МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 2006

УДК 532.546

© 2006 г. Б. НОТАНЖЕ, П.Е. СПЕСИВЦЕВ, Э.В. ТЕОДОРОВИЧ

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФРОНТА ВЫТЕСНЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Проводится исследование поведения границы раздела при двухфазном течении несмешивающихся жидкостей в случайно-неоднородной пористой среде. Среда описывается распределением проницаемости, представляющим из себя случайное поле с заданными статистическими характеристиками. При использовании предлагаемого подхода оказывается возможным связать статистические характеристики границы раздела со статистическими характеристиками поля проницаемости и свойствами фаз. На основании знания этой связи подсчитана важная характеристика двухфазного течения – среднее распределение водонасыщенности вблизи границы раздела.

Ключевые слова: фронт вытеснения, случайное поле проницаемости, стохастический подход, дисперсия флуктуаций формы фронта.

Целью работы является исследование несмешивающихся двухфазных течений в случайно-неоднородной среде в применении к задаче вытеснения, актуальной в нефтяной индустрии при поисках путей повышения нефтеотдачи. За счет случайной неоднородности среды такие характеристики процесса вытеснения, как водонасыщенность и выход нефти, являются случайными функциями, и представляет интерес описание поведения их усредненных значений исходя из заданных статистических свойств среды.

Наиболее распространенным методом решения подобных задач является численное решение соответствующих уравнений при заданной реализации поля проводимости среды с последующим усреднением по реализациям поля проводимости – это так называемый метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Достижение достаточной точности в рамках этого метода требует больших затрат машинного времени, вследствие чего его возможности оказываются ограниченными.

Другой подход основывается на идее построения уравнений, описывающих поведение системы в крупномасштабной области при учете усредненного влияния мелкомасштабных явлений. Это так называемые методы стохастической гомогенизации, апскейлинга, эффективных характеристик среды (см. например, [1]), которые оказались достаточно хорошо развиты в применении к однофазным течениям, однако их формулировка для случая двухфазных течений не всегда оказывается простой [2].

В связи с этим представляет интерес метод стохастического анализа двухфазных течений, основанный на нахождении статистических характеристик течений. В частности, в [3–5] рассматривалось поведение фронта вытеснения и дисперсия флуктуаций формы фронта вытеснения в заданном случайном поле скоростей, соответствующем однофазным фильтрационным течениям в случайно-неоднородной пористой среде. Такой подход не учитывает влияния водонасыщенности на скорость фильтрации за счет зависимости восприимчивости от насыщенности, имеющей место в модели Баклея-Леверетта. На необходимость учета этой связи (названной "вязкой связью") было обращено внимание в [6], а существенное влияние вязкой связи на эволюцию насыщенности подтверждено в [7]. Именно учет этой связи может приводить к неустойчивости плоского фронта вытеснения (неустойчивости Сафмена-Тейлора [8]). Анализ устойчивости плоского фронта вытеснения для случая двумерной задачи и однородной среды был выполнен в

[9]. Авторы для фурье-компонент возмущений границы раздела $\delta x(q, t)$ получили уравнение

$$\partial_t \delta x(q, t) = c_0 A|q|\delta x(q, t), \quad A = \frac{M-1}{M+1} \tag{0.1}$$

где M – отношение подвижностей на задней стороне фронта вытеснения и передней. Отсюда следует, что при вытеснении более подвижной жидкостью менее подвижной ($M > 1$) возникает неустойчивость плоского фронта, приводящая к образованию пальцеобразных структур.

Исследование соответствующей двумерной задачи для случайно-неоднородной среды проводилось в [10]. Ниже исследуется эта же задача в пространстве произвольной размерности и используется улучшенная теория возмущений при вычислении скоростей фильтрационного потока [11], что позволяет получить более корректные результаты для поведения насыщенности вблизи фронта вытеснения и дисперсии флуктуаций формы фронта.

1. Математическая постановка задачи. В основе математической модели процесса двухфазной фильтрации при пренебрежении гравитационными и капиллярными явлениями лежит система уравнений Баклея – Леверетта [12, 13], описывающая процесс вытеснения нефти водой. Эта система включает в себя уравнение баланса водонасыщенности, закон сохранения массы (объема) обеих фаз и обобщенный закон Дарси для двухфазной системы. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\phi\frac{\partial S}{\partial t} + F'(S)\mathbf{u}\nabla S = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla\mathbf{u} = 0; \quad \mathbf{u} = -\lambda\nabla p \tag{1.2}$$

здесь ϕ – пористость, S – водонасыщенность, определенная как доля заполненного водой порового пространства, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ – суммарная скорость фильтрации обеих фаз (воды и нефти), $F(S)$ – функция распределения потоков Баклея – Леверетта, зависящая только от водонасыщенности (в рассматриваемой задаче явный вид этой функции оказывается несущественным).

Предполагается, что коэффициент проницаемости λ для двухфазной системы зависит от насыщенности S и в случайно-неоднородной среде является также случайной функцией координат. Обычно принимается

$$\lambda(\mathbf{r}, S) = \kappa(\mathbf{r})K(S) \tag{1.3}$$

где $\kappa(\mathbf{r})$ – случайная функция координат с заданными статистическими свойствами, а K зависит только от водонасыщенности. (В дальнейшем принимается $\phi = \text{const}$, что соответствует замене функции пористости на ее усредненное значение и не уменьшает существенно общности рассмотрения.)

Следует отметить, что ввиду зависимости проницаемости λ от насыщенности согласно (1.3) скорость фильтрации $\mathbf{u}$ зависит от S, вследствие чего уравнения (1.1), (1.2) оказываются сильно связанными и учет этой связи оказывается весьма существенным.

