}{r} \right)^{1/2} + O(r^2)$$

Эта асимптотика отличается от асимптотики особого решения (6.6) плоской задачи лишь множителем $2^{-1/2}$.

Интегральное уравнение (7.4) решалось численно методом итераций. При малых a начальное приближение определялось по формуле (7.5). Для получения решения при больших значениях a осуществлялось продолжение по параметру. Решение непродолжимо для $a > a_* = 32.4$, поскольку $h(0) = 0$, если $a = a_*$. Графики функции $h(x)$ (в размерных переменных) при различных значениях параметра a приведены на фиг. 4.

Возвращаясь к размерным переменным, получим связь между критическим значением a_* и средней кривизной $2C_*$ профиля температуры свободной границы $T_\Gamma = -Cr^2 + D$ в точке $r = 0$. Она по-прежнему дается формулой (6.14), но в осесимметричном случае значение a_* меньше, чем в плоском. В соответствии с этим при тех значениях параметра



Фиг. 4. Изменение толщины пленки по координате в квазистационарном осесимметричном случае в зависимости от кривизны профиля температуры: $a = 0, 0.0466, 0.114, 0.165, 0.187 \text{ К/см}^2$ (линии 1–5)

ров, что и в конце разд. 4, будет $2C_* = 0.189 \text{ К/см}^2$ для раствора этанола и $2C_* = 0.237 \text{ К/см}^2$ для чистой воды.

Заключение. В приближении тонкого слоя рассмотрена задача о деформации свободной невесомой пленки термокапиллярными силами. Зависимость температуры свободной поверхности пленки T_Γ от продольных координат x_1, x_2 и времени t считается заданной. Для толщины пленки h получено замкнутое дифференциальное уравнение 2-го порядка по t и 4-го по x_1, x_2 . Если функция $h(x_1, x_2, t)$ определена, поле скоростей в пленке восстанавливается из решения системы уравнений типа пограничного слоя. Так как уравнение для h содержит функцию T_Γ лишь под знаком лапласиана по переменным x_1, x_2 , то при $\Delta T_\Gamma = 0$ термокапиллярные силы не влияют на длинноволновые возмущения пленки. Если T_Γ – линейная функция координат, течение в пленке описывается нестационарным аналогом известного решения [8] при неизменной толщине пленки. Наибольшие изменения толщины происходят вблизи критических точек поля температур T_Γ .

Подробно исследована стационарная задача в плоском (h зависит только от x_1) и осесимметричном случаях. Степень деформации пленки существенно зависит от параметра a , пропорционального кривизне профиля температуры на свободной поверхности в начале координат.

В рассмотренном случае $a > 0$, что соответствует нагреву пленки в середине. С ростом a минимальная толщина пленки $h(0)$ уменьшается и при некотором $a = a_*$ обращается в нуль – пленка разрывается. Был найден критический градиент температуры, при котором пленка рвется и его зависимость от параметров задачи $a_* = 2 A_* \kappa l^4 / (\sigma_0 h_0^2)$.

Физические значения критической кривизны профиля T_Γ для жидкостей, подобных воде, имеют порядок 0.2 К/см^2 для пленок диаметра 10 см и толщины 0.1 см. В нестационарном случае время жизни пленки определяется параметром a и темпом нагрева. В типичной ситуации это время имеет порядок нескольких секунд, что соответствует оценке, полученной в [4] из анализа точного решения задачи о деформации бесконечного слоя при квадратичной зависимости функции T_Γ от x_1, x_2 .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 04-01-00355) и государственной поддержке ведущих научных школ РФ (№ НШ-902.2003.1). Работа В.В. Пухначева

чева над статьей была также поддержана Институтом математики Общества Макса Планка (г. Лейпциг).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воинов О.В.* Уравнения движения свободных жидких пленок и модель их плоскопараллельного утоньшения // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 2. С. 285–288.
2. *Воинов О.В.* О принципах двухскоростной капиллярной гидродинамики тонких пленок. ИММС СО РАН. Депонировано в ВИНТИ. 1990. № 4131–В90.
3. *Костарев К.Г., Шмыров А.В.* Стационарные разрывы поверхности двухслойной системы несмешивающихся жидкостей // Конвективные течения. Изд. ПГПУ. Пермь: 2005. С. 60–72.
4. *Pukhnachov V.V.* Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // Europ. J. Appl. Math. 2002. V. 13. № 2. P. 205–224.
5. *Carotenuto L., Antanovskii L.K.* Influence of surfactants on the thinning of a vertical free liquid film with rims fixed at a frame // Microgravity Quart. 1995. V. 5. № 4. P. 199–209.
6. *Алексеев С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г.* Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, 1992. 255 с.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
8. *Бирх Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.

Новосибирск

Поступила в редакцию
23.VIII.2005