В однородной среде решение задачи о движении фронта вытеснения строится методом характеристик, при этом оказывается, что решение для водонасыщенности следует искать в классе обобщенных решений, содержащих разрывы на фронте вытеснения [13]. В этом случае задача сводится к нахождению скорости распространения разрыва и значений функции по обе стороны разрыва. В частности, существует решение, соответствующее плоскому фронту вытеснения (решение Баклея – Леверетта).

Хотя плоский фронт вытеснения в ряде случаев оказывается неустойчивым (неустойчивость Саффмена-Тейлора), тем не менее найденное решение может быть полезным в качестве нулевого приближения при построении теории возмущений в задаче, когда возмущение обусловлено учетом неоднородности среды или дополнительных эффектов, например гравитации или капиллярности.

Предметом исследования будет задача вытеснения в случайно-неоднородной среде в пространстве произвольной размерности d (в реальности $d = 1, 2, 3$, но случай $d = 1$ является тривиальным).

В дальнейшем вводятся следующие обозначения. Совокупность пространственных координат $\mathbf{r}$ (d-мерный вектор) имеет компоненты $\{x_i\}$ (латинские индексы принимают значения $i = 1\ldots d$), где ось x_1 направлена вдоль усредненного направления распространения фронта; компоненты ортогонального к оси x_1 $(d-1)$-мерного вектора $\mathbf{y}$ обозначим через x_α, где греческие индексы принимают значения ($\alpha = 2\ldots d$). В этих обозначениях вектор градиента имеет компоненты $\{\partial_i\} = \{\partial_1, \partial_\alpha\}$, а возникающий при выполнении преобразований Фурье волновой вектор $\mathbf{Q} = \{q_1, \mathbf{q}\}$ имеет компоненты $\{q_1, q_\alpha\}$.

Пусть уравнение поверхности разрыва (поверхности фронта вытеснения) имеет вид $\varphi(x_1, \mathbf{y}, t) = 0$. Это уравнение может быть разрешено относительно x_1 и записано в виде

$$\varphi(x_1, \mathbf{y}, t) = x_1 - h(\mathbf{y}, t) = 0$$

Значению $\varphi < 0$ соответствует область, занимаемая первой жидкостью (водой), а $\varphi > 0$ – область, занимаемая второй жидкостью (нефтью). Передней и задней сторонам граничной поверхности соответствуют $\varphi = +0$ и $\varphi = -0$.

Из соответствующего уравнению (1.1) интегрального условия на границе раздела жидкостей (поверхности разрыва) следует

$$V_n = \frac{u_n}{\phi}\frac{F(S_1) - F(S_2)}{S_1 - S_2} \tag{1.4}$$

где S_1 и S_2 – значения насыщенностей на задней и передней сторонах поверхности раздела, V_n – скорость перемещения поверхности (направленная по нормали к ней), u_n – нормальная к поверхности составляющая скорости фильтрации.

Из теории поверхностей следуют выражения для вектора нормали к поверхности $\mathbf{n}$ и скорости V_n

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_\alpha h(\mathbf{y}, t)|^2}}\{1, -\partial_\alpha h(\mathbf{y}, t)\} \\ V_n &= -\frac{\partial_t\varphi}{|\nabla\varphi|} = \frac{\partial_t h(\mathbf{y}, t)}{\sqrt{1 + |\partial_\alpha h(\mathbf{y}, t)|^2}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Подстановка (1.5) в (1.4) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t h(\mathbf{y}, t) &= \frac{1}{\phi}\frac{F(S_1) - F(S_2)}{S_1 - S_2}(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi)|_{\varphi = 0} = \frac{c_0}{u_0}(u_1 - u_\alpha\partial_\alpha h)|_{\varphi = 0}, \\ c_0 &= \frac{u_0}{\phi}\frac{F(S_1) - F(S_2)}{S_1 - S_2} \end{aligned} \tag{1.6}$$

где u_0 – направленная вдоль оси x_1 средняя скорость.

Непосредственный интерес представляет уравнение, описывающее флуктуации фронта вытеснения, которое следует из (1.6). В линейном приближении достаточно сохранить члены нулевого и первого порядка по h, т.е. представить уравнение (1.6) в виде

$$\partial_t h = L\cdot h + f \tag{1.7}$$

где L – некоторый линейный дифференциальный оператор.

Из (1.6) видно, что для нахождения этого уравнения в формуле $(u_i\partial_i\varphi) = (u_1 - u_\alpha\partial_\alpha h)$ следует оставить только члены нулевого и первого порядка по h для u_1 и нулевого порядка в выражении для u_α.

Если с помощью уравнений (1.2) найти скорость фильтрации $\mathbf{u}$ как функцию S и подставить в (1.6), то получится уравнение для функции $h(\mathbf{y}, t)$, задающей форму граничной поверхности раздела. Принимается, что значения насыщенностей по обе стороны границы раздела S_1 и S_2 являются заданными константами (фронт вытеснения является изосатой).

Задача о вычислении скорости фильтрации на границе раздела в случайно-неоднородной среде обычно рассматривается в низшем приближении теории возмущений, использующей разложение по $\delta\lambda$. Усложнение рассмотрения связано с тем, что при вычислении скорости фильтрации следует учитывать флуктуации проницаемости как за счет пространственной неоднородности среды, так и за счет изменения проницаемости, связанной с флуктуациями поверхности раздела

$$\delta\lambda(x_1, \mathbf{y}) = [\kappa(x_1, \mathbf{y}) - \langle\kappa\rangle]\langle K(S)\rangle + \langle\kappa(x_1, \mathbf{y})\rangle[K(S) - \langle K(S)\rangle]$$

Следуя [10], представляется естественным в низшем приближении теории возмущений записать возмущения скорости в виде суммы двух слагаемых, описывающих возмущение за счет изменения насыщенности, связанные с флуктуацмями границы раздела $\delta\mathbf{u}_a$ и с пространственной неоднородностью среды $\delta\mathbf{u}_b$

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}_a + \delta\mathbf{u}_b \tag{1.8}$$

В двумерном случае при вычислении вклада $\delta\mathbf{u}_a$ авторы [10] использовали выражение, полученное в низшем приближении теории возмущений при анализе устойчивости плоского фронта вытеснения [9] и в двумерном случае пришли к уравнению для фурье-образа возмущений границы раздела $\delta h(q, t)$ вида

$$\partial_t\delta h(q, t) = c_0 A|q|\delta h(q, t), \quad A = \frac{K(S_1) - K(S_2)}{K(S_1) + K(S_2)} \tag{1.9}$$

совпадающее с (0.1). Вклад флуктуаций скорости за счет случайной неоднородности среды сводится к добавлению к правой части (1.7) некоторой случайной функции с заданной статистикой, определяемой статистикой функции $\kappa(x, y)$.

2. Вычисление скорости фильтрационного потока. При традиционном решении задачи о нахождении скорости фильтрационного потока из системы уравнений (1.2) исключается скорость, и полученное уравнение для давления вида $\nabla[\lambda(\mathbf{r}, S)\nabla p(\mathbf{r}, S)] = 0$ решается по теории возмущений. В результате выражение для давления оказывается представленным в виде ряда по степеням $\delta\lambda/\langle\lambda\rangle$, при этом обычно ограничиваются низшим приближением теории возмущений. В дальнейшем выражение для скорости определяется с помощью закона Дарси.

Задачей исследования является уточнение низшего приближения теории возмущений путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений, в результате чего получается ряд теории возмущений не по степеням $\delta\lambda/\langle\lambda\rangle$, а по степеням $\delta\lambda/\lambda = \delta\ln\lambda$. В отличие от традиционно применяемого способа нахождения скорости фильтрации, в предложенном ранее одним из авторов подходе [11] (см. также [14]) на первом шаге исключается давление и полученное интегральное уравнение для скорости решается методом итераций.

В основе подхода [11] лежит следующая схема. Скорость фильтрации может быть представлена в виде суммы потенциальной (безвихревой) и соленоидальной (вихревой) частей

$$u_i = u_i^{(p)} + u_i^{(s)}$$

удовлетворяющих условиям потенциальности и соленоидальности

$$\partial_i u_j^{(p)} - \partial_j u_i^{(p)} = 0, \quad \partial_i u_i^{(s)} = 0$$

Из первого уравнения (1.2) следует, что $u_i^{(p)}$ = const и значение этой константы определяется граничными условиями. В качестве граничных условий выберем требование о стационарной однородной накачке воды при $x_1 = -\infty$. Этому требованию соответствует $\mathbf{u}^{(p)} = \mathbf{u}^{(0)}$, где $\mathbf{u}^{(0)}$ – постоянный вектор, направленный вдоль оси x_1 ($u_i^{(0)} = u_0\delta_{i1}$).

С целью получения уравнения для $u_i^{(s)}$ рассмотрим выражение

$$\partial_j(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \equiv \Delta u_i^{(s)} \tag{2.1}$$

где $\Delta = \partial_i\partial_i$ – оператор Лапласа.

С другой стороны, выражая u_i в правой части (2.1) через давление с помощью закона Дарси, выполняя операции дифференцирования ∂_j и исключая после этого давление с помощью закона Дарси, найдем

$$\Delta u_i^{(s)} = L_{ikl}a_k u_l, \quad L_{ikl} = \delta_{ik}\partial_l - \delta_{il}\partial_k, \quad a_k = \frac{\partial_k\lambda}{\lambda} = b_k + c_k \tag{2.2}$$

$$b_k = \frac{\partial_k K(S)}{K(S)}, \quad c_k = \frac{\partial_k \kappa(\mathbf{r})}{\kappa(\mathbf{r})} = \partial_k\mu(\mathbf{r}) \tag{2.3}$$

где $\mu(\mathbf{r}) = \ln[\kappa(\mathbf{r})/\kappa_0]$ – случайное поле, при этом константа нормировки κ_0 выбрана таким образом, чтобы $\langle\mu(\mathbf{r})\rangle = 0$ (этому требованию соответствует условие, что κ_0 является средним геометрическим реализаций поля проницаемости).

Использование (2.2) позволяет получить интегральное уравнение для скорости фильтрационного потока

$$u_i(x, \mathbf{y}) = u_i^{(0)} - \int dx'd\mathbf{y}'\Delta^{-1}(x - x', \mathbf{y} - \mathbf{y}')L_{ikl}a_k(x', \mathbf{y}')u_l(x', \mathbf{y}') \tag{2.4}$$

где $\Delta^{-1}(x, \mathbf{y})$ – функция Грина для уравнения Лапласа (обратный оператор Лапласа), являющаяся решением уравнения

$$\Delta \cdot \Delta^{-1}(x, \mathbf{y}) = \delta(x)\delta(\mathbf{y})$$

Уравнение (2.4) можно решать методом итераций, что приводит к представлению решения в виде разложения в ряд теории возмущений по степеням $\partial_k\lambda/\lambda$.

Следует отметить, что разбиение входящего в (2.4) выражения $\partial\lambda/\lambda$ на сумму двух слагаемых (2.2) соответствует разбиению вклада от флуктуаций скорости на два слагаемых (1.8). Однако вытекающее из (2.2) и (2.3) разбиение (1.8) справедливо только в низшем приближении теории возмущений при вычислении скорости фильтрации, а именно с использованием первой итерации при решении уравнения (2.4). Уже в следующем приближении возникают перекрестные члены, связанные с совместным учетом вкладов от флуктуаций проницаемости за счет неоднородности среды и за счет изменения насыщенности вблизи фронта вытеснения. Вследствие этого уточнение выражения для скорости фильтрации путем численного решения задачи об однофазной фильтрации в случайно-неоднородной среде не обязательно ведет к уточнению решения задачи.

Вычисление b_k осуществляется следующим образом. Считая, что $S(\mathbf{r})$ – разрывная функция, испытывающая скачек на границе раздела $\varphi(\mathbf{r}) = 0$, можно записать $S(\mathbf{r})$ в виде обобщенной функции

$$S(\mathbf{r}) = (1/2)[S_1 + S_2] - (1/2)[S_1 - S_2]\operatorname{sign}[\varphi(\mathbf{r})]$$

Соответственно $K(S)$ и $K^{-1}(S)$ также являются разрывными функциями и могут быть записаны в виде

$$K(S) = (1/2)[K(S_1) + K(S_2)] - (1/2)[K(S_1) - K(S_2)]\operatorname{sign}[\varphi(\mathbf{r})]$$

$$K^{-1}(S) = (1/2)[K^{-1}(S_1) + K^{-1}(S_2)] - (1/2)[K^{-1}(S_1) - K^{-1}(S_2)]\operatorname{sign}[\varphi(\mathbf{r})]$$

В результате, при учете свойств обобщенных функций

$$\partial_i \operatorname{sign}[\varphi(\mathbf{r})] = 2\partial_i\varphi(\mathbf{r})\delta[\varphi(\mathbf{r})], \quad \operatorname{sign}(x)\delta(x) = 0$$

для $b_k(\mathbf{r})$ найдем

$$\begin{aligned} b_k(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2}[K(S_1) - K(S_2)][K^{-1}(S_1) + K^{-1}(S_2)]\partial_k\varphi(\mathbf{r})\delta[\varphi(\mathbf{r})] = \\ &= -2A\partial_k[x - h(\mathbf{y}, t)]\delta[x - h(\mathbf{y}, t)] \\ A &= \frac{K^2(S_1) - K^2(S_2)}{4K(S_1)K(S_2)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Отсюда получается

$$b_1(\mathbf{r}) = -2A\delta[x - h(\mathbf{y}, t)], \quad b_\alpha(\mathbf{r}) = 2A\partial_\alpha h(\mathbf{y}, t)\cdot\delta[x - h(\mathbf{y}, t)] \tag{2.6}$$

Следует отметить отличие множителя A в формуле (2.5) от полученного ранее [9, 10] выражения для A формулы (0.1) и (1.9). Это различие связано с тем, что в [9, 10] строится теория возмущений в виде разложения по степеням $\delta\lambda/\langle\lambda\rangle$, а не по степеням $\delta\lambda/\lambda = \delta\ln\lambda$, как в настоящей работе. В результате этого в этих работах для значения разрывной функции $K(S)$ на поверхности скачка $\bar{K}$ бралось $\bar{K} = [K(S_1) + K(S_2)]/2$, и для $\overline{K^{-1}}$ использовалось $\overline{K^{-1}} = (\bar{K})^{-1}$ вместо $\overline{K^{-1}} = [K(S_1)^{-1} + K(S_2)^{-1}]/2$ как в настоящей работе.

Из формулы (2.6) следует, что b_1 не содержит члена, пропорционального h, а b_α содержит h в первой степени. Поскольку для получения уравнения вида (1.7) представляют интерес члены нулевого и первого порядка по h, то согласно (1.6) следует вычислять u_1 с точностью до членов первого порядка по h, а u_α – с точностью до членов нулевого порядка. Независящие от h члены должны быть учтены в любых порядках.

Для учета этих членов следует выделить в (2.4) пропорциональный b_1 член и перенести его в правую часть

$$\begin{aligned} &u_i(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}'\Delta^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')L_{i1l}b_1(\mathbf{r}')u_l(\mathbf{r}') = \\ &= u_i^{(0)} - \int d\mathbf{r}'\Delta^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')L_{ikl}a_k'(\mathbf{r}')u_l(\mathbf{r}') \end{aligned} \tag{2.7}$$

С помощью функции Грина $G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, являющейся решением уравнения

$$G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int d\mathbf{r}''\Delta^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')L_{i1\alpha}b_1(\mathbf{r}'')G_{\alpha j}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

можно переписать уравнение (2.7) в виде

$$u_i(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'' G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')\{u_j^{(0)} - \int d\mathbf{r}' \Delta^{-1}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') L_{jkl} a'_k(\mathbf{r}') u_l(\mathbf{r}')\}$$
$$a'_k(\mathbf{r}) = a_k(\mathbf{r}) - b_1(\mathbf{r})\delta_{k1}$$

В низшем приближении по h в аргументе δ-функции в выражении для b_k функция $h(y, t)$ заменяется на $x_0 = h_0(t)$ (приближение плоского фронта). Поскольку в этом приближении $b_1(x, \mathbf{y})$ не зависит от $\mathbf{y}$, то можно выполнить преобразование Фурье по $\mathbf{y}$ и уравнение для функции Грина примет вид

$$G_{ij}(x, x', \mathbf{q}) - 2A\int dx'' \Delta^{-1}(x - x'', \mathbf{q}) L_{i1\alpha}\delta(x'' - x_0) G_{\alpha j}(x'', x', \mathbf{q}) = \delta_{ij}\delta(x - x'),$$
$$\Delta^{-1}(x - x', \mathbf{q}) = -\frac{1}{2q} e^{-q|x - x'|}$$

Решение этого уравнения дает

$$G_{\alpha j}(x, x', \mathbf{q}) = \delta_{\alpha j}[\delta(x - x') - A\,\mathrm{sign}(x - x_0) e^{-q|x - x_0|}\delta(x_0 - x')]$$
$$G_{11}(x, x', \mathbf{q}) = \delta(x - x'), \quad G_{1\alpha}(x, x', \mathbf{q}) = -\frac{iq_\alpha}{q} A e^{-q|x - x_0|}\delta(x_0 - x')$$

При построении приближенного решения уравнения для скорости (2.7) используется первая итерация путем подстановки под знаком интеграла в правой части $u_0\delta_{1l}$ вместо $u_l(\mathbf{r}')$. Поскольку получающееся выражение имеет вид свертки, можно выполнить преобразование Фурье по поперечным координатам, в результате чего для u_1 (u_α дают вклад, пропорциональный степеням h выше первой, который не представляет интереса с точки зрения получения уравнения для h) получается

$$u_1(x, \mathbf{q}) = u_0\{(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q}) - \int dx' dx'' [G_{11}(x, x', \mathbf{q})\Delta^{-1}(x' - x'', \mathbf{q}) L_{1\alpha 1} +$$
$$+ G_{1\beta}(x, x', \mathbf{q})\Delta^{-1}(x' - x'', \mathbf{q}) L_{\beta\alpha 1}] a_\alpha(x'', \mathbf{q})\}$$

и при учете соотношения $a_\alpha = iq_\alpha a$ и вида функций Грина G_{ij}, следует

$$u_1(x, \mathbf{q}) = u_0\left\{(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q}) - \frac{q}{2}\int dx' \left[e^{-q|x - x'|} + \frac{A}{q} e^{-q|x - x_0| - q|x_0 - x'|}\partial'_1\right] \times\right.$$
$$\left.\times [2Ah(\mathbf{q}, t)\delta(x' - x_0) + \mu(x', \mathbf{q})]\right\}$$

Это выражение на невозмущенном фронте вытеснения $x = x_0 = h_0(t)$ принимает вид

$$u_1(x_0, \mathbf{q}) =$$
$$= u_0\left\{(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q}) - Aqh(\mathbf{q}, t) + \frac{q}{2}\int dx' e^{-q|x_0 - x'|}\left(1 + \frac{A}{q}\partial'_1\right)\mu(x', \mathbf{q})\right\}$$

Используя следующее тождество

$$\frac{1}{2q} e^{-q|x_0 - x'|} = \int \frac{dq_1}{2\pi} \frac{e^{iq_1(x_0 - x')}}{q_1^2 + q^2}$$

для u_1 получим

$$u_1(x_0, \mathbf{q}) =$$
$$= u_0\left\{(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q}) - Aqh(\mathbf{q}, t) + q^2\int\frac{dq_1}{2\pi}\frac{e^{iq_1x_0}}{q_1^2+q^2}\left(1+\frac{iq_1A}{q}\right)\mu(q_1, \mathbf{q})\right\}$$

Подстановка этого выражения в уравнение для $h(\mathbf{q}, t)$ дает

$$\partial_t h(\mathbf{q}, t) =$$
$$= c_0\left\{(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q}) - Aqh(\mathbf{q}, t) + q^2\int\frac{dq_1}{2\pi}\frac{e^{iq_1x_0}}{q_1^2+q^2}\left(1+\frac{iq_1A}{q}\right)\mu(q_1, \mathbf{q})\right\}$$

Сделав замену

$$h(\mathbf{q}, t) \to h(\mathbf{q}, t) - h_0(\mathbf{q}, t)$$

где $h_0(\mathbf{q}, t) \equiv x_0(\mathbf{q}, t) = c_0(2\pi)^{d-1}\delta(\mathbf{q})t$, и выполнив преобразование Фурье по времени с учетом $x_0 = c_0t$, получим уравнение

$$-\frac{i\omega}{c_0}h(\mathbf{q}, \omega) = -Aqh(\mathbf{q}, \omega) + q^2\frac{1}{\omega^2/c_0^2+q^2}\left(1-\frac{i\omega A}{c_0q}\right)\frac{\mu(-\omega/c_0, \mathbf{q})}{c_0}$$

решение которого представляется в форме

$$h(\mathbf{q}, \omega) = M(q_1, \mathbf{q})\frac{\mu(q_1, \mathbf{q})}{c_0}, \quad q_1 = -\frac{\omega}{c_0}$$
$$M(q_1, \mathbf{q}) = \frac{q^2}{(iq_1+Aq)(q_1^2+q^2)}\left(1+\frac{iq_1A}{q}\right) \tag{2.8}$$

Поскольку согласно (2.8) величина h линейно зависит от μ, то в случае, когда статистика проницаемости является логнормальной (статистика $\mu(\mathbf{r})$ является нормальной), статистика флуктуаций фронта вытеснения также является нормальной и все статистические свойства величины $h(\mathbf{y}, t)$ определяются единственной функцией $B(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}', t') = \langle h(\mathbf{y}, t)h(\mathbf{y}', t')\rangle$ – парной корреляционной функцией случайного поля $h(\mathbf{y}, t)$. Эта величина может быть вычислена исходя из формулы разложения Фурье

$$B(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}', t') =$$
$$= \int\frac{d\mathbf{q}d\omega}{(2\pi)^d}\frac{d\mathbf{q}'d\omega'}{(2\pi)^d}\langle h(\mathbf{q}, \omega)h(\mathbf{q}', \omega')\rangle\exp\{i(\mathbf{q}\mathbf{y}+\mathbf{q}'\mathbf{y}') - i(\omega t+\omega' t')\} \tag{2.9}$$
$$\langle h(\mathbf{q}, \omega)h(\mathbf{q}', \omega')\rangle = M(q_1, \mathbf{q})M(q_1', \mathbf{q}')\frac{\langle\mu(q_1, \mathbf{q})\mu(q_1', \mathbf{q}')\rangle}{c_0^2}$$

Статистика поля логарифма проводимости является заданной и в силу условия статистической однородности поля проводимости имеем

$$\langle\mu(q_1, \mathbf{q})\mu(q_1', \mathbf{q}')\rangle = D(q_1, \mathbf{q})(2\pi)^d\delta(q_1+q_1')\delta(\mathbf{q}+\mathbf{q}') \equiv D(\mathbf{Q})(2\pi)^d\delta(\mathbf{Q}+\mathbf{Q}')$$

где $D(\mathbf{Q})$ – заданная функция, в изотропном случае зависящая от $q_1^2 + q^2 = Q^2$.

Использование этих свойств приводит к соотношению

$$B(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}', t') =$$
$$= \int \frac{d\mathbf{q}d\omega}{(2\pi)^d} |M(q_1, \mathbf{q})|^2 D(q_1, \mathbf{q}) \exp\{i\mathbf{q}(\mathbf{y}-\mathbf{y}') + iq_1c_0(t-t')\}$$

В результате возникает возможность находить средние величины, характеризующие фронт вытеснения и, в частности, среднее распределение водонасыщенности

$$\langle S(\mathbf{r}, t)\rangle = \frac{1}{2}[S_1+S_2] - \frac{1}{2}[S_1-S_2]\langle \operatorname{sign}[x - c_0t - h(\mathbf{y}, t)]\rangle$$

где среднее берется по флуктуациям фронта $h(\mathbf{y}, t)$.

3. Вычисление среднего распределения водонасыщенности. Для нахождения этой величины удобно сначала вычислить

$$\partial_x\langle S(\mathbf{r}, t)\rangle = -[S_1-S_2]\langle \delta[x - c_0t - h(\mathbf{y}, t)]\rangle \tag{3.1}$$

Далее, воспользовавшись представлением δ-функции

$$\delta[x - c_0t - h(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{dp}{2\pi}\exp\{ip[x - c_0t - h(\mathbf{y}, t)]\}$$

выполним усреднение по ансамблю реализаций случайного поля смещений фронта вытеснения

$$\langle \delta[x - c_0t - h(\mathbf{y}, t)]\rangle = \int \frac{dp}{2\pi}\exp\{ip(x - c_0t)\}\langle \exp\{-iph(\mathbf{y}, t)\}\rangle \equiv$$
$$\equiv \int \frac{dp}{2\pi}\exp\{ip(x - c_0t)\}\Phi[g(p, \mathbf{z}, \tau)], \quad g(p, \mathbf{z}, \tau) = -p\delta(\mathbf{z}-\mathbf{y})\delta(\tau - t) \tag{3.2}$$
$$\Phi[g(p, \mathbf{z}, \tau)] = \langle \exp\{i\int d\mathbf{z}d\tau h(\mathbf{z}, \tau)g(p, \mathbf{z}, \tau)\}\rangle$$

В формуле (3.2) величина $\Phi[g]$ представляет собой характеристический функционал случайного поля $h(\mathbf{y}, t)$.

Форма характеристического функционала для нормального распределения случайного поля имеет следующий вид

$$\Phi[g(p, \mathbf{z}, \tau)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d\mathbf{z}d\tau g(p, \mathbf{z}, \tau)B(\mathbf{z}, \tau; \mathbf{z}', \tau')g(p, \mathbf{z}', \tau')d\mathbf{z}'d\tau'\right\}$$

что, с учетом вида функции $g(p, \mathbf{z}, \tau)$, дает

$$\Phi[g(p, \mathbf{z}, \tau)] = \exp\left\{-\frac{1}{2}B(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}, t)p^2\right\}$$

$$B(\mathbf{y}, t; \mathbf{y}, t) = \langle h^2(\mathbf{y}, t)\rangle = B_0$$

где B_0 – дисперсия продольных смещений фронта.

После выполнения интегрирования по p найдем

$$\partial_x\langle S(\mathbf{r}, t)\rangle = -[S_1-S_2]\frac{1}{(2\pi B_0)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-c_0t)^2}{2B_0}\right\}$$

что при условии $S(\mathbf{r})|_{x=-\infty} = S_1$ приводит к формуле для средней насыщенности

$$\langle S(\mathbf{r},t)\rangle = S_1 - [S_1 - S_2]\frac{1}{(2\pi B_0)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{x-c_0t} dx'\exp\left\{-\frac{x'^2}{2B}\right\} \tag{3.3}$$

Таким образом, фронт вытеснения движется с постоянной скоростью c_0 и его граница размыта в области, определяемой дисперсией продольных смещений фронта B_0, которая может быть найдена на основе полученной выше формулы (2.9) при $\mathbf{y} - \mathbf{y}' = 0$, $t - t' = 0$. Знание этой величины позволяет оценить вероятность прорыва воды в нефтезаборную скважину в процессе вытеснения нефти водой.

4. Дисперсия продольных смещений фронта вытеснения. Согласно (2.9) величина B_0 определяется соотношением

$$B_0 = \int\frac{d\mathbf{q}d\omega}{(2\pi)^d}|M(q_1,\mathbf{q})|^2D(q_1,\mathbf{q}) = c_0\int\frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^d}|M(\mathbf{Q})|^2D(\mathbf{Q}) \tag{4.1}$$

В дальнейшем представим $D(\mathbf{Q})/Q^2$ в форме интеграла Лапласа

$$\frac{D(\mathbf{Q})}{Q^2} = \int\limits_0^\infty dm\rho(m)\exp\{-mQ^2\} \tag{4.2}$$

где “спектральная плотность” $\rho(m)$ определяет форму корреляционной функции логарифмов проницаемости $D(\mathbf{r})$.

Для выполнения интегрирования по $\mathbf{Q}$ введем обозначения $q_1 = Q\cos\theta$, $q = Q\sin\theta$. В результате получим

$$\begin{aligned} B_0 &= \int\limits_0^\infty\rho(m)dm\int\frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^d}\frac{\sin^2\theta(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)}{\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta}e^{-mQ^2} = \\ &= \frac{\Omega_{d-1}}{(2\pi)^d}\int\limits_0^\infty\rho(m)dm\int\limits_0^\infty Q^{d-1}dQe^{-mQ^2}\int\limits_0^\pi\sin^{d-2}\theta d\theta\frac{\sin^2\theta(\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta)}{\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta} \end{aligned} \tag{4.3}$$

При учете приведенных ниже дополнительных соотношений найдем B_0

$$\begin{gathered} B_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma((d-1)/2)}\int\frac{\rho(m)dm}{(2\pi m)^{d/2}}\int\limits_0^\pi\sin^d\theta d\theta\frac{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta} \\ \int\limits_0^\infty Q^{d-1}dQe^{-mQ^2} = \frac{\Gamma(d/2)}{2m^{d/2}},\quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \end{gathered} \tag{4.4}$$

Таким образом, задача сводится к вычислению двух независимых интегралов (по m и θ). Можно показать (см. приложение), что имеет место следующее соотношение, связывающее интеграл по m с видом корреляционной функции логарифмов проницаемости $D(\mathbf{r}) = \langle\mu(\mathbf{r})\mu(0)\rangle$

$$I(d) = \int\limits_0^\infty\frac{\rho(m)dm}{(4\pi m)^{d/2}} = \frac{1}{d-2}\int\limits_0^\infty rD(r)\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right]dr \tag{4.5}$$

Эта формула позволяет непосредственно вычислять B_0 на основе задания вида функции $D(\mathbf{r})$ без использования преобразований Фурье и Лапласа. При $d = 2$ формула (4.5) принимает вид

$$I(d) = \int_0^\infty \frac{\rho(m)dm}{4\pi m} = -\int_0^\infty rD(r)\ln\frac{r}{r_0}dr \tag{4.6}$$

где r_0 – произвольный параметр с размерностью длины. Появление этого параметра связано с известными логарифмическими особенностями решения двумерного уравнения Лапласа (обсуждение этого вопроса см. в Приложении). С этой же проблемой столкнулись авторы [10]; использованный ими переход к рассмотрению вариограмм эквивалентен выбору "точки нормировки" при нахождении функции Грина для уравнения Лапласа.

Остающийся интеграл по углам

$$I_1(d, A) = \int_0^\pi \sin^d\theta d\theta \frac{\sin^2\theta + A^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta} \tag{4.7}$$

в общем случае выражается через гипергеометрические функции, но в частных случаях $d = 2, 3$ вычисляется точно:

$$\begin{aligned} I_1(3, A) &= \frac{\pi}{2}\frac{A^2 - A + 2}{A(A+1)} \\ I_1(3, A) &= \frac{2}{3}\frac{\sqrt{A^2-1}(A^3+5A) - 3(A^2+1)\operatorname{arctg}(\sqrt{A^2-1}/A)}{A(A^2-1)^{3/2}} \end{aligned} \tag{4.8}$$

(в формулах (4.8) подразумевается A по модулю).

В результате получим связь между дисперсией продольных смещений фронта вытеснения B_0 и корреляционной функцией логарифмов проницаемости $D(r)$

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma((d-1)/2)(d-2)} I_1(d, A)\int_0^\infty rD(r)\left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right]dr \tag{4.9}$$

Вычисление интеграла (4.5) было проведено для трех случаев формы корреляционной функции $D(r)$

$D(r) = D_0 H(a - r)$ ($H(x)$ – функция единичного скачка Хевисайда)

$$D(r) = D_0\exp\left\{-\frac{r}{a}\right\},\quad D(r) = D_0\exp\left\{-\frac{r^2}{a^2}\right\}$$

В результате в трехмерном случае было получено соответственно

$$I_1(3) = \frac{1}{2}D_0a^2;\quad I_1(3) = D_0a^2;\quad I_1(3) = \frac{1}{2}D_0a^2$$

при $r_0 = \infty$.

В двумерном случае результат зависел от выбора точки нормировки r_0 и было получено:

$$I_1(2) = D_0a^2/4 \text{ при } r_0 = a; \quad I_1(2) = D_0a^2C_E \text{ при } r_0 = ea;$$

$$I_1(2) = D_0a^2C_E/4 \text{ при } r_0 = a, \quad (C_E = 0.577 \text{ – постоянная Эйлера})$$

Отсюда видно, что выбор формы корреляционной функции логарифмов проницаемости среды слабо влияет на величину дисперсии продольных смещений.

Аналогичным образом может быть установлена связь между дисперсией продольных скоростей вблизи граничной поверхностьи и дисперсией логарифмов проницаемости неоднородной среды.

Заключение. В отличие от ранее проведенного исследования совместного влияния водонасыщенности и неоднородности среды на поведение фронта вытеснения, когда сначала в линейном приближении учитывалось влияние водонасыщенности на формирование фронта в случае однородной среды, а затем в низшем приближении теории возмущений определялись поправки к полученному решению за счет неоднородности [10], в предложенном подходе оба эти эффекта с самого начала рассматриваются совместно. Этого удается достигнуть в рамках "улучшенной теории возмущений", в которой при решении интегрального уравнения для скоростей методом итераций разложение в ряд теории возмущений происходит по величине $\delta\ln\lambda$, а не по величине $\delta\lambda/\langle\lambda\rangle$; построенный подобным образом ряд сходится быстрее.

Это позволило получить формулу для среднего распределения водонасыщенности вблизи фронта насыщения, которая оказывается полезной для оценки вероятности прорыва воды в забирающую скважину при закачке воды с целью повышения нефтеотдачи скважины. При нахождении этой формулы операция усреднения осуществляется точно в предположении, что статистика проницаемости является логнормальной. В этом случае форма распределения водонасыщенности определяется дисперсией продольных смещений поверхности разрыва; эта величина оказывается зависящей от дисперсии и корреляционной длины логарифма проницаемости.

Приложение. В пространстве размерности d рассмотрим следующий интеграл

$$I(d) = -\int d\mathbf{r}\Delta^{-1}(\mathbf{r})D(r) \tag{П1}$$

Используя выражение для Фурье-образа функции Грина уравнения Лапласа $\Delta^{-1}(\mathbf{Q}) = -1/Q^2$, получим

$$\Delta^{-1}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma((d-2)/2)}{4\pi^{d/2}}\frac{1}{r^{d-2}} \tag{П2}$$

Приведенное выражение расходится при $d \to 2$, поскольку при $\epsilon \to 0$ функция $\Gamma(\epsilon) \to 1/\epsilon$ и отсюда следует

$$\Delta^{-1}(r) \to -\frac{1}{4\pi}\frac{2r^{-\epsilon}}{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-\epsilon\ln r}}{\epsilon} \approx -\frac{1}{2\pi}\frac{1-\epsilon\ln r}{\epsilon} = \frac{1}{2\pi}\ln r - \frac{1}{2\pi\epsilon} \tag{П3}$$

Это известные логарифмические особенности решений двумерного уравнения Лапласа, которые устраняются стандартным образом с помощью условия нормировки, согласно которому в произвольно выбранной точке нормировки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ функция Грина для уравнения Лапласа (определенная с точностью до произвольной функции, являющейся решением однородного уравнения) должна обращаться в нуль.

Доопределив подобным образом функцию Грина, найдем

$$\Delta^{-1}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma((d-2)/2)}{4\pi^{d/2}}\left[\frac{1}{r^{d-2}} - \frac{1}{r_0^{d-2}}\right] \tag{П4}$$

что в двумерном случае $d = 2$ дает

$$\Delta^{-1}(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0} \tag{П5}$$

В трехмерном случае можно принять $r_0 = \infty$, что соответствует "естественному" дополнительному условию исчезновения потенциала на бесконечности, в двумерной задаче это невозможно.

Подставляя (П4) в (П1), найдем

$$I(d) = \frac{\Gamma((d-2)/2)}{4\pi^{d/2}}\int d\mathbf{r}\frac{D(r)}{r^{d-2}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right] =$$

$$= \frac{\Gamma((d-2)/2)\Omega_d}{4\pi^{d/2}}\int_0^\infty \frac{r^{d-1}D(r)dr}{r^{d-2}}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right] = \frac{1}{d-2}\int_0^\infty drrD(r)\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right], \tag{П6}$$

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

С другой стороны, используя формулу разложения Фурье для $\Delta^{-1}(\mathbf{r})$ и $D(\mathbf{r})$, получим

$$I(d) = \int\frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^d}\frac{D(Q)}{Q^2} \equiv \int_0^\infty \rho(m)dm\int\frac{d\mathbf{Q}}{(2\pi)^d}e^{-mQ^2} = \int_0^\infty\frac{\rho(m)dm}{(4\pi m)^{d/2}} \tag{П7}$$

Таким образом нами доказано соотношение

$$\int_0^\infty\frac{\rho(m)dm}{(4\pi m)^{d/2}} = \frac{1}{d-2}\int_0^\infty rD(r)\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{d-2}\right]dr \tag{П8}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lenormand R.* Determining flow equations from stochastic properties of a permeability field: The MHD model // SPE Journal. June 1996. P. 179–190.
2. *Langlo P., Espedal M.S.* Macrodispersion for two-phase, immiscible flow in porous media // Advances in Water Resources. 1994. V. 17. P. 297–316.
3. *Dagan G., Cvetkovic V.* Reactive transport and immiscible flow in geological media. I-general theory // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. № 1945. P. 285–301.
4. *Cvetkovic V., Dagan G.* Reactive transport and immiscible flow in geological media. II-applications // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1996. V. 452. № 1945. P. 303–328.
5. *Zhang D., Tchelepi H.A.* Stochastic analysis of immiscible two-phase flow in heterogeneous media // SPE Journal. 1999. V. 4. № 4. P. 380–388.
6. *Artus V., Noetinger B.* Macrodispersion approach for upscaling two-phase, immiscible flows in heterogeneous porous media // 8th Europ. Conf. Mathematics of Oil Recovery. September 2002. Freiberg, Germany.
7. *Furtado F., Pereira F.* Crossover from nonlinearity controlled to heterogeneity controlled mixing in two-phase porous media flows // Submitted to Computational Geosciences. 2002.
8. *Saffman P.G., Taylor G.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.

9. *King M.J., Dunayevsky V.A.* Why waterflood works: a linearized stability analysis // Paper SPE. 1989. № 19648.
10. *Noetinger B., Artus V., Ricard L.* Dynamics of the water-oil front for two-phase, immiscible flows in heterogeneous porous media. 2-isotropic media // Transport in Porous Media. 2004. V. 56. № 3. P. 305–328.
11. *Теодорович Э.В.* Метод улучшенной теории возмущений при описании эффективной проницаемости случайно-неоднородной среды // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 448–456.
12. *Buckley S.E., Leverett M.C.* Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME. 1942. V. 146. P. 107–116.
13. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
14. *Спесивцев П.Е., Теодорович Э.В.* Тензор дисперсии скорости в плоском фильтрационном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 2004. Вып. 3. С. 91–100.

Париж, Москва
E-mail: benoit.noetinger@ifp.fr;
spavlos@yandex.ru;
teodor@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
25.I.2006